D. V. Sivuchin

CORSO DI FISICA GENERALE

4

OTTICA

EDEST
EDIZIONI
MIR

D.V. Sivuchin

CORSO DI FISICA GENERALE

4

OTTICA

Dmitrij Sivuchin

Corso di fisica generale

in 5 volumi

Edizioni Estere   Edizioni Mir

INDICE

8 Prefazione

10 Capitolo I. INTRODUZIONE

§ 1. Oggetto dell'ottica (10). § 2. Ottica geometrica (12). § 3. Evoluzione delle idee sulla natura della luce (21). § 4. Curvatura dei raggi luminosi nei mezzi non omogenei (33). § 5. Onde elettromagnetiche piane (38). § 6. Passaggio al limite dall'ottica ondulatoria all'ottica geometrica (45). § 7. Principio di Fermat (51). § 8. Velocità di gruppo (58).

68 Capitolo II. TEORIA GEOMETRICA DELLE IMMAGINI OTTICHE

§ 9. Nozione d'immagine ottica (68). § 10. Rifrazione su una superficie sferica. Specchi sferici e lenti sottili (74). § 11. Proprietà generali dei sistemi ottici centrati (79). § 12. Composizione di sistemi ottici centrati. Lenti spesse (89). § 13. Limitazione dei fasci luminosi per mezzo di diaframmi (96). § 14. Astigmatismo. Superfici caustiche (101). § 15. Aberrazioni geometriche nei sistemi centrati (105). § 16. Aberrazione cromatica (112). § 17. Condizione d'assenza di distorsione (120). § 18. Condizione dei seni di Abbe (121). § 19. Teorema dei coseni. Immagini stigmatiche formate da fasci di grande apertura (129). § 20. Nozione di strumento ottico perfetto (136). § 21. Occhio e visione (141). § 22. Nozioni ed unità fotometriche (152). § 23. Brillanza ed illuminamento delle immagini ottiche. Ingrandimento normale (163). § 24. Strumenti ottici (171). § 25. Lenti elettriche e magnetiche (189).

199 Capitolo III. INTERFERENZA DELLA LUCE

§ 26. Nozioni generali sull'interferenza (199). § 27. Esperimenti d'interferenza classici (210). § 28. Influenza delle dimensioni della sorgente luminosa. Coerenza spaziale (217). § 29. Decomposizione spettrale (226). § 30. Interferenza in luce non monocromatica (231). § 31. Correlazione e coerenza della luce (235). § 32. Teorema di Van Cittert-Zernike (242). § 33. Interferenza nelle lamine e nelle lastre a facce piane e parallele (245). § 34. Interferometro di Jamin (252). § 35. Interferometro di Michelson (258). § 36. Interferometri a onde multiple (260). § 37. Onde luminose stazionarie (269). § 38. Radiazione di Vavilov-Čerenkov (273).

280 Capitolo IV. DIFFRAZIONE DELLA LUCE

§ 39. Principio di Huygens-Fresnel. Zone di Fresnel (280). § 40. Diffrazione prodotta sull'asse da un'apertura circolare e da uno schermo. Reticolo a zone (287). § 41. Metodo di Fresnel per la soluzione dei problemi di diffrazione. Diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel (295). § 42. Zone di Schuster e spirale di Cornu (302). § 43. Principio di Huygens nella formulazione di Kirchhoff (308). § 44. Diffrazione di Fraunhofer da una fenditura (314). § 45. Diffrazione di Fraunhofer prodotta da piccole aperture (320). § 46. Reticolo di diffrazione (325). § 47. Reticolo di diffrazione come strumento spettrale (335). § 48. Reticolo a gradinata di Michelson e strumenti spettrali interferenziali (340). § 49. Potere risolutivo di un prisma (345). § 50. Azione esercitata da un apparecchio spettrale sugli impulsi luminosi (350). § 51. Reticolo di Rowland (355). § 52. Diffrazione da un reticolo trattata come un problema ai limiti (360). § 53. Esempi d'applicazione del metodo di Rayleigh (366). § 54. Olografia (370). § 55. Campo luminoso in prossimità di un fuoco (381). § 56. Potere risolutivo del telescopio e del microscopio (385). § 57. Teoria ed esperimenti di Abbe (395). § 58. Telescopio senza obiettivo. Formazione delle immagini per mezzo di piccole aperture (402). § 59. Contrasto di fase (406). § 60. Misura delle dimensioni angolari delle stelle (409). § 61. Diffrazione da reticoli bi- e tridimensionali. Diffrazione dei raggi X (415).

428 Capitolo V. RIFLESSIONE E RIFRAZIONE DELLA LUCE

§ 62. Luce polarizzata e luce naturale (428). § 63. Condizioni al contorno nella teoria elettromagnetica della luce (432). § 64. Leggi geometriche della riflessione e della rifrazione delle onde (434). § 65. Formule di Fresnel (438). § 66. Riflessione totale (445). § 67. Trasmissione della luce attraverso una lamina piana a facce parallele. Chiarificazione dei vetri ottici (451). § 68. Propagazione della luce in un mezzo esaminata dal punto di vista dell'ottica molecolare (460). § 69. Deduzione delle formule di Fresnel nell'ottica molecolare (465). § 70. Scarti dalle formule di Fresnel (469).

476 Capitolo VI. OTTICA DEI METALLI

§ 71. Equazioni di Maxwell e propagazione delle onde nei metalli (476). § 72. Leggi geometriche della riflessione e della rifrazione della luce sulla superficie di un metallo (479). § 73. Formule di Fresnel. Misura delle costanti ottiche dei metalli (482). § 74. Effetto skin anomalo e permettività dielettrica efficace (489).

491 Capitolo VII. OTTICA DEI MEZZI CRISTALLINI

§ 75. Propagazione di un'onda piana nei cristalli (491). § 76. Cristalli otticamente uniassici (493). § 77. Polarizzatori (501). § 78. Analisi della luce polarizzata (509). § 79. Interferenza in luce polarizzata (518). § 80. Velocità normali e polarizzazione delle onde nei cristalli biassici (529). § 81. Raggi luminosi, normali d'onda e loro relazione (537). § 82. Rifrazione conica (548). § 83. Osservazioni relative alla riflessione ed alla rifrazione della luce su superfici cristalline (555).

559 Capitolo VIII. OTTICA MOLECOLARE

§ 84. Teoria classica della dispersione della luce (559). § 85. Approccio della meccanica quantistica alla formula di dispersione (571). § 86. Metodi di studio sperimentale della dispersione anomala (575). § 87. Dispersione in un plasma (581). § 88. Densità media di energia elettromagnetica nei mezzi dispersivi (584). § 89. Assorbimento della luce ed allargamento delle righe spettrali (589). § 90. Birifrangenza nei campi elettrico e magnetico (595). § 91. Effetto elettroottico lineare di Pockels (606). § 92. Effetto Zeeman (608). § 93. Effetto Stark (614). § 94. Rotazione del piano di polarizzazione (616). § 95. Polarizzazione rotatoria magnetica (622). § 96. Dispersione temporale e spaziale. Teoria dell'attività ottica naturale (628). § 97. Fluttuazioni termiche (637). § 98. Diffusione della luce (642). § 99. Effetto Mandelštam-Brillouin (653). § 100. Diffusione combinatoria (effetto Raman) (660).

665 Capitolo IX. TEORIA DELLA RELATIVITÀ

§ 101. Principio di relatività in meccanica newtoniana ed in meccanica relativistica (665). § 102. Esperienza di Michelson (668). § 103. Indipendenza della velocità della luce dal moto della sorgente luminosa (674). § 104. Concetto di simultaneità (677). § 105. Trasformazione delle coordinate e del tempo nella teoria della relatività (680). § 106. Contrazione delle lunghezze e dilatazione del tempo (689). § 107. Effetto Doppler ed aberrazione della luce (697). § 108. Effetto Doppler in acustica e nella teoria dell'etere (704). § 109. Dilatazione del tempo nel campo gravitazionale (708). § 110. Composizione delle velocità nella teoria della relatività (711). § 111. Meccanica relativistica (715).

721 Capitolo X. IRRAGGIAMENTO TERMICO

§ 112. Radiazione d'equilibrio in una cavità (721). § 113. Legge di Kirchhoff (724). § 114. Formula di Kirchhoff-Clausius (729). § 115. Legge di Stefan-Boltzmann (731). § 116. Teorema e legge di spostamento di Wien (734). § 117. Formula di Rayleigh-Jeans (739). § 118. Formula di Planck (745). § 119. Radiazione spontanea ed indotta (751).

756 Capitolo XI. LASER ED OTTICA NON LINEARE

§ 120. Principi di funzionamento del laser (756). § 121. Laser a rubino (761). § 122. Laser a elio-neon (770). § 123. Polarizzazione non lineare del mezzo (773). § 124. Prima approssimazione. Rivelazione ottica. Generazione delle seconde armoniche, corrispondenti alla somma ed alla differenza delle frequenze (775). § 125. Seconda approssimazione. Autofocalizzazione (780). § 126. Generazione parametrica di luce (783).

787 Supplemento. § S. PROPAGAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE NELLE GUIDE D'ONDA

798 Indice dei nomi
801 Indice analitico

PREFAZIONE

Il quarto volume del Corso di fisica generale è dedicato all'ottica fisica ed è la prosecuzione naturale del volume precedente, nel quale è esposta la teoria dei fenomeni elettrici e magnetici. L'ottica fisica è esaminata, in questo volume, principalmente dal punto di vista ondulatorio (elettromagnetico), mentre i problemi dell'ottica quantica occupano una parte molto modesta. Si introduce la nozione di fotone e si interpreta il processo di irraggiamento come risultante di transizioni quantiche dei sistemi atomici da uno stato energetico ad un altro, il che è necessario per introdurre la nozione di irraggiamento indotto e per spiegare il principio di funzionamento dei laser. Ma un'esposizione sistematica dei fondamenti dell'ottica quantica, nella misura in cui ciò è possibilie nel quadro della fisica generale, nonché degli effetti quantici concernenti l'ottica (effetto fotoelettrico, effetto Compton, leggi spettrali, luminescenza, effetto Zeeman, effetto Stark, ecc.) verrà data nel quinto volume, che sarà dedicato alla fisica atomica.

L'ottica geometrica viene trattata nei primi due capitoli del presente volume, che servono da base nello studio dei fenomeni d'interferenza, di diffrazione e di altre questioni dell'ottica fisica. L'ottica geometrica è presentata da un punto di vista tipicamente fisico, cioè come caso limite dell'ottica ondulatoria, allo scopo di precisarne i limiti di validità. Per semplificare lo studio dell'ottica geometrica, si prende come punto di partenza l'equazione d'onda nella sua forma scalare. Benché quest'equazione non sia verificata per i mezzi non omogenei, essa conduce a risultati corretti quando si passa al limite dell'ottica geometrica. L'equazione scalare non permette di giustificare la rotazione del piano di polarizzazione dei raggi luminosi in un mezzo non omogeneo, poiché a questo scopo sono necessarie le equazioni vettoriali di Maxwell. Ma ciò richiede calcoli molto laboriosi, mentre l'equazione d'onda scalare descrive correttamente gli aspetti principali della propagazione delle onde nei mezzi omogenei e non omogenei. L'ottica geometrica deriva da quest'equazione nel caso limite di onde corte, cioè quando le lunghezze d'onda sono piccole rispetto alle dimensioni caratteristiche che determinano la propagazione della luce in un mezzo dato.

D'altra parte la giustificazione dell'ottica geometrica, malgrado la sua importanza, può essere omessa in una prima lettura del presente volume.

Dopo aver esposto le basi dell'ottica geometrica, nel secondo capitolo di questo volume tratteremo la teoria geometrica delle immagini ottiche, affrontando soprattutto questioni di principio. Lo studente, ad una prima lettura, può limitarsi ad assimilare la teoria della formazione delle immagini nell'approssimazione di raggi parassiali e le nozioni fondamentali della fotometria. Potrà ritornare sulle altre questioni qui sviluppate, qualora ne avverta la necessità per ben comprendere l'ottica fisica.

La parte centrale del volume è costituita dalla trattazione dell'ottica fisica, che inizia a partire dal terzo capitolo. Incontreremo successivamente una parte dedicata alla teoria della relatività, ai princìpi di funzionamento del laser, ed inoltre saranno dati alcuni elementi di ottica non lineare. Come nei precedenti volumi di questo Corso, l'autore si è proposto di dare particolare risalto al significato fisico dei fenomeni ottici ed al loro collegamento con i princìpi fisici generali.

Le questioni della storia dell'ottica, di una verifica sperimentale delle sue leggi, delle sue applicazioni nella tecnica ed in altre scienze sono toccate solo se necessarie per meglio comprendere i fenomeni ed i princìpi dell'ottica. Per non allungare troppo il testo, alla descrizione di esperienze dimostrative viene dedicata una minore attenzione che nei volumi precedenti. Le dimostrazioni svolte all'Istituto fisico-tecnico di Mosca dagli assistenti dell'autore, E.N. Morozov, M.I. Maklakov, V.P. Molčanov, V.A. Kuznetsova, ai quali sono molto grato, hanno giocato un ruolo positivo nella preparazione di questo Corso d'ottica.

Il manoscritto di questo volume è stato scrupolosamente rivisto dai professori S.S. Geršteín e I.S. Gorban e dai loro collaboratori della cattedra di Fisica sperimentale dell'Università Ševčenko di Kiev, nonché dal dottore in scienze fisiche G.P. Peka. Ho tenuto conto delle loro osservazioni e li ringrazio.

D.V. Sivuchin

I. INTRODUZIONE

§ 1. *Oggetto dell'ottica*

L'*ottica,* o più esattamente, l'*ottica fisica,* è la parte della fisica che tratta sia le proprietà e la natura fisica della luce che le sue interazioni con la materia. Con il termine luce si intende non solo la *luce visibile,* ma anche le radiazioni elettromagnetiche in tutto lo spettro, comprese quindi le regioni dell'*infrarosso* e dell'*ultravioletto*. Le diverse parti dello spettro della radiazione elettromagnetica differiscono l'una dall'altra per la *lunghezza d'onda* λ e per la *frequenza* ν; queste grandezze caratterizzano non solo le *proprietà ondulatorie, ma anche quelle quantiche.* Di solito lo spettro elettromagnetico viene suddiviso in *onde radio, infrarosso, visibile, ultravioletto, raggi* X e *raggi* γ. Queste regioni di spettro non differiscono per la loro natura fisica, ma per il *metodo di emissione* e di rivelazione della radiazione. Perciò non sono possibili distinzioni nette, le regioni si sovrappongono e le frontiere tra loro sono convenzionali.

Si dicono *onde radio* (*hertziane*) le radiazioni elettromagnetiche le cui lunghezze d'onda sono superiori a 0,1 mm circa. Si è soliti dividerle in: 1) *onde ultralunghe* con lunghezza d'onda $\lambda > 10$ km, (frequenza $\nu <$ < 30 kHz); 2) *onde lunghe* ($\lambda = 10 - 1$ km, $\nu = 30 - 300$ kHz); 3) *onde medie* ($\lambda = 1$ km $- 100$ m, $\nu = 300$ kHz $- 3$ MHz); 4) *onde corte* ($\lambda = 100 - 10$ m, $\nu = 3 - 30$ MHz); 5) *onde ultracorte* ($\lambda < 10$ m, $\nu > 30$ MHz). Queste ultime, a loro volta, vengono di solito suddivise in *onde metriche, decimetriche, millimetriche* e *submillimetriche* o *micrometriche.* Le onde, con lunghezza d'onda $\lambda < 1$ m ($\nu > 300$ MHz), sono anche dette *microonde* o *ad iperfrequenza.* A causa dei grandi valori di λ, la propagazione delle onde radio può essere considerata da un punto di vista *fenomenologico* senza tener conto della struttura atomica del mezzo, eccetto che per le onde ultracorte, adiacenti ad onde della regione infrarossa dello spettro. Praticamente non si manifestano proprietà quantiche nello studio delle onde radio.

Le radiazioni visibili, infrarossa ed ultravioletta costituiscono la cosiddetta *gamma delle radiazioni ottiche.* L'unione di queste differenti regioni di spettro in una sola è determinata non solo dal fatto che queste regioni so-

no contigue, ma anche dalla somiglianza dei metodi e degli strumenti utilizzati per il loro studio; sia metodi che strumenti furono elaborati nel corso di un lungo periodo di sviluppo dell'ottica soprattutto per lo studio della luce visibile (lenti e specchi per la focalizzazione della luce, prismi, reticoli di diffrazione, strumenti interferometrici per lo studio della composizione spettrale delle radiazioni, ecc.). Lo *spettro ottico* si estende dalla frontiera convenzionale delle radiazioni infrarosse ($\lambda = 2$ mm, $\nu = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ Hz) alla frontiera convenzionale delle onde ultraviolette ($\lambda = 10^{-6}$ cm $= 10$ nm, $\nu = 3 \cdot 10^{16}$ Hz); quest'estensione è di circa 18 ottave [1]. La regione delle radiazioni visibili si estende su circa una ottava ($\lambda =$ da 400 a 760 nm), quella dell'ultravioletto si estende su 5 ottave ($\lambda =$ da 10 a 400 nm) e quella dell'infrarosso su 11 ottave ($\lambda =$ da 760 nm a 2 mm). Nella gamma ottica, le frequenze ν sono confrontabili con le frequenze proprie degli atomi e delle molecole, e le lunghezze d'onda sono dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni molecolari e delle distanze intermolecolari. A causa di ciò in questa gamma ottica si deve tener conto dei fenomeni dovuti alla struttura atomica delle sostanze. Per la stessa ragione, insieme con le proprietà ondulatorie, si manifestano anche proprietà quantiche della luce. L'energia di un quanto di luce è definita dall'espressione

$$\mathscr{E} = h\nu, \tag{1.1}$$

dove $h = 6{,}63 \cdot 10^{-27}$ erg · s è la *costante di Planck*. Osserviamo che per la lunghezza d'onda $\lambda = 1000$ nm l'energia di un corrispondente quanto è $\mathscr{E} = 1{,}23$ eV, circa un elettronvolt. Ai bordi della regione dello spettro visibile ($\lambda_r = 760$ nm, $\lambda_v = 400$ nm) per l'energia di un quanto la formula (1.1) dà $\mathscr{E}_r \approx 1{,}6$ eV, $\mathscr{E}_v \approx 3$ eV.

Nella regione dei raggi X e gamma sono predominanti le *proprietà quantiche delle radiazioni*. I raggi X si ottengono sia per rallentamento di particelle cariche rapide (elettroni, protoni, ecc.) sia come prodotto di processi che si svolgono all'interno dei gusci elettronici degli atomi. I raggi gamma sono il risultato di processi che si svolgono all'interno dei nuclei atomici, in conseguenza del decadimento di particelle elementari, ed anche per rallentamento di particelle cariche rapide. Le energie caratteristiche dei quanti gamma sono dell'ordine di uno o più MeV. Le frontiere tra le regioni delle radiazioni X e gamma possono essere definite solo in modo impreciso. Per fissare le idee si dice che l'energia dei quanti X è compresa tra 20 eV e 1 MeV ($\lambda = 50$-10^{-3} nm), e l'energia dei quanti gamma è superiore a 0,1 MeV ($\lambda < 10^{-2}$ nm).

È da notare che le leggi che caratterizzano le proprietà ondulatorie e quantiche sono le stesse in tutto lo spettro elettromagnetico, ma a seconda

---

[1] Si dice *ottava* l'intervallo di frequenza tra una frequenza arbitraria ω e la sua armonica 2ω.

della lunghezza d'onda, predominano differenti fenomeni, differenti metodi di studio e differenti applicazioni pratiche. Perciò l'ottica non deve essere considerata come una disciplina scientifica chiusa, che studia una sola regione di spettro separata da altre regioni da frontiere nette. Le leggi ed i risultati scoperti in queste altre regioni si applicano anche alla gamma ottica e viceversa.

L'importanza pratica dell'ottica e la sua influenza sugli altri campi della conoscenza sono estremamente grandi. L'invenzione del telescopio e dello spettroscopio ha permesso all'uomo di conoscere una moltitudine di nuovi fenomeni. L'invenzione del microscopio determinò una vera rivoluzione in biologia. La fotografia ha aiutato e continua ad aiutare quasi tutti i rami della scienza. Uno dei più importanti elementi delle apparecchiature scientifiche è la lente: proprio la lente ha permesso di realizzare il microscopio, il telescopio, lo spettroscopio, la macchina fotografica, il cinema, la televisione, ecc. Senza le lenti non ci sarebbero occhiali e molte persone d'età avanzata non avrebbero la possibilità di leggere ed effettuare altri lavori connessi con la vista.

L'ottica fisica studia molti fenomeni che sono intimamente legati a fenomeni studiati in altri rami della fisica; i metodi di studio ottici sono tra i più precisi e sofisticati e vengono largamente applicati. Pertanto non ci deve sorprendere il fatto che l'ottica per lungo tempo svolse un ruolo importante in ricerche fondamentali e nello sviluppo di concetti fisici fondamentali. Indichiamo semplicemente che le due teorie fisiche fondamentali elaborate nel XX secolo, la teoria della relatività e la teoria quantistica, sono nate e si sono sviluppate sulla base di ricerche ottiche. L'invenzione dei laser ha aperto enormi prospettive non solo in ottica, ma anche nelle sue applicazioni nei diversi rami delle scienze e della tecnica.

§ 2. *Ottica geometrica*

1. I più semplici fenomeni ottici, ad esempio la formazione di ombre e di immagini nei dispositivi ottici, possono essere descritti nel quadro della cosiddetta *ottica geometrica*. L'ottica geometrica è fondata su quattro leggi sperimentali : 1) *la legge della propagazione rettilinea della luce*; 2) *la legge della propagazione indipendente dei fasci luminosi*; 3) *la legge della riflessione*; 4) *la legge della rifrazione*. Per comprendere fenomeni più complicati è necessario introdurre l'*ottica fisica* che considera questi fenomeni in relazione con la *natura fisica della luce*. In particolare, l'ottica fisica permette di dedurre tutte le leggi dell'ottica geometrica ed anche di stabilire i *limiti della loro validità*. Senza conoscere questi limiti, l'applicazione formale delle leggi dell'ottica geometrica può, in casi concreti, condurre a risultati in contraddizione con i fenomeni osservati. Pertanto non ci si può limitare ad una costruzione puramente formale dell'ottica geometrica, ma si

deve considerarla come un *ramo dell'ottica fisica*. La motivazione dell'ottica geometrica sarà trattata gradualmente nel nostro Corso di ottica e per il momento procediamo enunciando le quattro leggi sperimentali menzionate sopra.

2. Secondo la legge della propagazione rettilinea, *la luce in un mezzo omogeneo trasparente si propaga lungo rette*. Questa legge è dimostrata sperimentalmente dall'esistenza di ombre proiettate da corpi opachi illuminati da sorgenti di luce puntiformi, cioè da sorgenti le cui dimensioni sono molto piccole rispetto al corpo illuminato ed alla distanza da questo corpo. L'oggetto opaco *AB* (fig. 1) posto sul tragitto di un fascio luminoso emesso dalla sorgente puntiforme *S* non permette alla luce di passare nella regione di spazio che si trova dietro l'oggetto, regione delimitata dalla superficie la-
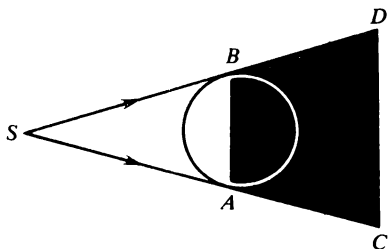
Fig. 1
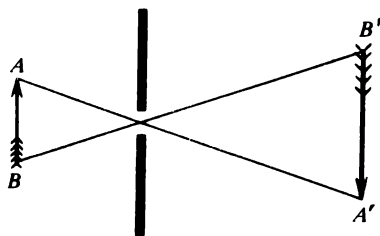
Fig. 2

terale del cono *SCD* che tocca i bordi dell'oggetto *AB*. Ma la presenza dell'oggetto *AB* non esercita alcuna influenza sulla ripartizione della luce fuori dello spazio delimitato dal cono *SCD*. Ciò significa appunto che la propagazione della luce è rettilinea [1]. Un'altra dimostrazione della propagazione rettilinea della luce è fornita dal ben noto metodo di produzione delle immagini di oggetti luminosi in una camera avente una piccola apertura (camera oscura, fig. 2).

Si osservano scarti dalla legge della propagazione rettilinea della luce. Consideriamo, ad esempio, l'ombra proiettata dal bordo di un oggetto opaco. Se la sorgente luminosa è puntiforme, allora, secondo questa legge, ci si deve aspettare che sullo schermo si ottenga una frontiera netta tra la zona oscura e la regione chiara. In realtà esiste una zona di transizione nella quale il grado d'illuminazione varia in modo continuo e non monotono: qui si osservano «frange di diffrazione». Una situazione analoga ha luogo

---

[1] Una sorgente estesa si comporta come un insieme di sorgenti puntiformi a ciascuna delle quali corrisponde una propria distribuzione di campo luminoso sopra lo schermo. In conseguenza della sovrapposizione di queste immagini, insieme con le ombre vi sono zone di semiombra, cioè zone di transizione dalle parti illuminate dello schermo a quelle assolutamente oscure.

nel caso d'una camera oscura a piccola apertura. Se l'apertura non è sufficientemente piccola, l'immagine è sfocata, poiché la sorgente luminosa è rappresentata da una macchia illuminata. Ci si potrebbe aspettare che, diminuendo l'apertura le dimensioni del cerchio diminuiscano e la nettezza dell'immagine aumenti, benché l'immagine stessa diventi meno luminosa. In realtà esiste un limite di riduzione dell'apertura, oltre il quale la nettezza dell'immagine comincia di nuovo a diminuire sempre più. Quando l'apertura è $\sim 10^{-3}$ mm e la sorgente luminosa è puntiforme, si ottiene un grado d'illuminazione praticamente uniforme dello schermo.

Gli esempi citati mostrano che la luce, analogamente al suono, contorna gli ostacoli che si trovano sul suo cammino. Questo fenomeno è detto *diffrazione.*

Se il mezzo di propagazione è torbido, come ad esempio la nebbia, allora a causa della diffrazione la propagazione rettilinea della luce è accompagnata da *dispersione.*

3. La legge della propagazione indipendente dei fasci luminosi afferma che *la propagazione di ogni fascio luminoso in un mezzo non dipende assolutamente dalla presenza in esso di altri fasci luminosi.* Un fascio luminoso che ha attraversato una certa regione di spazio, esce da questa regione inalterato, indipendentemente dal fatto che la regione sia attraversata da altra luce o no. Per esempio, l'immagine che si forma sulla retina dell'occhio non si modifica se la luce, alla quale è dovuta quest'immagine, attraversa fasci luminosi trasversali che non raggiungono l'occhio. I limiti di validità della legge della propagazione indipendente dei fasci luminosi saranno precisati in relazione con la teoria della luce (si veda §§ 3, 5 e cap. XI).

La legge dell'indipendenza dei fasci luminosi deve essere completata dalla proposizione relativa all'azione simultanea di fasci luminosi sovrapposti. Secondo questa proposizione *l'illuminazione di uno schermo, prodotta da parecchi fasci luminosi, è uguale alla somma delle illuminazioni dovute ad ogni singolo fascio.* La validità di questa proposizione viene meno nei fenomeni d'*interferenza della luce.*

4. Le leggi della propagazione rettilinea e dell'indipendenza dei fasci luminosi ci portano al concetto di *raggio luminoso. Nel senso matematico del termine, un raggio è la retta lungo la quale si propaga la luce.* Questa è un'astrazione matematica. *Dell'esistenza di un raggio in questo senso si può parlare solo in quanto esso fa parte di un fascio luminoso* contenente un'infinità di raggi luminosi. I raggi matematici ed i fasci luminosi infinitamente sottili sono astrazioni, in realtà esistono *fasci di sezione trasversale finita,* tagliati per esempio da diaframmi. Pertanto *nel senso fisico del termine, con raggio luminoso s'intende un pennello luminoso molto sottile ma di sezione finita, il quale può esistere indipendentemente da altri fasci luminosi.* Il raggio fisico, definito da un diaframma, non può essere infinitamente lungo poiché a causa della diffrazione la propagazione della luce è accompagnata dall'aumento delle dimensioni trasversali del raggio, cioè

dal suo allargamento. Più lungo è il raggio, più diverge. Si può parlare di raggio luminoso solo nel caso in cui l'allargamento è piccolo rispetto alle dimensioni trasversali del raggio stesso. Per questo la lunghezza del raggio deve essere inferiore ad un certo limite, la cui grandezza è tanto più grande, quanto più largo è il pennello iniziale (si veda § 6, formula (6.17)).

5. Quando un raggio raggiunge una frontiera piana di separazione tra due mezzi trasparenti, una parte passa nel secondo mezzo (si rifrange) ed una parte ritorna nel primo (si riflette). La legge della riflessione della luce, già conosciuta nella Grecia antica, viene enunciata come segue: *i raggi incidente e riflesso si trovano nello stesso piano con la normale alla frontiera di separazione nel punto d'incidenza* (questo piano è detto piano d'incidenza), *ed inoltre l'angolo d'incidenza φ è uguale all'angolo di riflessione φ'* (fig. 3).

6. La legge della rifrazione fu stabilita sperimentalmente nel 1621 dallo scienziato olandese Snellius (1580-1626), ma pubblicata solo dopo la sua
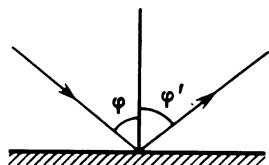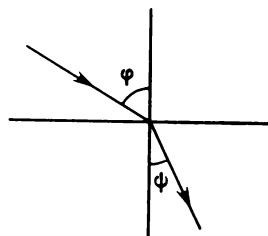
Fig. 3 Fig. 4

morte. Più tardi Cartesio (1596-1650) nel 1637 pubblicò una memoria sulla stessa legge senza menzionare Snellius. Non è possibile affermare, malgrado numerose discussioni, che Cartesio conoscesse i risultati di Snellius. Cartesio stabilì la legge della rifrazione, utilizzando l'analogia tra la rifrazione della luce ed il passaggio di una palla elastica attraverso la frontiera di separazione tra l'aria e l'acqua. Benchè i suoi ragionamenti fossero vaghi e non convincenti, il risultato finale è corretto.

Secondo la legge della rifrazione di Snellius, *il raggio rifratto si trova nel piano d'incidenza, ed il rapporto tra il seno dell'angolo d'incidenza φ* (fig. 4) *ed il seno dell'angolo di rifrazione ψ, per mezzi dati, dipende solo dalla lunghezza d'onda della luce e non dipende dall'angolo d'incidenza, cioè*

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{21}. \tag{2.1}$$

La costante n_{21} è detta *indice di rifrazione relativo del secondo mezzo rispetto al primo. L'indice di rifrazione di un mezzo rispetto al vuoto si dice*

indice di rifrazione assoluto di questo mezzo; lo indicheremo con la lettera n a cui daremo indici convenienti. Ad esempio, n_1 è l'indice di rifrazione del primo mezzo ed n_2 quello del secondo. Per brevità la grandezza n è di solito detta indice di rifrazione di un mezzo, cioè viene omesso l'aggettivo «assoluto».

L'indice di rifrazione relativo n_{21} è legato agli indici assoluti n_1 e n_2 dalla relazione

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{2.2}$$

Questa relazione può essere ottenuta mediante un passaggio al limite. Supponiamo che un raggio luminoso incida dal vuoto su una lamina a facce piane e parallele con indice di rifrazione n_1, e poi passi in un mezzo avente indice di rifrazione n_2 (fig. 5). Per rifrazione sulle frontiere della lamina, si
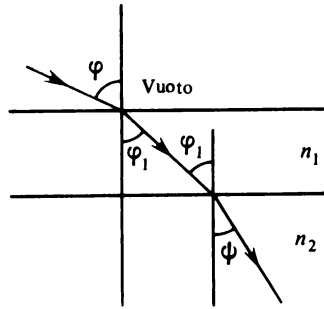
Fig. 5

può scrivere

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} = n_1, \qquad \frac{\sin \varphi_1}{\sin \psi} = n_{21}.$$

Moltiplicando le uguaglianze scritte, otteniamo

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{21} n_1. \tag{2.3}$$

Questa relazione è valida quale che sia lo spessore della lamina. Essa resta valida anche nel caso limite, quando lo spessore della lamina tende a zero; allora la luce sarà rifratta come se non esistesse nessuna lamina. Pertanto deve essere $\sin \varphi / \sin \psi = n_2$. Confrontando questo risultato con il precedente, otteniamo la relazione (2.2).

Il lato debole del ragionamento riportato consiste nel seguente fatto. L'indice di rifrazione è una *caratteristica macroscopica del mezzo.* Quando lo spessore della lamina, che separa i mezzi 1 e 2, diventa dell'ordine delle

dimensioni atomiche, non si può più considerare la lamina come un mezzo continuo, cosicché la nozione di indice di rifrazione perde senso. Tuttavia il risultato finale (2.2) resta corretto, in quanto è confermato dall'esperienza. Nel seguito, studiando la teoria della riflessione e della rifrazione della luce, questo risultato sarà dedotto da diversi punti di vista (si veda §§ 3, 64).

Tenendo conto della relazione (2.2), la legge della rifrazione può essere scritta nella forma simmetrica

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \psi. \tag{2.4}$$

Dalla formula (2.2) segue anche che

$$n_{21} = 1/n_{12}. \tag{2.5}$$

7. Se $n_{21} < 1$, può risultare che il valore di $\sin \psi$, calcolato formalmente secondo la formula (2.1), sia superiore all'unità, cioè che si abbia $\sin \varphi / n_{21} > 1$. Poiché non esiste un angolo di rifrazione tale da soddisfare questa relazione, non si ha alcun raggio rifratto e la luce si riflette completamente. Questo fenomeno si dice *riflessione totale.* La riflessione totale avviene quando l'angolo di incidenza verifica la condizione $\varphi \geqslant \varphi_0$, dove φ_0 è definito da

$$\sin \varphi_0 = n_{21}. \tag{2.6}$$

L'angolo φ_0 è l'*angolo limite della riflessione totale.* La riflessione totale sarà studiata nel § 66.

8. Se la superficie del corpo sulla quale cadono i raggi luminosi, non è piana ma curva, possiamo mentalmente dividerla in piccoli elementi, tali che ciascuno può essere considerato piano. In questo caso il cammino dei raggi può essere determinato secondo le leggi della riflessione e della rifrazione esposte sopra, eseguendo poi il passaggio al limite di una superficie piana, facendo tendere a zero le dimensioni di ogni elemento. Ma questo procedimento è applicabile solo nel caso in cui la curvatura della superficie è inferiore ad un certo limite, poiché in caso contrario cominciano a manifestarsi scarti alle leggi della riflessione e rifrazione regolari a causa della diffrazione della luce.

Sulle superfici rugose la riflessione e la rifrazione non sono più regolari, ma *diffuse.* Solo grazie a questo la superficie di un corpo diventa visibile. Una superficie assolutamente speculare è invisibile, si possono vedere solo i raggi riflessi, che provengono dalle sorgenti luminose che si trovano davanti allo specchio, cioè si vedono solo queste sorgenti luminose.

Problemi

1. Due specchi piani 1 e 2, inclinati uno rispetto all'altro, formano un angolo diedro α (fig. 6). Un raggio incidente, contenuto nel piano perpendicolare allo spigolo di questo angolo, si riflette prima su uno e poi sull'altro specchio. Mostrare che in conseguenza di queste due

riflessioni il raggio sarà deviato di un angolo δ il cui valore non dipende dalla direzione della luce incidente. Calcolare l'angolo δ.

Soluzione. Come si vede dal triangolo ABD, $\delta = 2(\varphi_1 + \varphi_2)$, e dal triangolo ABC segue che $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha$, pertanto $\delta = 2\alpha$. Il risultato è valido per α qualsiasi e qualsiasi direzione della luce, con la convenzione che l'angolo α sia misurato rispetto allo specchio 1, ruotando verso lo specchio 2, e l'angolo δ rispetto alla direzione del raggio incidente s_1 verso la direzione s_2 del raggio emergente.

2. Mostrare che un raggio luminoso, che si riflette successivamente su tre specchi mutuamente perpendicolari, cambia di senso.
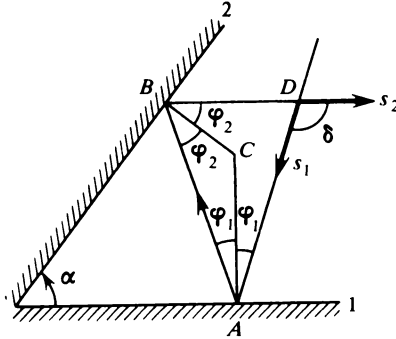
Fig. 6

Soluzione. Siano s_0, s_1, s_2, s_3 i vettori unitari dei raggi incidente e riflesso, e N_1, N_2, N_3 le normali unitarie alle superfici riflettenti degli specchi. Si ha allora

$$s_1 - s_0 = -2(N_1 s_0)N_1,$$
$$s_2 - s_1 = -2(N_2 s_1)N_2,$$
$$s_3 - s_2 = -2(N_3 s_2)N_3.$$

Moltiplicando scalarmente per N_2 e N_3 si ottiene dalla prima equazione

$$(N_2 s_1) = (N_2 s_0), \quad (N_3 s_1) = (N_3 s_0).$$

Analogamente, la moltiplicazione scalare della seconda equazione per N_3 dà

$$(N_3 s_2) = (N_3 s_1) = (N_3 s_0).$$

Sommando membro a membro le tre equazioni e tenendo conto delle relazioni ottenute, si ottiene

$$s_3 - s_0 = -2(N_1 s_0)N_1 - 2(N_2 s_0)N_2 - 2(N_3 s_0)N_3 = -2s_0,$$

da cui $s_3 = -s_0$.

Il risultato ottenuto è utilizzato nella costruzione del riflettore ad angolo, applicato alla inversione del senso di propagazione della luce. Un riflettore ad angolo può essere costruito tagliando da un cubo di vetro a facce argentate un angolo triedro mediante un piano perpendicolare alla diagonale spaziale del cubo. Ogni raggio penetrato all'interno della piramide così ottenuta attraverso la sua base, dopo aver subìto riflessioni sulle sue tre facce laterali, uscirà attraverso la stessa base con senso di propagazione inverso. Infatti, la rifrazione sulla base della piramide subìta dal raggio incidente non è importante, poiché essa è completamente compensata dalla rifrazione sulla stessa base quando il raggio esce dalla piramide.

3. Un raggio luminoso passa attraverso una serie di mezzi omogenei separati da piani paralleli. Mostrare che la direzione del raggio nell'ultimo mezzo (se il raggio penetra in questo mezzo) dipende solo dall'angolo d'incidenza e dagli indici di rifrazione del primo e dell'ultimo mezzo. In particolare, se gli indici di rifrazione dei mezzi estremi sono uguali, il raggio penetrerà nell'ultimo mezzo parallelamente alla direzione che aveva nel primo mezzo.

4. In un prisma rifrangente (fig. 7) si ha $\hat{C} = \hat{D}$, $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = 2\alpha$. Un raggio luminoso penetra nel prisma attraverso la faccia *BD*, restando nel piano della sezione principale, cioè nel piano perpendicolare agli spigoli rifrangenti del prisma, e poi si riflette successivamente sulle facce *AC* e *AD*, uscendo all'esterno attraverso la faccia *BC*. Mostrare che l'angolo di deviazione δ del raggio emergente rispetto alla direzione incidente non dipende dall'angolo d'incidenza. Calcolare l'angolo δ.
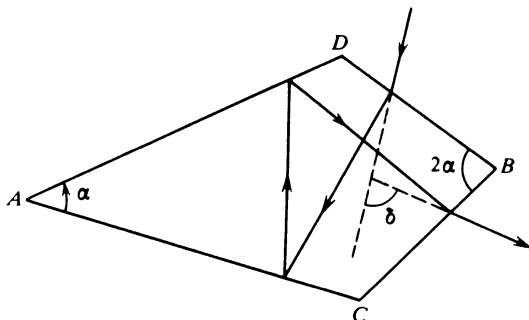
Fig. 7

Risposta. $\delta = 2\alpha$.

5. Studiare la rifrazione di un raggio luminoso nella sezione prinicipale di un prisma triangolare. Calcolare l'angolo di deviazione δ del raggio luminoso rispetto alla sua direzione iniziale ed il suo valore minimo δ_{min}.

Soluzione. Come si vede dal triangolo *CDE* (fig. 8), si ha

$$\delta = (\varphi_1 - \psi_1) + (\varphi_2 - \psi_2).$$

Inoltre, dal quadrilatero *ACFD* i cui angoli *C* e *D* sono retti, abbiamo: $A + F = \pi$, e dal triangolo *CDF* $(\psi_1 + \psi_2) + F = \pi$, cosicché $\psi_1 + \psi_2 = A =$ costante, dove *A* è l'angolo
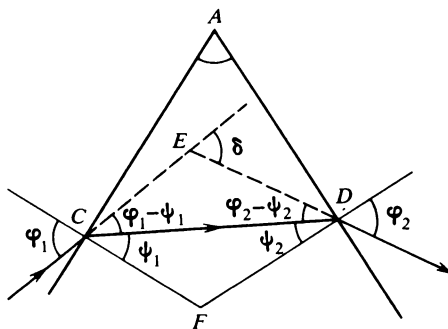
Fig. 8

di rifrazione del prisma. Si ha quindi

$$\delta = \varphi_1 + \varphi_2 - A. \tag{2.7}$$

Per trovare l'angolo di deviazione δ minimo conviene prendere come variabile indipendente l'angolo di rifrazione ψ_1, poiché questo semplifica il problema rendendolo simmetrico. Per la derivata prima otteniamo

$$\frac{d\delta}{d\psi_1} = \frac{d\varphi_1}{d\psi_1} + \frac{d\varphi_2}{d\psi_1} = \frac{d\varphi_1}{d\psi_1} - \frac{d\varphi_2}{d\psi_2},$$

da cui, in base alla legge della rifrazione,

$$\frac{d\delta}{d\psi_1} = n\left(\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1} - \frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi_2}\right). \tag{2.8}$$

Analogamente, per la derivata seconda abbiamo

$$\frac{d^2\delta}{d\psi_1^2} = n\left(\frac{d}{d\psi_1}\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1} - \frac{d}{d\psi_1}\frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi_2}\right) = n\left(\frac{d}{d\psi_1}\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1} + \frac{d}{d\psi_2}\frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi_2}\right) =$$

$$= n\sum_{i=1}^{2}\frac{\sin\psi_i}{\cos^3\psi_i}(n^2\cos^2\psi_i - \cos^2\varphi_i).$$

Se $n > 1$, si ha $d^2\delta/d\psi_1^2 > 0$, e pertanto la curva $\delta = \delta(\psi_1)$ in tutti i punti è concava verso l'alto. Ne segue che l'angolo δ raggiunge un minimo per $\varphi_1 = \varphi_2$, cioè nel caso di un cammino simmetrico del raggio luminoso attraverso il prisma. Non possono esistere altri minimi (ed in generale estremi).

Se il cammino del raggio è simmetrico, si ha $\varphi = 1/2(A + \delta_{min})$, $\psi = 1/2A$, e, quindi,

$$n = \frac{\sin 1/2(A + \delta_{min})}{\sin 1/2A}. \tag{2.9}$$

Su questa formula è basato un comodo procedimento di misura dell'indice di rifrazione.

6. Un raggio luminoso cade sulla faccia laterale di un prisma formando un piccolo angolo d'incidenza. L'angolo di rifrazione A del prisma è piccolo (fig. 8). Calcolare l'angolo di deviazione δ del raggio, limitandosi ai termini di primo grado in A. Calcolare anche l'angolo di deviazione minima δ_{min} a meno di termini dell'ordine di A^3.

Soluzione. $\delta = (\varphi_1 - \psi_1) + (\varphi_2 - \psi_2) \approx (n\psi_1 - \psi_1) + (n\psi_2 - \psi_2) = (n - 1)(\psi_1 + + \psi_2)$, o, in base alla relazione $\psi_1 + \psi_2 = A$,

$$\delta = (n - 1)A. \tag{2.10}$$

In quest'approssimazione l'angolo δ non dipende dall'angolo d'incidenza. Ad approssimazioni superiori, questo risultato non è più verificato. In terza approssimazione troviamo dalla formula (2.9), sviluppando δ_{min} in serie,

$$\delta_{min} = (n - 1)A\left[1 + \frac{n(n + 1)}{24}A^2\right]. \tag{2.11}$$

7. Un procedimento comodo di misura dell'indice di rifrazione dei solidi è il seguente. Una lamina a facce parallele, fabbricata con il materiale in studio, viene esaminata al microscopio. Prima il microscopio è messo a fuoco per osservare la faccia superiore della lamina. Poi il tubo telescopico del microscopio è abbassato, finché non si veda nettamente la faccia inferiore della lamina. (Per facilitare l'osservazione si tracciano dei segni sulle due facce della la-

mina.) Mostrare che se lo spostamento del tubo telescopico è uguale a h e lo spessore della lamina è l, l'indice di rifrazione del materiale è dato dalla formula

$$n = l/h.$$

Questo procedimento può essere applicato per misurare anche gli indici di rifrazione dei liquidi.

§ 3. *Evoluzione delle idee sulla natura della luce*

1. Pitagora (verso gli anni 580-500 a.C.) pensava che gli oggetti diventassero visibili grazie all'emissione di piccolissime particelle che colpiscono l'occhio dell'osservatore. Cartesio riteneva che la luce fosse una compressione che si propaga in un mezzo perfettamente elastico (etere universale) che riempie tutto lo spazio, ivi compresi gli interstizi esistenti tra le particelle. Ma Cartesio non riuscì ad applicare in modo conseguente questa concezione alla sua teoria della rifrazione, utilizzando invece la concezione corpuscolare della luce. Hooke (1635-1703) riteneva che la luce fosse composta da impulsi di compressione propagantisi istantaneamente o con velocità molto grandi. (La velocità della luce fu determinata solo nel 1676 da Ole Römer (1644-1710) dalle osservazioni della ecclissi dei satelliti di Giove.) Alcuni anni prima di Hooke, il monaco ceco Marci (1595-1667) ed il monaco italiano Grimaldi (1618-1663) arrivarono a concludere che la luce era costituita da onde che si propagano a grande velocità. Queste differenti idee sulla natura della luce furono sistematizzate e sviluppate da una parte da Isaac Newton (1642-1727) e, dall'altra parte, da Christian Huygens (1629-1695).

Le opere principali di Newton sull'ottica sono state regolarmente presentate alla Royal Society of London (1671-1675) e pubblicate nelle opere di questa Società. Il contenuto di queste comunicazioni, insieme con altre ricerche di ottica, è conosciuto dalle *Lezioni d'ottica* che Newton tenne a Cambridge negli anni 1669-1671. Più tardi (nel 1704) fu pubblicato il famoso *Trattato d'ottica* in cui Newton esponeva i risultati sperimentali e tendeva, come nelle altre ricerche di fisica, a separare i fatti indubbi dalle ipotesi incerte. Fino al XIX secolo le ricerche sperimentali di Newton in ottica non furono superate. Il suo *Trattato d'ottica* era il libro di riferimento sul quale erano fondati tutti i corsi e manuali d'ottica. (Le *Lezioni d'ottica* sono state pubblicate dopo la morte di Newton e per varie ragioni sono restate quasi ignote.) Quanto alla natura della luce, Newton affrontava questo problema in modo molto più circospetto di tutti gli altri scienziati, ivi compreso Huygens. Newton preferiva costruire una teoria puramente fenomenologica, libera da ipotesi arbitrarie. Tutto ciò che concerne la natura fisica della luce venne raccolto nel capitolo finale, contenente 31 « questione ». Qui, dopo aver scrupolosamente considerato diverse possibilità contradditorie,

Newton arrivò alla conclusione che i fatti sperimentali erano più a favore della teoria corpuscolare che non di quella ondulatoria. Proprio per questo, diede, non senza esitazioni, la preferenza alla teoria corpuscolare.

Huygens, nelle sue argomentazioni sulla natura della luce, non era tanto riservato e prudente come Newton. Egli non aveva dubbi sulla natura ondulatoria della luce. Huygens espose la sua concezione sulla natura della luce ad una seduta dell'Accademia delle Scienze di Parigi (1678), e poi in modo più completo nel suo *Trattato della luce* pubblicato nel 1690. In questo volume, per la prima volta nella storia dell'ottica, Huygens cercò di esporre da un unico punto di vista (quello ondulatorio) la propagazione, la riflessione, la rifrazione e la birifrangenza della luce.

2. Passiamo ora ad esporre in modo più dettagliato le teorie corpuscolare ed ondulatoria della luce.

Secondo la teoria corpuscolare, la luce è composta di piccolissime particelle (corpuscoli) emesse dai corpi luminosi. Da questo punto di vista la propagazione rettilinea della luce si riduce semplicemente alla legge di inerzia. Tuttavia per spiegare la legge dell'indipendenza dei fasci luminosi, è necessario supporre che le distanze medie tra i corpuscoli nei fasci luminosi siano tanto grandi, che praticamente i corpuscoli non interagiscono tra loro. I casi d'avvicinamento in cui si manifesta tale interazione, sono molto rari e sfuggono all'osservazione a causa dell'attuale insufficiente precisione dell'apparato sperimentale.

La teoria corpuscolare spiega la riflessione e la rifrazione della luce per mezzo di forze d'attrazione e di repulsione che agiscono sui corpuscoli di luce in uno strato molto sottile adiacente alla superficie di separazione di mezzi differenti, sulla quale incide la luce. All'interno di questo strato superficiale il cammino del corpuscolo luminoso s'incurva ed uscendo dallo strato il corpuscolo si muove nuovamente in modo rettilineo ed uniforme, ma in una direzione diversa. Se il corpuscolo è riflesso, esso ritorna nel primo mezzo con la stessa velocità. Se invece il corpuscolo penetra nel secondo mezzo, il valore dalla sua velocità cambia (figg. 9 e 10). Essendo sottile lo strato, il fenomeno è percepito come se sulla frontiera tra i mezzi avesse luogo una brusca rottura della traiettoria del corpuscolo (come è mostrato nelle figg. 9 e 10 dalle linee tratteggiate).

Per stabilire le leggi quantitative della riflessione e della rifrazione della luce fu necessario ammettere che le forze agenti su un corpuscolo luminoso, negli strati adiacenti alla superficie di separazione di mezzi, siano *normali alla frontiera di separazione.* Queste forze modificano solo le velocità normali dei corpuscoli senza modificare la componente tangenziale. Consideriamo, ad esempio, la rifrazione della luce. Indichiamo con v_1 la velocità del corpuscolo nel primo mezzo e con v_2 quella nel secondo mezzo. Essendo uguali le componenti tangenziali si ha $v_1 \sin \varphi = v_2 \sin \psi$ (fig. 11), o

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{v_2}{v_1}. \tag{3.1}$$

Questa formula fu stabilita da Newton. *Ne segue che nei mezzi fortemente rifrangenti la velocità della luce deve essere più grande che in quelli meno rifrangenti.* Per dedurre dalla formula (3.1) la legge di Snellius, è necessario supporre che il rapporto delle velocità della luce v_2 e v_1, per corpuscoli luminosi dello stesso tipo, sia costante, cioè sia determinato dalle proprietà dei mezzi 1 e 2 nei quali si muovono i corpuscoli, ma non dipenda da come essi sono arrivati in questi mezzi. Utilizzando il risultato sperimentale per cui la velocità della luce nel vuoto è sempre costante, questa condizione è verificata solo se tutte le forze agenti sui corpuscoli luminosi negli strati limiti ammettono un *potenziale.* (Osserviamo che in questa ipotesi il colore dei corpi può essere spiegato dalla differenza di dimensioni dei corpuscoli.)
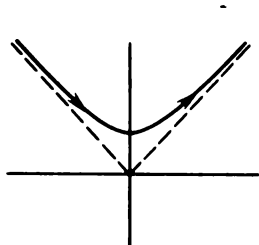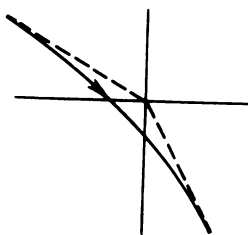
Fig. 9　　　　　Fig. 10

Ma il fatto che la velocità di un corpuscolo luminoso dipenda solo dal mezzo nel quale esso è proiettato e non dal procedimento di proiezione è poco comprensibile dal punto di vista della meccanica classica. Da questo punto di vista la teoria corpuscolare è inferiore alla teoria ondulatoria, poiché in quest'ultima la velocità della luce è una caratteristica naturale *solo del mezzo* nel quale si propaga.

Se le ipotesi introdotte sopra sono corrette, l'indice di rifrazione del mezzo 2 rispetto al mezzo 1 è dato dall'espressione

$$n_{21} = v_2/v_1. \qquad (3.2)$$
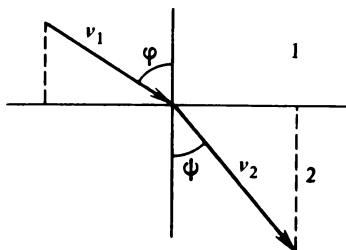
Fig. 11

In particolare, l'indice di rifrazione assoluto viene espresso da

$$n = v/c, \tag{3.3}$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto. Quindi, $n_1 = v_1/c$, $n_2 = v_2/c$, e perciò

$$n_{21} = n_2/n_1, \tag{3.4}$$

che coincide con la formula (2.2). Ma questa circostanza non può essere considerata come un argomento a favore della teoria corpuscolare, poiché la stessa relazione vale anche nella teoria ondulatoria.

3. Secondo la *teoria ondulatoria,* la luce è un fenomeno vibratorio che si propaga *per onde* in un mezzo ipotetico onnipresente, *etere universale* o *luminoso,* che riempie tutto lo spazio. Se le vibrazioni delle particelle d'etere sono *piccole,* le equazioni che descrivono la propagazione delle onde saranno *lineari ed omogenee.* In questo caso è valido il *principio di sovrapposizione delle onde* che, nella teoria ondulatoria, è l'espressione matematica della legge dell'indipendenza dei fasci luminosi.

Questa teoria ha incontrato grandi difficoltà per spiegare la propagazione rettilinea della luce. Huygens ha applicato a questo problema il principio che porta il suo nome. Se gettiamo nell'acqua una pietra, dal punto di caduta si espandono sulla superficie dell'acqua delle onde sotto forma di perturbazioni circolari. Questo processo continua anche dopo che la pietra raggiunge il fondo, cioè quando è cessata la causa che ha generato la perturbazione iniziale. Ne segue che la causa diretta del processo di propagazione delle onde non è la pietra, ma la perturbazione iniziale del moto dell'acqua generata dalla pietra. Queste considerazioni hanno suggerito a Huygens l'idea che *ogni punto di una perturbazione ondulatoria è una sorgente di onde sferiche* che si propagano in tutti i sensi. Queste onde sferiche sono state più tardi chiamate *onde di Huygens secondarie* o *elementari.* La perturbazione ondulatoria risultante può essere considerata come una sovrapposizione di onde secondarie. Questa è l'idea del famoso *principio di Huygens* che è valido non solo per le onde luminose, ma per *qualsiasi* processo vibratorio. Nella formulazione riportata questo principio conserva ancora oggi la sua importanza, che si estende largamente al di fuori del quadro relativamente ristretto del problema della propagazione rettilinea della luce. Infatti, il principio di Huygens mostra che in linea di principio si può determinare una perturbazione vibratoria in ogni punto dello spazio, se sono note tutte le onde secondarie che sono state emesse negli istanti anteriori.

Ma Huygens non si era posto un problema tanto generale, e completò la formulazione del suo principio con l'osservazione che le onde secondarie individuali sono troppo deboli e che per questa ragione esse esercitano un'azione notevole solo sul loro *inviluppo.* Con quest'osservazione il principio di Huygens perde la sua generalità e diventa solo un *artificio geome-*

trico per la costruzione approssimata dei fronti d'onda, cioè delle superfici raggiunte dalla perturbazione luminosa. Questo principio diventa così inutilizzabile per il calcolo del campo luminoso ed in particolare per il calcolo della ripartizione spaziale dell'intensità.

4. Rivolgiamo ora l'attenzione alla spiegazione della propagazione rettilinea della luce data da Huygens. Supponiamo che una sorgente luminosa puntiforme S (fig. 12), posta davanti ad uno schermo opaco avente un'apertura AB, emetta un'onda sferica. Se nell'istante t l'onda raggiunge gli orli dell'apertura AB, quest'ultima taglierà dal fronte d'onda un elemento sferico ACB. Costruiamo da ogni punto di quest'elemento, come da un centro, onde secondarie di raggio $c\,dt$. L'inviluppo di tutte queste onde secondarie si arresta sugli orli dell'elemento sferico A_1B_1, all'infuori del quale potranno penetrare solo singole onde secondarie. L'azione di queste onde, secondo l'ipotesi di Huygens, è trascurabilmente piccola, e perciò il
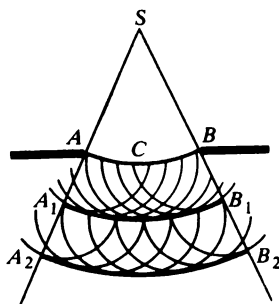
Fig. 12

fronte d'onda della perturbazione all'istante $t + dt$ si limita solo all'elemento sferico A_1B_1. Partendo da questo fronte d'onda, si può mediante la stessa costruzione trovare il fronte d'onda A_2B_2 corrispondente ad un istante successivo. La costruzione mostra che la perturbazione vibratoria è limitata dalla superficie laterale del cono determinato dal vertice S e dal diaframma AB ; questo dimostra la propagazione rettilinea della luce.

Il ragionamento di Huygens è privo di una vera forza dimostrativa, in quanto dimostra solo ciò che in sostanza è presente nelle ipotesi iniziali. La costruzione stessa di Huygens è solo *uno degli artifici che possono essere utilizzati per costruire un fronte d'onda,* conforme all'idea della propagazione rettilinea della luce. La spiegazione data da Huygens è applicabile solo alle onde luminose e non lo è alle onde sonore che, come è noto, contornano gli ostacoli messi sul loro cammino.

Non ci si deve quindi sorprendere se Newton trovò che questa spiegazione non era soddisfacente. D'altra parte né Newton né lo stesso Huygens sapevano come spiegare con la teoria ondulatoria il fenomeno della pola-

rizzazione della luce, scoperto da Huygens in esperimenti sulla birifrangenza. Di fatto nessuna spiegazione è possibile se si considera, come Huygens, che la luce sia costituita da onde longitudinali; la fisica di quel tempo conosceva solo onde di questo tipo e non concepiva neppure la possibilità dell'esistenza di onde trasversali. Newton valutò queste considerazioni talmente importanti da indurlo ad optare per una teoria corpuscolare.

Il problema della propagazione rettilinea della luce è un *caso particolare del problema della diffrazione* e può essere pienamente risolto solo nel quadro della teoria della diffrazione della luce. La diffrazione della luce venne scoperta da Grimaldi e più tardi, in modo indipendente, da Hooke. Newton ha consacrato molto tempo alle ricerche sperimentali sulla diffrazione; al contrario Huygens, nel suo *Trattato della luce* ha completamente
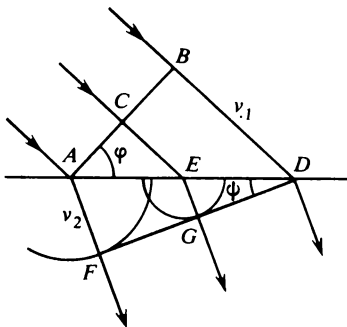
Fig. 13

trascurato questo fenomeno, senza mai sollevare dubbi sul carattere periodico dei processi luminosi (a differenza di Newton, che per primo mise in evidenza questo fatto). Huygens scrive che la luce, come il suono, si propaga sotto forma di *superfici sferiche,* che chiamò *onde,* insistendo sul fatto che gli urti, che eccitano le perturbazioni luminose nei centri delle onde, sono perfettamente disordinati, e perciò le onde non si susseguono a intervalli regolari. Sotto questo aspetto le affermazioni di Huygens aderiscono alle concezioni di Cartesio e di Hooke. La nozione di lunghezza d'onda non compare mai nella teoria di Huygens e senza questo è impossibile stabilire sotto quali condizioni (approssimativamente) sia verificata la legge della propagazione rettilinea della luce.

5. Passiamo ora alla questione della riflessione e della rifrazione della luce nella teoria ondulatoria di Huygens. Supponiamo che un'onda piana cada sulla superficie di separazione di due mezzi. Ad un certo istante il fronte d'onda AB raggiunge la superficie di separazione dei mezzi nel punto A (fig. 13), e da A cominciano a propagarsi onde secondarie di Huygens: una nel primo e l'altra nel secondo mezzo. I punti E e D emettono onde analoghe un po' più tardi. Secondo il principio di Huygens, la sovrapposi-

zione di queste onde secondarie implica nel primo mezzo la formazione di un'onda *riflessa* e nel secondo mezzo di quella *rifratta*. L'inviluppo *FGD* nel secondo mezzo è una superficie piana che costituisce il fronte d'onda dell'onda rifratta. In modo analogo viene costruito il fronte d'onda dell'onda riflessa (nella fig. 13 questo fronte non è rappresentato). Tale è l'interpretazione della riflessione e della rifrazione della luce nella teoria ondulatoria di Huygens. Quest'interpretazione non rivela il meccanismo dettagliato di formazione delle onde riflessa e rifratta. A questo scopo sarebbe necessario utilizzare in modo esplicito la natura fisica delle onde luminose, della quale nella teoria di Huygens non si dice niente.

Le leggi geometriche della riflessione e della rifrazione *non dipendono* però *assolutamente* dalla natura fisica delle onde e dal meccanismo concreto di riflessione e di rifrazione. Queste leggi sono le stesse in tutte le teorie vibratorie. Infatti, un'onda incidente eccita una perturbazione propagantesi lungo la frontiera di separazione dei mezzi con una velocità $AD = BD/\sin\varphi = v_1/\sin\varphi$ (a condizione di utilizzare delle unità di misura adeguate), dove v_1 è la velocità della luce nel primo mezzo. Ma le onde riflessa e rifratta sono eccitate dall'onda incidente e perciò si propagano insieme con quest'ultima lungo la frontiera di separazione con la stessa velocità. Quindi, si può anche scrivere che $AD = v_1/\sin\varphi' = v_2/\sin\psi$, dove v_2 è la velocità della luce nel secondo mezzo e φ' è l'angolo tra il fronte d'onda dell'onda riflessa e la frontiera di separazione dei mezzi (quest'angolo non è rappresentato nella fig. 13). Si ottiene quindi

$$\frac{\sin\varphi}{v_1} = \frac{\sin\varphi'}{v_1} = \frac{\sin\psi}{v_2}. \tag{3.5}$$

Queste relazioni definiscono le *direzioni dei fronti* delle onde riflessa e rifratta, e poiché in un'onda piana i raggi luminosi sono perpendicolari ai fronti d'onda, le stesse relazioni definiscono anche le *direzioni dei raggi riflessi e rifratti*. È facile vedere che φ è l'angolo d'incidenza, φ' l'angolo di riflessione e ψ rappresenta l'angolo di rifrazione. Dalla formula (3.5) segue che $\varphi = \varphi'$ (legge della riflessione) e

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{(legge di rifrazione)}. \tag{3.6}$$

Contrariamente alla teoria corpuscolare (si veda (3.1)), *la teoria ondulatoria porta alla conclusione che la velocità della luce in un mezzo più rifrangente è inferiore a quella in un mezzo meno rifrangente.* E questa conclusione è valida indipendentemente dalla natura fisica delle onde luminose.

Secondo la teoria ondulatoria l'indice di rifrazione relativo è

$$n_{21} = v_1/v_2, \tag{3.7}$$

e quello assoluto è

$$n = c/v. \tag{3.8}$$

Se ne conclude che questa teoria conduce a risultati opposti a quelli della teoria corpuscolare (3.2) e (3.3). A partire dalle (3.7) e (3.8) si ricava la formula (3.4) la quale è quindi valida sia per la teoria corpuscolare, che per quella ondulatoria.

6. Esiste un'altra differenza nella questione della riflessione e della rifrazione della luce tra le teorie corpuscolare e ondulatoria. L'esperienza mostra che un fascio luminoso, che incontra la frontiera di separazione dei mezzi, si divide in due fasci, riflesso e rifratto (escluso il caso di riflessione totale). Nella teoria ondulatoria l'interpretazione di questo fatto non incontra difficoltà. Ma come interpretarlo dal punto di vista della teoria corpuscolare? Un corpuscolo si comporta sempre come un intero, e non può dividersi in due parti, una delle quali viene riflessa e l'altra passa nel secondo mezzo. Tuttavia se così fosse i fasci incidente, riflesso e rifratto sarebbero colorati in modo diverso. Per superare questa difficoltà Newton ha introdotto l'idea che il corpuscolo di luce possa trovarsi periodicamente in due stati diversi, uno *di facile riflessione* ed uno *di facile trasmissione* («*teoria degli accessi*»). Se il corpuscolo, che arriva sulla superficie di separazione, è in un «accesso» (stato) di facile riflessione, viene respinto e quindi riflesso. Se invece il corpuscolo è nell'«accesso» di facile trasmissione, viene attirato dalla superficie e passa nel secondo mezzo.

L'idea degli «accessi», come ha osservato Ja.I. Frenkel (1894-1952), ricorda le concezioni moderne dei *quanti di luce* o *fotoni*. Secondo queste concezioni, la riflessione e la trasmissione dei fotoni attraverso una frontiera sono regolate da *leggi statistiche*: esiste una certa probabilità che il fotone sia riflesso ed una certa probabilità che esso penetri nel secondo mezzo. Newton evidentemente non poteva chiarire il meccanismo fisico degli accessi di facile riflessione e di facile trasmissione, ma si domandava se questi accessi sono o no la conseguenza della reazione di onde rapide eccitate nel mezzo dai corpuscoli di luce incidente. L'idea degli accessi veniva imposta a Newton anche dalla *periodicità dei processi luminosi,* osservata nello studio del fenomeno d'interferenza noto sotto il nome di *anelli di Newton.* Newton cercava di spiegare questa periodicità, integrando la teoria corpuscolare con concezioni ondulatorie.

7. I fisici del XVIII e dell'inizio del XIX secolo, dimenticando i dubbi e le esitazioni di Newton, hanno adottato la teoria corpuscolare della luce. I sostenitori della teoria ondulatoria erano estremamente pochi, ma tra questi Eulero (1707-1783), Lomonosov (1711-1765) e Franklin (1706-1790), i quali contestavano la teoria corpuscolare ed avanzavano argomenti a favore della teoria ondulatoria della luce. Eulero sosteneva che se la teoria corpuscolare fosse valida, a causa della emissione di radiazione luminosa la massa del Sole dovrebbe diminuire notevolmente e ciò modificherebbe il moto dei pianeti. Franklin diceva che, secondo la teoria corpuscolare, la luce dovrebbe esercitare una pressione sui corpi illuminati, mentre tutti i tentativi di rivelare questa pressione erano stati vani. La debolezza di queste

contestazioni consisteva nel fatto che esse non contenevano stime quantitative degli effetti messi in evidenza. Tra l'altro, secondo le concezioni moderne sul legame tra massa ed energia, la perdita di massa per radiazione nonché il valore della pressione di radiazione non dipendono assolutamente dal carattere corpuscolare o ondulatorio della luce. Queste contestazioni, ed altre analoghe, come ha mostrato lo sviluppo ulteriore della fisica, non potevano risolvere la disputa tra le teorie corpuscolare ed ondulatoria della luce, poiché per questo era necessario disporre di nuovi fatti sperimentali.

8. A partire dal XIX secolo, la situazione comincia a prendere una piega favorevole alla teoria ondulatoria grazie alle ricerche di Young (1773-1829) ed in particolare di Fresnel (1788-1827) i quali hanno sistematicamente studiato i fenomeni d'interferenza e di diffrazione della luce. In base ai concetti ondulatori è stata creata una teoria di questi fenomeni le cui conclusioni e previsioni concordavano completamente con l'esperienza. La spiegazione della propagazione rettilinea della luce era ancorà trattata in questa teoria come un caso particolare. Sono stati scoperti e studiati nuovi effetti e nuovi fenomeni ottici: polarizzazione della luce dovuta alla riflessione (Malus, 1808) ed alla rifrazione (Malus e Biot, 1811), angolo di polarizzazione totale (Brewster, 1815), interferenza dei raggi polarizzati (Fresnel e Arago, 1816), leggi quantitative e teoria della riflessione e della rifrazione della luce (Fresnel, 1821), birifrangenza in un vetro compresso (Brewster, 1815), scoperta di cristalli biassici (Brewster, 1815), leggi e teoria della propagazione della luce nei cristalli biassici (Fresnel, 1821), rotazione del piano di polarizzazione nei cristalli di quarzo (Arago, 1811) e nei liquidi (Biot, 1815; entrambi questi fenomeni sono stati in seguito studiati da Biot, Brewster ed altri). Young (1807) ha misurato sperimentalmente la lunghezza d'onda ed ha costatato che le onde di colore rosso hanno lunghezza d'onda più grande di quella della luce blu e violetta. Quest'ultimo risultato ha fornito una spiegazione sperimentale dei colori della luce, collegando il colore con la lunghezza d'onda luminosa. (Tale spiegazione era stata proposta anche da Eulero, ma senza poter precisare a quale colore, il rosso o il blu, corrispondesse la lunghezza d'onda maggiore.) Young (1817) per primo ha avanzato l'ipotesi che *le onde luminose siano trasversali.* Indipendentemente da Young, anche Fresnel nel 1821 giunse alla stessa conclusione sostenendola con studi sulla polarizzazione della luce e sull'interferenza dei raggi polarizzati. Tutti questi fatti ed in particolare il fenomeno d'interferenza e di diffrazione della luce sono stati interpretati in modo naturale nel quadro della teoria ondulatoria della luce. La teoria corpuscolare non poteva fornire spiegazioni soddisfacenti e negli anni 30 del XIX secolo fu abbandonata.

Un colpo mortale alla teoria corpuscolare nella sua forma newtoniana venne inflitto nel 1850. In quell'anno Fizeau (1819-1896) e Foucault (1819-1868) hanno misurato per la prima volta la velocità della luce in laborato-

rio. Come abbiamo già detto, (si veda ai punti 2 e 5) secondo la teoria corpuscolare la velocità della luce nell'acqua è più grande e secondo quella ondulatoria più piccola, che nel vuoto. Nel 1850 Foucault, ed indipendentemente da lui Fizeau e Breguet, hanno effettuato misure comparative della velocità della luce in questi due mezzi; i risultati ottenuti erano conformi alla teoria ondulatoria della luce. I fisici del XIX secolo considerarono questi risultati come una prova decisiva in favore della teoria ondulatoria, scartando definitivamente la teoria corpuscolare della luce.

9. Tuttavia la teoria ondulatoria non poteva essere considerata completa finché non fosse stata stabilita la *natura fisica delle vibrazioni luminose* (o delle vibrazioni dell'etere universale, come dicevano i fisici del XIX secolo e dell'inizio del XX secolo). Allora si pensava che l'etere universale dovesse obbedire alle leggi della meccanica newtoniana e che ad esso fossero applicabili le nozioni di densità, d'elasticità, di spostamento nello spazio, di velocità, d'accelerazione ecc. Quindi i fisici cercavano di dedurre la struttura e le proprietà dell'etere a partire dai fenomeni osservati e dalle leggi dell'ottica stabilite sperimentalmente. Il carattere trasversale delle onde luminose conduceva ad attribuire all'etere universale le proprietà di un mezzo solido, provocando notevoli difficoltà, in particolare nella questione della riflessione e della rifrazione della luce (per i dettagli si veda § 63). Non è necessario considerare ora tutte queste difficoltà legate al concetto di etere ed i tentativi di superarle. Tutto ciò ha già da tempo perso di attualità e presenta un interesse puramente storico.

Negli anni sessanta del XIX secolo Maxwell stabilì le leggi generali del campo elettromagnetico che l'hanno condotto alla conclusione che *le onde luminose sono onde elettromagnetiche* (si veda volume III, capitolo IV). Questo punto di vista fu confermato dalla scoperta di Faraday nel 1846 della rotazione del piano di polarizzazione della luce in un campo magnetico e dalla coincidenza della velocità della luce nel vuoto con la costante elettrodinamica dimostrata sperimentalmente nel 1856 da Weber e Kohlrausch (si veda vol. III, §§ 51 e 83). Dopo i noti esperimenti di Hertz (1887-1888, si veda vol. III, § 142) la natura elettromagnetica della luce fu rapidamente riconosciuta. Nel primo decennio del XX secolo essa si trasformò da ipotesi a fatto sperimentalmente dimostrato. Le vibrazioni luminose furono identificate con le oscillazioni del campo elettromagnetico e l'ottica diventò una parte della teoria dei fenomeni elettrici e magnetici.

La teoria elettromagnetica della luce eliminò le difficoltà incontrate dalla teoria dell'etere solido elastico. Tuttavia i fisici del XIX secolo accettarono questa nuova teoria solo come una soluzione *simbolica* della questione della natura della luce. Essi la considerarono come uno schema formale le cui equazioni interpretano correttamente le relazioni quantitative tra diverse grandezze e fenomeni, senza che i simboli presenti in queste equazioni avessero ancora ricevuto un'interpretazione fisica soddisfacente. Si supponeva che le equazioni di Maxwell dovessero rappresentare il fondamento matematico di una teoria fisica futura più completa dei fenomeni

elettromagnetici ed ottici ma che esse non costituissero ancora una teoria fisica. Una simile teoria sarebbe stata possibile solo dopo la scoperta delle proprietà meccaniche dell'etere.

Ma queste speranze non si verificarono: l'etere luminoso (o meglio, elettromagnetico) non consentiva di rivelare le sue «proprietà meccaniche». In particolare, risultarono vani i reiterati tentativi di scoprire il moto della Terra rispetto all'etere, cominciati da Michelson (1852-1931) nel 1881. Lo studio dei fenomeni elettrodinamici ed ottici nei mezzi in moto rivelarono invece l'esistenza di altre contraddizioni tra gli esperimenti e la teoria dell'etere. Ciò condusse Einstein (1879-1955) ad elaborare nel 1905 la sua teoria della relatività. L'ipotesi dell'etere [1] meccanico fu abbandonata. Fu scossa la fede nella possibilità di elaborare un «modello meccanico dell'universo» a cui tendevano i fisici del XIX secolo. Lo sviluppo ulteriore della scienza ha condotto i fisici alla convinzione che sia impossibile ridurre tutti i fenomeni della natura alla meccanica. Affermare il contrario vuol dire chiedere l'impossibile alla natura. Perciò, quando la teoria ondulatoria moderna afferma che la luce è costituita da oscillazioni del campo elettromagnetico, questa proposizione non è più considerata come un'asserzione formale, e non ci si aspetta che queste oscillazioni possano essere ricondotte a «qualche cosa di più semplice e più palpabile».

10. Una tappa importante dello sviluppo dell'elettrodinamica maxwelliana fu l'introduzione in essa delle *concezioni atomiche,* il che fu sistematicamente realizzato nella *teoria elettronica* elaborata da H.A. Lorentz (1853-1928). Nella teoria di Maxwell le sostanze venivano caratterizzate da *costanti fenomenologiche*: dalla costante dielettrica, dalla permeabilità magnetica e dalla conduttività elettrica specifica. Nella teoria elettronica queste costanti macroscopiche hanno ricevuto un'interpretazione dal punto di vista atomistico, il che permette di dare una spiegazione di principio, benché incompleta, di numerosi fenomeni elettrodinamici ed ottici (per esempio, della *dispersione* e dell'*assorbimento della luce*). Questa teoria ha permesso di scoprire e di spiegare altri fenomeni (*effetto Kerr, Zeeman, Faraday, Cotton-Mouton, dispersione molecolare della luce,* ecc.).

Ma la fisica classica ed in particolare la teoria elettronica risultarono insufficienti a spiegare i fenomeni *su scala atomica*; fu quindi necessaria l'introduzione di *concezioni quantiche.* La necessità e l'utilità di queste ultime

---

[1] È da notare che il vuoto non contiene alcuna sostanza come essa è intesa dai chimici. Ma il vuoto è la sede di campi fisici (gravitazionale, elettromagnetico, nucleare ecc.). Questi campi sono, insieme con le sostanze chimiche ordinarie, forme differenti della materia. Nel vuoto si possono sviluppare differenti processi fisici, ad esempio, il vuoto può essere *polarizzato,* il che corrisponde alla nascita di coppie elettrone-positrone in campi elettrici intensi. Non vi sarebbero obiezioni di sostanza contro l'utilizzazione del termine « etere » nel senso di portatore delle proprietà fisiche dello spazio « vuoto ». Tuttavia il termine « etere » sottintende e richiama sempre l'idea di un mezzo solido, liquido o gassoso sempre dotato di proprietà meccaniche. Per questa ragione oggi si evita di utilizzare il termine « etere » e si preferisce parlare di « vuoto ».

si rivelarono prima di tutto nello studio della ripartizione dell'energia nello spettro di radiazione del corpo nero, cioè della sua radiazione termica. L'applicazione dei princìpi della fisica classica a questo problema dava risultati in disaccordo con l'esperienza. Alla fine del 1900 Planck (1858-1947) stabilì una formula che dava una ripartizione dell'energia nello spettro del corpo nero conforme all'esperienza. Planck introdusse una concezione completamente estranea alla fisica classica, ipotizzando che l'emissione e l'assorbimento della luce non avvengano in modo continuo ma *per porzioni finite* dette *quanti d'energia*: il valore del quanto è dato dalla formula (1.1). Per risolvere il problema della radiazione di corpo nero Planck fu costretto ad ammettere che sia assorbimento che l'emissione della luce sono *processi statistici*. Cinque anni più tardi Einstein ha mostrato che era necessario applicare questa concezione anche ai *processi elementari*. Secondo Einstein, non solo l'emissione e l'assorbimento della luce, ma anche la *propagazione della luce* nello spazio si effettua per porzioni finite d'energia o quanti di luce, aventi energia ed impulso determinati. In questo modo la vecchia idea di particelle di luce, dette più tardi *fotoni*, riprese vigore.

L'ipotesi dei fotoni permise di chiarire prima di tutto le leggi dell'*effetto fotoelettrico* che restavano incomprese dal punto di vista della teoria ondulatoria classica della luce. L'esistenza dell'impulso dei fotoni venne dimostrata dalla scoperta nel 1923 dell'*effetto Compton* (variazione della lunghezza d'onda che accompagna la diffusione dei raggi X). L'ipotesi dei quanti luminosi permise di comprendere la natura delle *azioni chimiche della luce* e di stabilirne le leggi. Il carattere quantico della radiazione e dell'assorbimento della luce è stato utilizzato da Bohr (1885-1962) per stabilire le leggi che *regolano gli spettri* d'emissione e di assorbimento.

Ma come conciliare la concezione corpuscolare della luce con i risultati degli esperimenti di Fizeau e Foucault (si veda punto 8)? Questi esperimenti smentiscono senza alcun dubbio la teoria corpuscolare di Newton, e pertanto si deve riconoscere che *le concezioni classiche del moto non sono applicabili alle particelle di luce*. L'interferenza e la diffrazione della luce dimostrano che in questi fenomeni la luce si comporta come un'*onda*. L'effetto fotoelettrico, la diffusione Compton dei raggi X ed altri fenomeni dimostrano in modo certo che in questi fenomeni la luce si comporta come se fosse composta da *corpuscoli*. In generale, *i fenomeni che accompagnano la propagazione della luce sono correttamente interpretati nel quadro delle teorie ondulatorie, mentre per descrivere le interazioni della luce e delle sostanze sono necessarie concezioni corpuscolari*. Questa *dualità onda-corpuscolo* deve essere considerata come un fatto sperimentale e pertanto qualsiasi teoria completa della luce non può essere né solo corpuscolare né solo ondulatoria ma mista, *corpuscolare ed ondulatoria*.

Questa situazione paradossale diventò ancor più complessa dopo la scoperta, fatta nel 1927 da Davisson (1881-1958) e Germer (1896-1971), della

diffrazione degli elettroni. Questa scoperta ha mostrato che *le particelle delle sostanze ordinarie possiedono anch'esse proprietà ondulatorie.* Quest'idea venne proposta e sviluppata dal fisico francese De Broglie (nato nel 1892) qualche anno prima della scoperta della diffrazione degli elettroni. Lo sviluppo della meccanica quantistica ha permesso di spiegare parzialmente la situazione paradossale sorta, abbandonando il principio fondamentale della fisica classica, il *principio di causalità nella sua forma deterministica.* Gli studi nel campo della *fisica delle alte energie* (detta anche *fisica delle particelle elementari*) hanno mostrato che se l'energia delle particelle è superiore alla loro energia a riposo, le particelle possono nascere, sparire o trasformarsi le une nelle altre. In questo si comportano quindi come fotoni che possono essere emessi o assorbiti. Nell'elettrodinamica quantica i fotoni sono considerati come *quanti del campo elettromagnetico,* e pertanto nella fisica delle alte energie si può parlare di campo degli *elettroni-positroni,* dei *mesoni,* dei *nucleoni* ecc., i cui quanti sono gli elettroni, i positroni, i mesoni, i protoni, i neutroni ecc. Dunque, la questione della natura della luce diventò una parte del problema più generale della struttura della materia.

§ 4. *Curvatura dei raggi luminosi nei mezzi non omogenei*

1. Nei mezzi non omogenei la nozione di propagazione della luce lungo raggi luminosi viene conservata, ma i raggi stessi diventano *curvilinei.* Infatti, consideriamo un mezzo costituito da strati piani paralleli a indici di rifrazione costanti (fig. 14), ciascuno con valore superiore al precedente. Il raggio luminoso, rifrangendosi sulle frontiere dei vari strati, prende la forma di una linea spezzata. Aumentiamo indefinitamente il numero degli
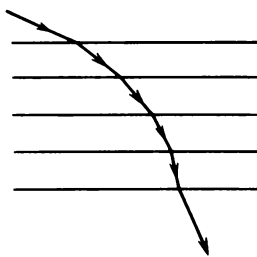
Fig. 14

strati, facendo contemporaneamente tendere a zero i loro spessori e le differenze dei loro indici di rifrazione. Allora al limite l'indice di rifrazione del mezzo varierà nello spazio in modo continuo, ed il raggio si trasformerà in una curva la cui tangente varierà in modo continuo. Supponiamo ora

che l'indice di rifrazione vari nello spazio in modo arbitrario, ma non troppo bruscamente (si veda il seguente paragrafo). Tracciamo in questo mezzo delle superfici aventi lo stesso indice di rifrazione. Considerando elementi di volume sufficientemente piccoli, queste superfici possono essere considerate piane ed il mezzo come composto da strati piani; a questo mezzo è applicabile il ragionamento riportato sopra.

Da quanto detto segue che la forma geometrica del raggio luminoso può essere determinata in modo univoco dalla legge di Snellius con un opportuno passaggio al limite. Tuttavia la legge di Snellius deve valere non solo nella teoria ondulatoria, ma anche in quella corpuscolare di Newton. Pertanto per determinare la forma del raggio luminoso si può ragionare come se la luce fosse composta di corpuscoli newtoniani e l'indice di rifrazione n fosse definito dalla formula (3.3). Visto che la rifrazione dipende dall'indice di rifrazione relativo, si può sostituire l'indice di rifrazione assoluto con una quantità ad esso proporzionale. Per brevità si può semplicemente porre $n = v$. La velocità v dei corpuscoli è definita in modo univoco dall'equazione di conservazione dell'energia, e perciò v può essere considerata come una funzione nota delle coordinate. Dunque, *la traiettoria di un corpuscolo in un campo di forze conservative coincide geometricamente con il raggio luminoso che si propaga in un mezzo* il cui indice di rifrazione n è numericamente uguale a v. Per questo è necessario che le direzioni iniziali di queste due curve siano identiche. Quest'analogia formale tra il moto di un corpuscolo e la propagazione di un raggio luminoso permette di estendere i risultati, ottenuti nell'ottica dei fenomeni luminosi, al dominio della *microscopia elettronica* dove i raggi luminosi sono sostituiti da elettroni che si muovono nei campi elettrici.

Utilizziamo questa analogia per calcolare il raggio di curvatura R di un raggio luminoso. L'accelerazione normale di un corpuscolo è data dalla formula

$$\frac{mv^2}{R} = F_N = -\frac{\partial U}{\partial N},$$

dove F_N è la componente della forza attiva F lungo il vettore unitario della normale principale N, ed U l'energia potenziale del corpuscolo. Derivando rispetto a N l'equazione energetica $1/2mv^2 + U =$ costante, otteniamo $F_N = mv\, \partial v/\partial N$, e pertanto

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial N}.$$

Sostituendo v con n, troviamo l'espressione per la curvatura di un raggio luminoso

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N}(\ln n). \tag{4.1}$$

In queste condizioni l'accelerazione di un corpuscolo e con essa la forza $\boldsymbol{F}$ non hanno componenti lungo la binormale $\boldsymbol{b}$ alla traiettoria, cioè $F_b = -\partial U/\partial b = mv\partial v/\partial b = 0$. Di qui si ha $\partial v/\partial b = 0$ e quindi $\partial n/\partial b = 0$. Quindi, il vettore grad n è contenuto nel piano osculatore del raggio luminoso. Perciò tra tutte le direzioni perpendicolari al raggio luminoso, quella della normale principale N è caratterizzata dalla più forte variazione dell'indice di rifrazione del mezzo. Ciò vuol dire che *in un mezzo non omogeneo il raggio luminoso s'incurva nel senso della più forte variazione dell'indice di rifrazione.* Se il mezzo è omogeneo (n = costante), la curvatura $1/R$ s'annulla, cioè i raggi luminosi sono rettilinei.

2. La densità dell'atmosfera terrestre e quindi anche l'indice di rifrazione diminuiscono con l'altitudine. Ciò permette di spiegare una serie di fenomeni dovuti alla curvatura dei raggi luminosi. A questi fenomeni appartiene, ad esempio, la *rifrazione astronomica,* cioè il rilevamento apparente di un astro dovuto alla presenza dell'atmosfera terrestre. Se l'astro si trova molto alto rispetto alla linea dell'orizzonte, calcolando questo fenomeno non faremo un grande errore supponendo piana la superficie della Terra. Ma non si può utilizzare questa semplificazione se l'astro si trova in prossimità della linea dell'orizzonte; in questo caso è necessario tener conto della sfericità della superficie terrestre.

Trascuriamo i piccoli gradienti laterali dell'indice di rifrazione n dell'aria ed ammettiamo che n dipenda solo dall'altitudine sopra la superficie terrestre o, il che è lo stesso, dalla distanza r dal centro O della sfera terrestre (fig. 15). Il raggio luminoso AM, proveniente da una stel-
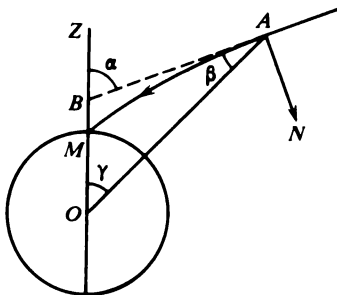
Fig. 15

la data, si troverà in un piano verticale passante per questo astro e per l'occhio dell'osservatore. In base alla formula (4.1) si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\partial}{\partial N}(\ln n) = \frac{d(\ln n)}{dr}\frac{\partial r}{\partial N} = -\frac{d(\ln n)}{dr}\sin\beta,$$

dove α è la cosiddetta *distanza zenitale,* cioè l'angolo variabile tra la verticale MZ del luogo e la tangente al raggio, ed s la lunghezza del raggio misurata a partire dall'occhio dell'osservatore M. Come si vede dalla fig. 15,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dr}\frac{dr}{ds} = \frac{d\alpha}{dr}\cos\beta,$$

e pertanto

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{d}{dr}(\ln n). \qquad (4.2)$$

Inoltre $rd\gamma = ds \sin\beta$, da cui

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\frac{d\gamma}{dr} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dr}\cos\beta = \frac{1}{r}.$$

Sottraendo quest'uguaglianza dalla (4.2) e tenendo conto del fatto che $\alpha - \gamma \approx \beta$, otteniamo

$$\frac{d\beta}{\operatorname{tg}\beta} = -d\ln n - \frac{dr}{r} = -d\ln(nr).$$

L'integrazione di quest'equazione dà

$$nr\sin\beta = n_0 r_0 \sin\alpha_0, \qquad (4.3)$$

dove l'indice zero denota i valori di n, r, α nel punto M (dove $\alpha \equiv \beta$). Calcolando di qui tg β e sostituendo il suo valore nella (4.2), troviamo

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = -n_0 r_0 \sin\alpha_0 \int_{r_0}^{\infty} \frac{d\ln n}{dr}\frac{dr}{\sqrt{n^2r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha_0}}. \qquad (4.4)$$

Qui α_0 è la distanza zenitale apparente dell'astro nel punto M e α_∞ l'angolo tra l'asintoto del raggio e la verticale nello stesso punto. La differenza $\alpha_\infty - \alpha_0$ è detta *rifrazione*. La formula (4.4) serve appunto per il calcolo di questa grandezza. Conoscendo la dipendenza della densità ρ dell'aria dall'altitudine, dapprima si calcola n mediante la formula $(n - 1)/\rho$ = costante, dopo di che si effettua l'integrazione numerica nella formula (4.4).

Se l'astro non si trova troppo vicino all'orizzonte, si può trascurare la curvatura della superficie terrestre. Allora la rifrazione non dipende da come varia l'indice di rifrazione con l'altitudine e può essere calcolata secondo la seguente formula:

$$\sin\alpha_\infty = n_0 \sin\alpha_0 \qquad (4.5)$$

(si veda problema 3 del § 2). L'errore che si commette utilizzando questa formula decresce rapidamente al diminuire di α. Già per $\alpha_0 = 80°$ l'errore è inferiore al 3%. Per $\alpha_0 < 75°$ la formula (4.5) è sufficientemente precisa.

Se l'astro si trova all'orizzonte ($\alpha = 90°$), la rifrazione media a 10 °C e 760 mm Hg è uguale a 35′24″. Essa diminuisce rapidamente all'innalzarsi dell'astro sopra l'orizzonte. Già per $\alpha_0 = 89°$ la rifrazione media decresce fino a 24′37″. A questo fenomeno è dovuta la forma appiattita del Sole all'alba ed al tramonto.

La rifrazione implica un certo allungamento della durata del giorno: alle medie latitudini questo allungamento è uguale in media a 3-4 minuti.

La rifrazione atmosferica dipende dalla lunghezza d'onda e perciò al tramonto del Sole debbono sparire prima i raggi rossi e gialli ed il segmento del Sole ancora visibile deve colorarsi per uno o due secondi in verde o persino in blu. Al contrario, al levar del Sole, prima deve apparire per un breve periodo di tempo una colorazione verde. Quest'effetto di «raggio verde» si osserva sul mare, ma molto raramente, poiché sono necessari un'atmosfera eccezionalmente calma ed un tempo chiaro.

3. A volte in prossimità della superficie terrestre a causa di un forte riscaldamento o raffreddamento si hanno notevoli gradienti dell'indice di rifrazione dell'aria. In queste condizioni si può non tener conto della sfericità della Terra. Se il gradiente n è diretto lungo la vertica-

le, si può utilizzare la formula (4.3) ponendo in essa $\beta = \alpha$, $r = r_0$, il che ci dà

$$n \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0 = \text{costante}. \tag{4.6}$$

Supponiamo per fissar le idee che un raggio luminoso si propaghi verso l'alto formando un piccolo angolo con l'orizzonte, e l'indice di rifrazione $n = n(z)$ diminuisca con l'altitudine z. Può accadere che ad una certa altitudine l'angolo α divenga uguale a 90°. In questo caso la tangente al raggio luminoso diventa orizzontale. L'altitudine $z = h$ alla quale ciò può aver luogo è data dalla relazione

$$n(h) = n_0 \sin \alpha_0.$$

Visto che l'indice di rifrazione aumenta secondo la verticale discendente, dopo aver raggiunto l'altezza $z = h$ il raggio luminoso deve curvarsi verso il basso. A quest'altezza ha luogo quindi un effetto analogo alla riflessione totale (fig. 16). Questo fenomeno può apparire a causa di una ripartizione fortemente anomala della densità dell'aria con l'altitudine e determina diversi *miraggi* osservati nell'atmosfera.

Di solito si osserva un *miraggio superiore* oppure *inferiore*. Nel caso di un miraggio superiore, oltre agli oggetti stessi, si vedono le loro immagini che si trovano al di sopra; nel caso di

Fig. 16

un miraggio inferiore l'immagine si trova al di sotto dell'oggetto stesso. Il miraggio inferiore si osserva nei deserti e nelle steppe durante il tempo caldo quando lo strato d'aria presso il suolo è fortemente riscaldato e la sua densità ed il suo indice di rifrazione aumentano rapidamente con l'altitudine. Da ogni punto dell'oggetto arrivano sempre all'occhio dell'osservatore raggi diretti, cioè raggi che non hanno subìto una riflessione totale nell'aria; a questi raggi corrisponde un'immagine diretta ed usuale dell'oggetto. Ma se i gradienti dell'indice di rifrazione sono grandi, l'osservatore può anche captare dei raggi che hanno subìto una rifrazione totale. Questi raggi danno un'immagine rovesciata dell'oggetto, come quella data da uno specchio (fig. 17). In questo caso i raggi, uscenti da diversi punti dell'oggetto, subiscono una rifrazione totale ad altezze leggermente differenti; il punto M, dove si riflette il raggio uscente da A, si
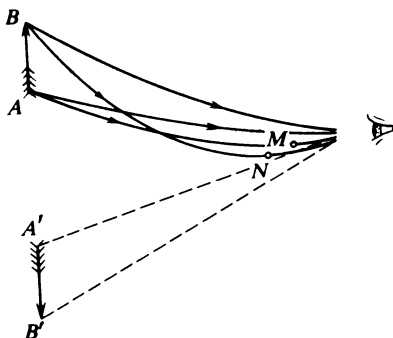
Fig. 17

trova un po' al di sopra del punto N in cui si riflette il raggio uscente da B. L'osservatore vede due immagini, una diretta ed una inversa, e questo crea l'illusione di una superficie d'acqua nella quale come in uno specchio si vede l'immagine del cielo.

In modo analogo si spiega anche il miraggio superiore: esso si osserva durante l'inverno nei paesi freddi quando vicino alla superficie terrestre si forma uno strato freddo d'aria in cui l'indice di rifrazione diminuisce rapidamente con l'altitudine. In alta montagna, benché molto raramente, si può osservare un *miraggio laterale* dovuto alla variazione dell'indice di rifrazione dell'aria in senso laterale. In generale, in dipendenza della distribuzione dell'indice di rifrazione nell'aria, il miraggio si manifesta in forme molto diverse e spesso fantastiche.

Problemi

1. Dimostrare che, trascurando la curvatura della superficie terrestre, è verificata la seguente formula:

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = (n_0 - 1)\,\mathrm{tg}\,\alpha_0. \tag{4.7}$$

2. Determinare i gradienti di temperatura T dell'aria per i quali è possibile un miraggio inferiore.

Soluzione. L'indice di rifrazione, nonché la densità dell'aria ρ debbono aumentare con l'altitudine h (cioè $d\rho/dh > 0$). Utilizziamo l'equazione di stato $\rho = \mu P/(RT)$, dove P è la pressione, μ la massa molecolare relativa dell'aria ed R la costante universale dei gas. Otteniamo da quest'equazione

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dh} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dh} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dh}.$$

In condizioni di equilibrio meccanico dell'aria si ha $dP/dh = -\rho g$, dove g è l'accelerazione di gravità. Otteniamo allora

$$\frac{dT}{dh} < \frac{\mu g}{R}. \tag{4.8}$$

Utilizzando la relazione $c_p - c_v = R/\mu$, a questa relazione si può conferire la seguente forma:

$$\frac{dT}{dh} < -\frac{g}{c_p - c_v} \approx -0{,}025\ \mathrm{K/m}, \tag{4.9}$$

dove c_p e c_v sono i calori specifici dell'aria a pressione ed a volume costanti. Tale ripartizione della temperatura dell'aria è *instabile dal punto di vista della convezione,* poiché per la stabilità di convezione è necessario che sia

$$\frac{dT}{dh} \geqslant -\frac{g}{c_p} \approx -0{,}01\ \mathrm{K/m}$$

(si veda vol II, § 121).

§ 5. *Onde elettromagnetiche piane*

1. Abbiamo già incontrato le onde elettromagnetiche nel capitolo X del III volume del nostro Corso. Deduciamo ancora una volta i risultati principali del § 139 del volume III, supponendo questa volta che le onde siano *monocromatiche.* Rappresenteremo queste onde usando la notazione com-

plessa e raccomandiamo al lettore di rivedere il § 126 dello stesso volume dove sono introdotte le notazioni complesse ed esposte le regole per poterle usare. Per ragioni che saranno precisate più tardi, le onde monocromatiche e la loro forma complessa giocano un ruolo estremamente importante nella teoria delle onde in generale e nell'ottica in particolare.

Supponiamo che le onde si propaghino in un dielettrico omogeneo non carico ed applichiamo le equazioni fondamentali di Maxwell

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5.1}$$

e le equazioni materiali

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}. \tag{5.2}$$

Supponiamo che l'onda sia piana e monocromatica; rappresentiamola in notazioni complesse

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{5.3}$$

dove ω è la pulsazione o frequenza circolare, $\boldsymbol{k}$ il vettore d'onda e le ampiezze $\boldsymbol{E}_0$ e $\boldsymbol{H}_0$ sono costanti. Derivando queste espressioni rispetto al tempo, otteniamo $\partial \boldsymbol{E}/\partial t = i\omega \boldsymbol{E}$, cioè la derivazione si riduce ad una moltiplicazione per $i\omega$. In modo analogo, la derivazione rispetto alle coordinate x, y, z si riduce ad una moltiplicazione per $-ik_x$, $-ik_y$, $-ik_z$. Indicando i vettori unitari delle coordinate con $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ ed $\boldsymbol{e}_z$, otteniamo

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i[\boldsymbol{kH}]$$

ed in modo analogo per rot $\boldsymbol{E}$. Per effetto di queste notazioni le equazioni (5.1) diventano

$$[\boldsymbol{kH}] = -\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}, \qquad [\boldsymbol{kE}] = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}. \tag{5.4}$$

Introduciamo il vettore unitario $\boldsymbol{N}$ della normale al fronte d'onda e la sua velocità di propagazione lungo questa normale, la cosiddetta *velocità normale* v. Si ha allora

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{v}\boldsymbol{N}, \tag{5.5}$$

e le relazioni precedenti si trasformano in

$$\boldsymbol{D} = -\frac{c}{v}[\boldsymbol{NH}], \qquad \boldsymbol{B} = \frac{c}{v}[\boldsymbol{NE}]. \tag{5.6}$$

Queste formule mostrano che i vettori $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{v}$ di un'onda elettromagnetica piana sono mutuamente perpendicolari. La loro reciproca disposizione è rappresentata nella fig. 18. La perpendicolarità dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ al vettore $\boldsymbol{v}$ o, il che è lo stesso, alla direzione di propagazione dell'onda, significa che *le onde elettromagnetiche sono trasversali.* Dunque, il problema del carattere trasversale delle onde luminose, che non era stato risolto dalle diverse teorie dell'etere meccanico, non si pone neppure nella teoria elettromagnetica della luce.

È da notare che tra le componenti mutuamente perpendicolari delle ampiezze complesse $\boldsymbol{E}_0$ e $\boldsymbol{H}_0$ può esistere una certa differenza di fase φ. Se questa differenza è uguale a zero o a π, in tutti i punti dello spazio ed in tutti gli
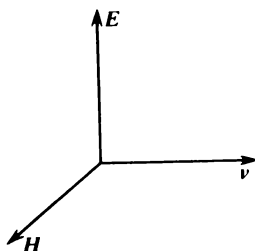
Fig. 18

istanti il vettore $\boldsymbol{E}$ si trova in uno stesso piano passante attraverso la direzione della normale $\boldsymbol{N}$, ed il vettore $\boldsymbol{H}$ è contenuto nel piano perpendicolare al piano contenente $\boldsymbol{E}$. Allora si dice che l'onda è *polarizzata rettilineamente.* Il piano $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{N})$, contenente i vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{N}$, si dice *piano di vibrazione o piano di polarizzazione dell'onda* [1]. Nel caso in cui φ sia diverso da zero o da π, l'onda presenta la cosiddetta *polarizzazione ellittica* che studieremo nei capitoli V, VI e VII.

Le equazioni (5.1) permettono anche di determinare la velocità v dell'onda elettromagnetica. A questo scopo scriviamo queste equazioni nella forma scalare

$$D = \frac{c}{v}H, \quad B = \frac{c}{v}E, \tag{5.7}$$

o

$$\varepsilon E = \frac{c}{v}H, \quad \mu H = \frac{c}{v}E. \tag{5.8}$$

Di qui, moltiplicando membro a membro e dividendo per EH, otteniamo

---

[1] Prima si diceva piano di polarizzazione il piano $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{N})$ perpendicolare a $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{N})$, ma questa definizione è ora poco utilizzata.

per v e per l'indice di rifrazione $n = c/v$ le seguenti espressioni:

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{5.9}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{5.10}$$

L'ultima relazione è detta *legge di Maxwell.* Per i mezzi diamagnetici ($\mu = 1$) questa relazione si trasforma in

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \tag{5.11}$$

Nel vuoto $v = c$, cioè v coincide con la *costante elettrodinamica c.* Questo rivela il profondo significato fisico della scoperta di W. Weber (1804-1891) e di R. Kohlrausch (1809-1858) che per la prima volta hanno misurato questa costante nel 1856 (si veda v. III, §§ 51, 83).

2. Esaminiamo ora le prove sperimentali che confermano la relazione (5.11). Nella tavola 1 sono confrontati i valori di n e di $\sqrt{\varepsilon}$ misurati sperimentalmente per alcune sostanze (gli indici di rifrazione si riferiscono alla riga gialla del sodio). Per i gas riportati in questa tabella la legge di Maxwell (5.11) è in buon accordo con l'esperienza. Per gli idrocarburi liquidi l'accordo è meno buono, mentre per l'acqua, per gli alcoli e per la maggior parte degli altri corpi solidi e liquidi si osservano scarti notevoli dalla legge di Maxwell (5.11). Ma ciò non deve meravigliare poiché i valori di ε riportati nella tavola 1 si riferiscono a *campi elettrici statici,* mentre gli indici di rifrazione n sono determinati dai *campi elettromagnetici delle onde luminose* le cui frequenze sono dell'ordine di $5 \cdot 10^{14}$ Hz. La costante dielettrica ε è dovuta alla *polarizzazione del dielettrico,* cioè allo spostamento delle particelle cariche all'interno degli atomi e delle molecole sotto l'azione di un campo elettrico esterno. Per un confronto corretto è necessario prendere i valori di ε misurati in campi elettrici *di ugual frequenza.* Infatti, gli atomi e le molecole possiedono frequenze proprie, cosicché le ampiezze (e le fasi) delle oscillazioni forzate degli elettroni e dei nuclei, che costituiscono atomi e molecole, dipendono dalla frequenza del campo elettrico applicato. Una dipendenza particolarmente forte deve essere prevista nei casi in cui la frequenza del campo esterno è vicina ad una delle frequenze proprie degli atomi o delle molecole (fenomeno di risonanza!). In conseguenza di ciò compare una dipendenza dell'indice di rifrazione della sostanza dalla frequenza dell'onda luminosa, che porta al fenomeno della *dispersione della luce.*

In modo analogo la magnetizzazione di una sostanza (paramagnetica e ferromagnetica) è prodotta dalle *rotazioni dei momenti magnetici degli atomi e delle molecole* sotto l'azione di un campo magnetico esterno. Ma per campi a frequenze alte, che corrispondono alla regione ottica dello spettro, gli atomi e le molecole non riescono ad eseguire rotazioni in tempi dell'ordine del periodo delle vibrazioni luminose. L'effetto diamagnetico, che in linea di principio è presente in tutte le sostanze, è trascurabilmente piccolo. Pertanto per campi aventi frequenze ottiche non si ha praticamen-

Sostanza	n	$\sqrt{\varepsilon}$	Sostanza	n	$\sqrt{\varepsilon}$
Aria	1,000292	1,000302	Toluene	1,499	1,549
Azoto	1,000299	1,000307	Tetracloruro di carbonio	1,461	1,523
Ossigeno	1,000270	1,000273	Benzene	1,501	1,511
Idrogeno	1,000139	1,000139	Solfuro di carbonio	1,629	1,626
Anidride carbonica	1,000499	1,000485	Paraffina	1,422	1,405
Elio	1,000035	1,000037			
Ossido di carbonio	1,000335	1,000346	Acqua	1,33	9,00
Ammoniaca	1,000385	1,000385	Alcool metilico	1,34	5,7
Ossido nitroso	1,000507	1,000547	Alcool etilico	1,36	5,1

te magnetizzazione delle sostanze. Ecco perché nei fenomeni ottici, a meno di rare eccezioni, non si manifestano le proprietà magnetiche delle sostanze e si può utilizzare la formula (5.11) al posto della formula più generale (5.10).

Quindi gli scarti tra la legge di Maxwell (5.10) o (5.11) ed i dati sperimentali sono dovuti ad una *violazione delle equazioni materiali* (5.2). Queste equazioni non sono sempre verificate e sono valide solo per *campi monocromatici,* poiché ε e μ sono *funzioni della frequenza del campo elettromagnetico,* funzioni che sono diverse per le differenti sostanze. Per sottolineare questa circostanza, le grandezze $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ sono spesso dette *permettività dielettrica e permeabilità magnetica dinamiche* per distinguerle dalle corrispondenti grandezze *statiche* con le quali coincidono per $\omega = 0$. Solo nella regione delle onde elettromagnetiche relativamente lunghe (lunghezze d'onda superiori a 1 cm circa) le funzioni $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ diventano costanti per tutte le sostanze. Pertanto nell'ottica è necessario decomporre il campo elettromagnetico in componenti monocromatiche, il che è sempre possibile in virtù del teorema matematico di Fourier (si veda vol. III, § 128). Supponendo che sia verificato il principio di sovrapposizione, queste componenti monocromatiche si possono considerare *indipendentemente l'una dall'altra.* In tal modo si può studiare la propagazione delle onde elettromagnetiche di composizione spettrale qualsiasi. Le funzioni si possono decomporre non solo in combinazioni di seno e coseno, ma anche in un'infinità di altri «sistemi completi» di funzioni. Ma la verifica delle equazioni materiali (5.2) per campi monocromatici nonché molte altre ragioni fanno sì che in ottica la decomposizione dei campi in componenti monocromatiche sia quella *fisicamente necessaria* tra le molte altre decomposizioni matematicamente possibili. I ragionamenti esposti, nonché quelli riportati nella seguente sezione, hanno una validità generale e non si riferiscono alle onde elettromagnetiche piane soltanto.

3. Affinché le equazioni materiali (5.2) siano verificate (per campi monocromatici) è necessario che la grandezza ε sia indipendente da E. Solo a questa condizione le equazioni del campo sono *lineari ed omogenee.* Ma questa condizione è verificata soltanto per *campi deboli,* cioè nei campi la cui intensità è molto piccola rispetto a quella dei campi intraatomici ed intramolecolari (10^7-10^8 V/cm). Nei *campi forti,* per i quali questa condizione non è verificata, le equazioni di campo nei mezzi *cessano di essere lineari,* questo conduce alla *violazione del principio di sovrapposizione* e, di conseguenza, della legge dell'indipendenza dei raggi luminosi. L'ottica dei campi elettromagnetici deboli (secondo la definizione data sopra) è detta *ottica lineare,* mentre l'ottica dei campi forti costituisce l'*ottica non lineare.*

Fino ad un'epoca molto recente le sorgenti luminose disponibili in ottica permettevano di produrre fasci luminosi d'intensità « debole » i cui campi elettrici massimi avevano intensità da 0,1 a 10 V/cm (si veda il problema alla fine di questo paragrafo). Gli effetti non lineari (con rare eccezioni) in questi casi non si osservano. Il caso di campi elettrici forti è stato considerato nell'ottica puramente ipotetico e per lungo tempo non è stato studiato. A partire dal 1960, anno in cui furono inventati i *generatori quantici ottici* (*laser*) la situazione cambiò. Queste sorgenti luminose permettono di produrre onde luminose nelle quali i campi elettrici raggiungono un'intensità di 10^5 — 10^7 V/cm. Queste intensità di campo non possono più essere considerate piccole rispetto ai campi intraatomici ed intramolecolari. Nei campi elettrici di questa intensità si osservano « *effetti non lineari* » nuovi dal punto di vista qualitativo; questi fenomeni non sono piccole correzioni ad « effetti lineari », ma *fenomeni su grande scala* che hanno già trovato importanti applicazioni pratiche. Dell'ottica non lineare parleremo al capitolo XI, mentre in tutti gli altri capitoli sono esposte questioni di ottica lineare.

4. In certi casi uno studio più dettagliato del sistema di equazioni (5.4) diventa necessario. Scriviamo questo sistema tenendo conto delle equazioni materiali (5.2)

$$[\boldsymbol{kH}] = -\frac{\omega\varepsilon}{c}\boldsymbol{E}, \qquad [\boldsymbol{kE}] = \frac{\omega\mu}{c}\boldsymbol{H}. \tag{5.12}$$

Ricavando H dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima, otteniamo

$$\frac{c}{\omega\mu}[\boldsymbol{k}[\boldsymbol{kE}]] = -\frac{\omega\varepsilon}{c}\boldsymbol{E}.$$

Essendo i vettori $\boldsymbol{k}$ ed $\boldsymbol{E}$ mutuamente perpendicolari, dopo aver calcolato il prodotto vettoriale doppio e diviso il risultato per E, troviamo

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu, \tag{5.13}$$

da cui, se si trascura la magnetizzazione della sostanza,

$$\boldsymbol{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon. \tag{5.14}$$

Questa è la condizione di compatibilità delle equazioni (5.12). Visto che per definizione di vettore d'onda $k = \omega/v$, dalla (5.13) segue che $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, cioè il risultato della (5.9).

Ma le condizioni (5.13) o (5.14) sono verificate anche se il vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ è *complesso,* cioè è della forma

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' - i\boldsymbol{k}'', \tag{5.15}$$

dove i vettori $\boldsymbol{k}'$ e $\boldsymbol{k}''$ sono reali. In questo caso l'onda è detta *non omogenea* a differenza di quella *omogenea* il cui vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ è reale. Il vettore elettrico di un'onda non omogenea può essere rappresentato nella forma

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\boldsymbol{k}''\boldsymbol{r}} e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r})}. \tag{5.16}$$

Quest'espressione può essere considerata come un'onda la cui ampiezza è uguale a $\boldsymbol{E}_0 e^{-\boldsymbol{k}''\boldsymbol{r}}$, decrescente secondo una legge esponenziale lungo la direzione del vettore $\boldsymbol{k}''$. Nel caso di un'onda non omogenea si può parlare di *superfici di uguale ampiezza* e di *superfici di uguale fase.* Le superfici di uguali ampiezze sono piani perpendicolari al vettore $\boldsymbol{k}''$. Le superfici equifasi sono anch'esse piani, ma perpendicolari al vettore $\boldsymbol{k}'$. *In un mezzo isotropo non assorbente le superfici di uguale ampiezza e di uguale fase sono due famiglie di piani mutuamente perpendicolari.* Per dimostrare quest'enunciato, sostituiamo l'espressione (5.15) nella formula (5.14). Separando le parti reale ed immaginaria, troviamo

$$\boldsymbol{k}'^2 - \boldsymbol{k}''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon, \qquad (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'') = 0. \tag{5.17}$$

Dalla seconda relazione segue che i vettori $\boldsymbol{k}'$ e $\boldsymbol{k}''$, e quindi i piani di ugual fase e di uguale ampiezza, sono mutuamente perpendicolari. Per i mezzi assorbenti quest'asserzione, in generale, non è valida.

Per avere un'idea più chiara delle onde non omogenee, rappresentiamole sotto una forma reale. Orientiamo l'asse X lungo il vettore $\boldsymbol{k}'$ e l'asse Z lungo il vettore $\boldsymbol{k}''$. Poniamo inoltre $E_{0x} = A_x \exp(i\delta_x)$ ed analogamente per E_{0y} ed E_{0z}. Allora l'onda non omogenea (5.16) nella forma reale può essere rappresentata come segue

$$\begin{aligned} E_x &= A_x e^{-k''z} \cos(\omega t - k'x + \delta_x), \\ E_y &= A_y e^{-k''z} \cos(\omega t - k'x + \delta_y), \\ E_z &= A_z e^{-k''z} \cos(\omega t - k'x + \delta_z). \end{aligned}$$

I piani equifasi si propagano lungo l'asse X con velocità $v' = \omega/k'$. Questa velocità è inferiore a quella delle onde omogenee $c/\sqrt{\varepsilon}$, poiché

$k' > \omega\sqrt{\varepsilon}/c$, come segue dalla (5.17). L'ampiezza diminuisce nella direzione dell'asse Z. Quando $z \to -\infty$, l'ampiezza di un'onda non omogenea cresce indefinitamente, perciò le onde non omogenee piane non possono esistere in un mezzo illimitato. Ma queste onde possono in certe condizioni apparire in prossimità delle superfici di separazione dei mezzi. Per esempio, tali onde compaiono in un mezzo otticamente meno denso in condizioni di riflessione totale della luce (si veda § 66). Il campo di un'onda non omogenea si osserva solo vicino alla frontiera tra mezzi diversi, in uno strato il cui spessore è dell'ordine della lunghezza d'onda. Per questa ragione le onde non omogenee sono anche dette *onde di superficie.*

Problema

Stimare l'intensità di campo della radiazione solare in prossimità della superficie terrestre, se il valore della costante solare è uguale press'a poco a $2\ \text{cal}\cdot\text{cm}^{-2}\ \text{min}^{-1} = 1{,}39\cdot 10^6\ \text{erg}\cdot\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Si dice *costante solare* la quantità d'energia irradiata dal Sole (ad una distanza media dalla Terra) che colpisce nell'unità di tempo l'unità d'area della superficie terrestre perpendicolare ai raggi solari (in assenza di assorbimento atmosferico).

Soluzione. L'onda emessa dal Sole, in prossimità della superficie terrestre, può essere considerata piana. In quest'onda $E = H$, poiché per il vuoto $\varepsilon = \mu = 1$. La densità di flusso d'energia è $\frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} E^2$. Uguagliando il valore medio di questa grandezza al valore della costante solare, otteniamo

$$\frac{c}{4\pi}\overline{E^2} = 1{,}39\cdot 10^6, \quad \text{da cui} \quad \overline{E^2} = 5{,}85\cdot 10^{-4}, \quad \sqrt{\overline{E^2}} = 0{,}024\ \text{CGSE} = 7{,}2\ \text{V/cm}.$$

§ 6. *Passaggio al limite dall'ottica ondulatoria all'ottica geometrica*

1. L'ottica geometrica rappresenta il caso limite approssimato verso il quale tende l'ottica ondulatoria quando la lunghezza dell'onda luminosa tende a zero. Per dimostrarlo in modo rigoroso, si dovrebbe partire dalle equazioni di Maxwell applicandole a mezzi non omogenei. Ma questo metodo conduce a calcoli molto laboriosi e quindi useremo un metodo più semplice. Prendiamo un mezzo trasparente ed omogeneo e, supponendo dapprima che sia isotropo, eliminiamo dalle equazioni (5.1) e (5.2) il vettore $\boldsymbol{H}$. A questo scopo deriviamo rispetto a t la prima delle (5.1) e prendiamo il rotore dei due membri della seconda equazione, utilizzando la formula vettoriale

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{E} = \text{grad div}\,\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E}\ ^{1)}, \tag{6.1}$$

[1] È facile stabilire questa formula, scrivendo il primo membro nella forma $[\nabla[\nabla\boldsymbol{E}]]$ e sviluppando secondo la regola usuale il prodotto vettoriale. È necessario solo ricordare che non si possono commutare i vettori ∇ ed $\boldsymbol{E}$. Otteniamo dunque $\nabla(\nabla\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E}$, cioè il secondo membro della (6.1).

dove Δ è l'operatore di Laplace in un sistema di coordinate rettangolari, cioè

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (6.2)$$

Dalle relazioni così ottenute si può facilmente eliminare $\boldsymbol{H}$. Si ottiene in definitiva

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad (6.3)$$

dove v è definita dall'espressione precedente (5.9). L'equazione (6.3) è detta *equazione d'onda*. Il vettore $\boldsymbol{H}$ verifica un'equazione della stessa forma.

Nei mezzi non omogenei l'equazione (6.3) diventa più complicata. Ma, se ci interessa *solo l'intensità delle onde,* trascurando la loro *polarizzazione,* constatiamo che nel caso limite dell'ottica geometrica l'equazione (6.3) conduce a risultati corretti [1]. Pertanto persino nel caso di mezzi non omogenei il passaggio all'ottica geometrica può essere realizzato in base alla seguente equazione d'onda:

$$\Delta E - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \qquad (6.4)$$

nella quale E è la lunghezza del vettore $\boldsymbol{E}$ e la velocità v è supposta essere una funzione nota delle coordinate. Benché questo procedimento non sia del tutto soddisfacente, esso permette in modo semplice di chiarire il metodo applicato per giustificare l'ottica geometrica. I risultati ai quali arriveremo, sono applicabili non solo alle onde luminose, ma anche *a tutte le altre onde,* ad esempio, a quelle acustiche o di de Broglie in meccanica quantistica.

2. Supponiamo che l'onda sia monocromatica e scriviamola nella seguente forma:

$$E = a(\boldsymbol{r})e^{i(\omega t - k_0\Phi)}, \qquad (6.5)$$

dove $a(\boldsymbol{r})$ e $\Phi(\boldsymbol{r})$ sono funzioni reali delle coordinate. Il numero d'onda nel vuoto $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$ è introdotto per ragioni di comodità in quanto grande parametro dimensionale. Sostituiamo l'espressione (6.5) nell'equazione (6.4) e separiamo le parti reale ed immaginaria, ottenendo così le seguenti due equazioni:

$$(\text{grad}\,\Phi)^2 = n^2 + \frac{\Delta a}{k_0^2 a}, \qquad (6.6)$$

$$a\,\Delta\Phi + 2\,\text{grad}\,a\,\text{grad}\,\Phi = 0. \qquad (6.7)$$

---

[1] Il passaggio al limite dell'ottica geometrica in base alle equazioni vettoriali di Maxwell è dettagliatamente sviluppato nel seguente libro: D.V. Sivuchin, *Lezioni d'ottica fisica,* parte II, Novosibirsk, 1969 (in russo).

Ammettiamo ora che la lunghezza d'onda sia piccola e che l'ampiezza a vari nello spazio abbastanza lentamente da verificare la disuguaglianza

$$\left|\frac{\Delta a}{k_0^2 a}\right| \equiv \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \ll n^2. \tag{6.8}$$

Questa disuguaglianza è verificata se

$$\left|\lambda \frac{\partial a}{\partial x}\right| \ll a, \qquad \left|\lambda \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| \tag{6.9}$$

per una direzione qualsiasi dell'asse X. Infatti, si ha allora

$$\left|\lambda^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| \ll \left|\lambda \frac{\partial a}{\partial x}\right| \ll a,$$

il che coincide con la (6.8), poiché $|\Delta a| \sim |\partial^2 a/\partial x^2|$. Trascurando l'ultimo termine della (6.6), otteniamo

$$(\text{grad } \Phi)^2 = n^2. \tag{6.10}$$

Le equazioni (6.10) e (6.7) costituiscono appunto il *sistema di equazioni dell'ottica geometrica*. Dalla loro deduzione è chiaro che *la condizione d'applicabilità dell'ottica geometrica è la piccolezza delle variazioni dell'ampiezza dell'onda e delle sue derivate spaziali prime sull'estensione d'una lunghezza d'onda*. In caso contrario possono sorgere scarti notevoli alle leggi dell'ottica geometrica. Ciò avviene per esempio nei seguenti casi: 1) alla frontiera dell'ombra geometrica; 2) in prossimità del fuoco, cioè in prossimità di un punto geometrico di convergenza dei raggi luminosi; 3) quando la luce si propaga in un mezzo dove l'indice di rifrazione varia fortemente (per esempio, mezzi torbidi); 4) quando la luce si propaga nei mezzi fortemente assorbenti (ad esempio, i metalli).

3. Clausius (1822-1888) ha chiamato *iconale* la grandezza Φ ed *equazione dell'iconale* l'equazione (6.10). Quest'equazione può essere scritta nella forma

$$\text{grad } \Phi = n\mathbf{s}, \tag{6.11}$$

dove $\mathbf{s}$ è il vettore unitario della normale al fronte d'onda

$$\omega t - k_0 \Phi = \text{costante}, \tag{6.12}$$

tracciato nel senso della sua propagazione.

L'equazione dell'iconale permette di determinare la velocità di propagazione del fronte d'onda nella direzione della normale $\mathbf{s}$. Infatti, in base alla definizione di gradiente, si può scrivere la (6.11) nella forma $\partial\Phi/\partial s = n$. Dall'altra parte, differenziando l'equazione di propagazione

del fronte d'onda otteniamo $\omega dt = k_0 d\Phi$, da cui

$$\omega dt = \frac{\omega}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\, ds = \frac{\omega}{c}\, n ds = \frac{\omega}{v}\, ds.$$

Di qui per la velocità normale del fronte d'onda troviamo

$$\frac{ds}{dt} = v, \tag{6.13}$$

cioè una velocità uguale a quella dell'onda piana. Questo risultato era prevedibile, poiché un piccolo settore del fronte d'onda su piccoli volumi deve comportarsi come un fronte piano. Il risultato ottenuto permette di costruire il fronte d'onda F_2 nell'istante $t + dt$ se è nota la sua posizione F_1 all'istante t. A questo scopo da ogni punto del fronte d'onda iniziale F_1
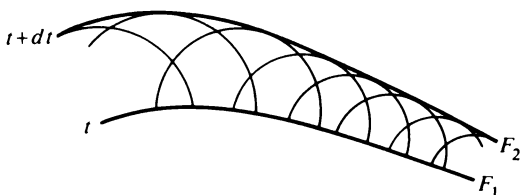
Fig. 19

(fig. 19) si deve tracciare nella direzione della normale un segmento di lunghezza $v\, dt$. Unendo le estremità di tutti questi segmenti, otteniamo il fronte d'onda F_2 all'istante $t + dt$. Si può anche da ogni punto del fronte d'onda F_1, come da un centro, descrivere sfere di raggio $v\, dt$. L'inviluppo di queste sfere costituisce il fronte d'onda F_2. Entrambe le costruzioni sono assolutamente equivalenti, e pertanto la costruzione di Huygens (si veda § 3, p. 4) è valida anche per le onde nei mezzi non omogenei.

4. La seconda equazione dell'ottica geometrica (6.7) può essere ora scritta nella forma

$$a\,\Delta\Phi + 2n\frac{\partial a}{\partial s} = 0. \tag{6.14}$$

Se *il raggio luminoso è definito come la traiettoria ortogonale alla famiglia dei fronti d'onda o a quella delle superfici di uguale fase* (6.12), la derivazione rispetto a s può essere assimilata a una derivazione lungo il raggio s. Integrando l'equazione (6.14) lungo il raggio, troviamo la relazione

$$a = a_0 \exp\left(-\int_0^s \frac{\Delta\Phi}{2n}\, ds\right), \tag{6.15}$$

dove a_0 è l'ampiezza nel «punto iniziale» del raggio a partire dal quale viene misurata la lunghezza s. La formula (6.15) mostra che per calcolare il

campo dell'onda in tutti i punti del raggio è sufficiente conoscere il suo valore in un punto qualsiasi dello stesso raggio. Ma le equazioni dell'ottica geometrica non possono dir niente della variazione dell'ampiezza di campo nel caso di passaggio da un raggio ad un altro, poiché queste equazioni ammettono variazioni qualsiasi d'ampiezza. È necessario che la variazione sia sufficientemente lenta, affinché l'onda che formalmente verifica le equazioni dell'ottica geometrica, sia realizzata realmente. Quindi, *nell'approssimazione dell'ottica geometrica, il campo luminoso di ogni raggio è assolutamente indipendente dai campi di altri raggi.*

Ne segue la principale concezione dell'ottica geometrica secondo la quale *l'energia luminosa si propaga lungo raggi luminosi,* più precisamente lungo «tubi luminosi» formati dai raggi. Ne segue anche che se il fronte d'onda è stato determinato per mezzo della costruzione di Huygens, il nuovo fronte d'onda è limitato dall'inviluppo delle onde sferiche secondarie di Huygens. L'ipotesi di Huygens concernente l'inviluppo delle onde secondarie risulta dunque pienamente giustificata; quest'ipotesi è valida solo nell'approssimazione dell'ottica geometrica.

All'idea della propagazione rettilinea si può arrivare anche per altra via. Moltiplicando l'equazione (6.7) per a e notando che $\Delta\Phi = $ $=$ div grad $\Phi =$ div $(n\mathbf{s})$, riscriviamo quest'equazione nella seguente forma:

$$a^2 \operatorname{div}(n\mathbf{s}) + 2a \operatorname{grad} a(n\mathbf{s}) = 0,$$

ossia

$$\operatorname{div}(na^2\mathbf{s}) = 0. \tag{6.16}$$

La relazione ottenuta per la sua forma coincide con l'equazione di continuità div $\mathbf{j} = 0$ per il flusso stazionario di un fluido incompressibile. Le linee di corrente sono sostituite da raggi luminosi, e la densità di flusso del fluido dal vettore $\mathbf{j} = na^2\mathbf{s}$, proporzionale alla densità di flusso dell'energia luminosa. La luce si propaga come se corresse lungo «tubi luminosi» stretti, cioè lungo tubi le cui pareti laterali sono formate da raggi, che la luce non può attraversare. Se σ è la sezione trasversale di un tubo, lungo questo tubo la quantità $na^2\sigma$ resta costante, come risulta dall'equazione (6.16).

Si può isolare un singolo tubo luminoso, detto *raggio luminoso fisico,* mettendo sul cammino dell'onda (6.5) un diaframma stretto. Ma il diaframma non deve essere troppo stretto ed il tubo luminoso troppo lungo. Questo perché sui bordi del diaframma e vicino alle frontiere laterali del tubo l'ampiezza del campo varia bruscamente, cioè le condizioni d'applicabilità dell'ottica geometrica non sono più verificate. In queste zone si produce la diffrazione della luce che implica l'estensione del fascio luminoso. Ma se il diaframma non è troppo piccolo ed il tubo luminoso non è troppo lungo, questi effetti sono di poca importanza, tuttavia si manifestano sempre a grandi distanze dal diaframma. Nella teoria della diffrazione sarà dimostrato che condizione necessaria per realizzare un raggio luminoso fisico è

la disuguaglianza

$$l \ll D^2/\lambda, \tag{6.17}$$

dove D è la dimensione lineare minima del diaframma ed l la distanza dal diaframma misurata lungo il raggio.

Si dice lunghezza ottica in un mezzo omogeneo il prodotto della lunghezza geometrica l del percorso per l'indice di rifrazione n. Se il mezzo non è omogeneo, la lunghezza ottica è uguale all'integrale $\int n\,dl$, preso lungo la linea considerata. Se ABC è la lunghezza geometrica del percorso, la sua lunghezza ottica viene indicata con (ABC), cioè mettendo tra parentesi la
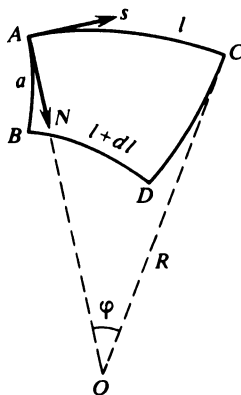
Fig. 20

lunghezza geometrica. Dalla costruzione di Huygens, esposta al punto 3 di questo paragrafo, segue che le lunghezze ottiche di tutti i raggi tra due posizioni del fronte d'onda sono uguali tra loro.

5. Non è difficile trarre dalle rappresentazioni ondulatorie l'espressione della curvatura di un raggio luminoso in un mezzo omogeneo. A questo scopo tracciamo il piano osculatore ad un segmento infinitesimo di raggio AC (fig. 20). Questo piano taglia i fronti d'onda passanti per le estremità di questo segmento lungo le curve AB e CD. Sia BD un raggio infinitamente vicino contenuto nello stesso piano. Essendo i raggi perpendicolari ai fronti d'onda, tutti gli angoli del quadrilatero $ABDC$ infinitamente piccolo sono retti. Ma, dato che le lunghezze ottiche dei raggi tra due posizioni qualsiasi del fronte d'onda sono uguali, si ha $nl = (n + dn)(l + dl)$, dove l ed $l + dl$ sono le lunghezze dei segmenti AC e BD ed n e $n + dn$ sono i corrispondenti indici di rifrazione. Con una precisione a meno di infinitesimi di ordine superiore otteniamo $l\,dn + n\,dl = 0$. Per definizione il raggio di curvatura è uguale a $l = R\varphi$, dove φ è l'angolo formato dalle tangenti nei punti A e C, uguale all'angolo formato dalle tangenti ai segmenti AB e CD negli stessi punti. È evidente che $dl = -a\varphi$, dove a è la lunghezza del segmento AB. L'incremento dn dell'indice di rifrazione avviene lungo la normale principale N, cosicché $dn = (\partial n/\partial N)a$. Tenendo conto di tutto ciò, otteniamo: $R\varphi(\partial n/\partial N)a - na\varphi = 0$, da cui

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial N}, \tag{6.18}$$

che coincide con la formula (4.1).

§ 7. *Principio di Fermat*

1. Pierre Fermat (1601-1675) ha enunciato un principio secondo il quale *la luce, propagandosi da un punto all'altro, sceglie il cammino che richiede il tempo minimo di propagazione.* Fermat si basava su ragionamenti teleologici secondo i quali la natura non può essere prodiga e cerca di raggiungere i suoi scopi con il minimo sforzo. Questi ragionamenti sono certo lontani dalla scienza e non possono giustificare il principio di Fermat. Ma il principio stesso (dopo l'introduzione di alcune precisazioni) è esatto e può risultare utile nella soluzione di alcuni problemi d'ottica geometrica. Ciò è stato dimostrato da Fermat stesso il quale, con l'aiuto del suo principio, ha dedotto la legge della rifrazione della luce di Snellius, ricavando per l'indice di rifrazione la stessa espressione ottenuta dalla teoria ondulatoria della luce. In particolare, è arrivato alla conclusione che la velocità della luce in un mezzo più rifrangente è inferiore a quella in un mezzo meno rifrangente.

2. Per dimostrare il principio di Fermat supponiamo dapprima che l'indice di rifrazione varii nello spazio in modo continuo e sufficientemente lento, in modo che siano verificate le condizioni d'applicazione dell'ottica geometrica. Supponiamo inoltre che nel mezzo si propaghi un'onda della forma (6.5), emessa ad esempio da una sorgente puntiforme. A quest'onda corrisponde il sistema di raggi rappresentato nella fig. 21. Se l'iconale Φ è una funzione univoca delle coordinate, dall'equazione (6.11) segue che la circuitazione del vettore $n\mathbf{s}$ lungo un contorno chiuso qualsiasi è nulla, cioè

$$\oint n(\mathbf{s}\, d\mathbf{l}) = 0, \tag{7.1}$$

dove $d\mathbf{l}$ è il vettore dello spostamento elementare lungo questo contorno. Prendiamo due punti arbitrari A e B situati su uno dei raggi ed uniamoli con una linea arbitraria ADB. In virtù della (7.1) si ha

$$\int_{ACB} n(\mathbf{s}\, d\mathbf{l}) = \int_{ADB} n(\mathbf{s}\, d\mathbf{l}).$$

Sul raggio ACB i vettori $\mathbf{s}$ e $d\mathbf{l}$ hanno la stessa direzione e quindi $(\mathbf{s}\, d\mathbf{l}) = dl$. Invece, sulla linea ADB $(\mathbf{s}\, d\mathbf{l}) = dl \cos(\mathbf{s}, d\mathbf{l}) \leqslant dl$. Abbiamo dunque

$$\int_{ACB} n\, dl \leqslant \int_{ADB} n\, dl. \tag{7.2}$$

Il segno d'uguaglianza concerne solo il caso in cui la curva ADB coincida con il raggio. Dunque, *se l'indice di rifrazione varia nello spazio in modo continuo, il cammino ottico del raggio tra due punti qualsiasi è inferiore a quello di ogni altra linea che unisca gli stessi punti.* Ma questa è un'altra formulazione del principio di Fermat, poiché il cammino ottico del raggio è proporzionale al tempo impiegato dalla luce.

L'enunciato riportato del principio di Fermat dev'essere precisato. In alcuni casi quest'enunciato può risultare inesatto. Consideriamo un mezzo il cui indice di rifrazione presenti una simmetria sferica rispetto al centro O (fig. 22). Un esempio concreto è dato dall'atmosfera dei pianeti. Supponiamo che l'indice di rifrazione varii nello spazio in modo tale che un raggio luminoso, emesso da una sorgente puntiforme perpendicolarmente al raggio della sfera, descriva una circonferenza con centro nel punto O. Supponiamo inoltre che la luce dal punto A arrivi al punto B lungo il grande arco ACB di questa circonferenza. Ma la luce può anche passare da A a B lungo l'arco ADB della stessa circonferenza in un tempo più breve. Un tempo più breve sarebbe necessario anche nel caso in cui la luce scegliesse un altro
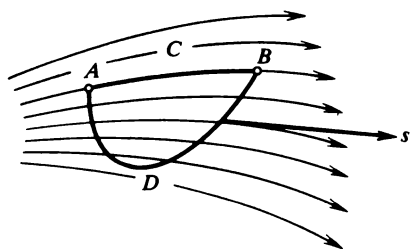
Fig. 21
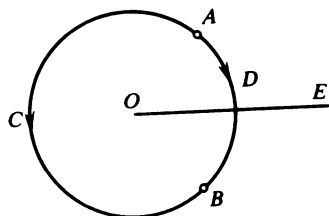
Fig. 22

cammino qualsiasi infinitamente vicino all'arco ADB. Quanto esposto contraddice il principio di Fermat nell'enunciato dato sopra.

La ragione di questa contraddizione consiste nel fatto che nell'esempio citato l'iconale Φ non è una funzione univoca delle coordinate, come avevamo ammesso nella dimostrazione. Infatti, se il raggio descrive una circonferenza attorno al centro O, esso ritornerà al punto di partenza con un nuovo valore dell'iconale: l'iconale Φ riceverà un incremento nl, dove l è la lunghezza della circonferenza descritta. Se la circonferenza è descritta m volte, l'incremento dell'iconale sarà uguale a $2mnl$, il che vuol dire proprio che la funzione Φ non è univoca. Affinché il principio di Fermat sia valido è necessario imporre alla scelta dei cammini restrizioni tali che l'iconale Φ sia una *funzione univoca delle coordinate.* Nell'esempio citato ciò si può ottenere mettendo una parete di separazione lungo il semipiano meridiano ODE e considerando solo cammini che non intersecano questa parete.

Questo procedimento può essere utilizzato in tutti gli altri casi in cui l'iconale Φ sarà non univoco. D'altra parte, nelle applicazioni del principio di Fermat, è sufficiente considerare cammini che passano infinitamente vicino al cammino reale della luce. In questo caso non è necessario introdurre pareti di separazione.

3. Se esistono superfici di separazione tra mezzi diversi sulle quali i raggi possono subire una riflessione o una rifrazione, nella formulazione e nel-

la dimostrazione del principio di Fermat è necessario introdurre modifiche. Supponiamo che un raggio emesso dal punto A (fig. 23) dopo aver subìto riflessioni o rifrazioni nei punti C, D, E, ... arrivi al punto B. Chiamiamo *cammino ottico virtuale* dei raggi lumunosi una linea $AC'D'E'B$ qualsiasi tra i punti estremi A e B, che si ottiene con spostamento laterale infinitesimo di $ACDEB$ e ne differisce infinitamente poco in direzione. Il principio di Fermat afferma che *il cammino ottico reale* (*o il tempo di propagazione, ad esso proporzionale*) *è stazionario*. Ciò significa che la differenza tra le lunghezze dei cammini reale e virtuale della luce è una quantità *infinitesima di ordine superiore* rispetto allo spostamento laterale tra cammino laterale e reale. Nelle applicazioni è importante questo carattere di stazionarietà e non il fatto che il cammino ottico sia minimo.
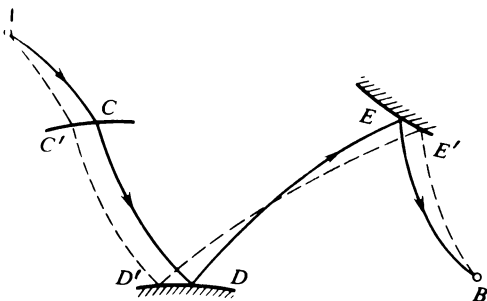
Fig. 23
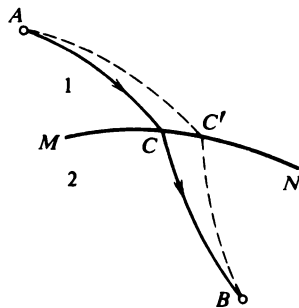
Fig. 24

Per la dimostrazione è sufficiente analizzare la rifrazione su una sola superficie di separazione. Il caso della riflessione richiede le stesse considerazioni. Sia MN la superficie di separazione dei mezzi 1 e 2 e ACB il raggio reale che unisce il punto A con B (fig. 24). Immaginiamo due fasci di raggi luminosi infinitamente stretti, uno emesso dal punto A si propaga nel primo mezzo, e l'altro convergente nel punto B dopo aver effettuato un percorso nel mezzo 2. Come direzione positiva prendiamo quella che va da A verso B. Scegliamo in questi fasci due raggi AC' e $C'B$ che s'intersecano nel punto C' della superficie di separazione. La curva $AC'B$ può essere considerata come un cammino virtuale della luce, poiché il raggio $C'B$ nel caso generale non viene prodotto dalla rifrazione del raggio AC'. Indichiamo con Φ_1 e Φ_2 gli iconali dei fasci considerati, misurati dai punti A e B rispettivamente. Si ha allora

$$\int_{ACB} n\,ds = \int_{AC} n\,ds + \int_{CB} n\,ds = \int_{AC} n\,ds - \int_{BC} n\,ds = \Phi_1(C) - \Phi_2(C).$$

La variazione dell'integrale $\int n\,ds$ in seguito allo spostamento del punto C in un punto arbitrario C' infinitamente vicino della superficie di separazio-

ne sarà

$$\delta \int n\, ds = \delta\Phi_1 - \delta\Phi_2.$$

Se $\delta \boldsymbol{r} \equiv \overrightarrow{CC'}$ è il vettore di spostamento, si ha $\delta\Phi_1 = (\text{grad}\, \Phi_1 \delta \boldsymbol{r}) = n_1(s_1 \delta \boldsymbol{r})$ e analogamente $\delta\Phi_2 = n_2(s_2 \delta \boldsymbol{r})$, cosicché si avrà

$$\delta \int n\, ds = (n_1 s_1 - n_2 s_2)\delta \boldsymbol{r}.$$

In virtù della legge di rifrazione di Snellius il vettore $(n_1 s_1 - n_2 s_2)$ è perpendicolare alla superficie di separazione dei mezzi nel punto d'incidenza, e pertanto lo è anche allo spostamento infinitesimo $\delta \boldsymbol{r}$ lungo questa superficie. Quindi, al primo ordine in $\delta \boldsymbol{r}$, la variazione della lunghezza ottica ACB del raggio si annulla. Nella dimostrazione abbiamo supposto che il cammino virtuale fosse costituito dai segmenti AC' e $C'B$. Ma il risultato non cambia se questi segmenti vengono sostituiti da linee arbitrarie infinitamente vicine che uniscono gli stessi punti A e C', C' e B. Infatti, visto che AC' e $C'B$ sono i raggi reali nel primo e nel secondo mezzo, le loro lunghezze ottiche sono minime come è stato dimostrato sopra. Per questa ragione se sostituiamo ai raggi reali AC' e $C'B$ linee infinitamente vicine a questi che uniscano gli stessi punti estremi, al primo ordine la lunghezza ottica dei corrispondenti cammini non cambia. Quindi, la variazione della lunghezza ottica ACB del raggio resta uguale a zero, quale che sia il cammino ottico virtuale della luce. E nel caso considerato proprio questo è quanto afferma il principio di Fermat.

4. Nelle applicazioni è a volte comodo il seguente teorema, che è un corollario diretto del principio di Fermat. *Siano A e B punti arbitrari del raggio ACB* (fig. 25). *Tracciamo nel punto B una superficie regolare arbitraria*
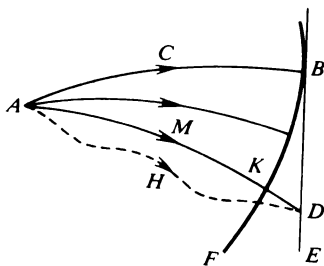
Fig. 25

BE ortogonale al raggio ACB. Sia inoltre BD uno spostamento infinitesimo lungo questa superficie. Uniamo il punto iniziale A con il punto D mediante una linea arbitraria AHD la cui direzione differisca infinitamente poco dal raggio ACB. Allora la variazione della lunghezza ottica nel pas-

saggio dal cammino reale della luce ACB a quello virtuale AHD sarà uguale a zero.

Per dimostrare quest'affermazione, prendiamo un fascio di raggi luminosi emessi dal punto A. Tutti questi raggi sono ortogonali al fronte d'onda BF e le loro lunghezze ottiche dal punto A al fronte d'onda sono le stesse. In particolare, $(ACB) = (AMK)$. Ma secondo il principio di Fermat a meno di infinitesimi di ordine superiore, $(AMK) = (AHK)$. Inoltre, visto che le superfici BDE e BKF si toccano nel punto B, la lunghezza del raggio
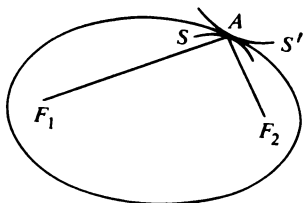
Fig. 26

KD sarà un infinitesimo di ordine superiore rispetto a BD. Pertanto la lunghezza ottica AHD differirà da ACB per una quantità che è un infinitesimo di ordine superiore rispetto allo spostamento laterale BD, come si voleva dimostrare.

5. Se la luce si propaga in mezzi omogenei contigui, il cammino della luce sarà rettilineo in ogni mezzo. In questo caso il problema si riduce alla determinazione dei punti sulle superficie di separazione dei mezzi nei quali ha luogo la riflessione e la rifrazione del raggio luminoso. Perciò non è necessario introdurre cammini virtuali curvilinei, è sufficiente limitarsi a cammini virtuali spezzati composti di segmenti di linee rette che si intersecano sulle superfici di separazione dei mezzi considerati. Anche con queste limitazioni, la lunghezza ottica del cammino luminoso reale può essere non solo minima, ma anche massima o stazionaria.

Per dimostrarlo nel caso della riflessione della luce, prendiamo uno specchio ellissoidale che si ottiene mediante una rotazione di un'ellisse attorno al suo asse maggiore F_1F_2 (fig. 26).

Siano F_1 e F_2 i fuochi dell'ellissoide. Se A è un punto sulla sua superficie, allora $F_1A + F_2A = 2a$, dove $2a$ è la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellissoide. La superficie dello specchio divide tutto lo spazio in due parti: una regione *interna* in cui la somma delle distanze di ogni punto dai fuochi F_1 e F_2 è inferiore a $2a$, e quella *esterna* per la quale questa somma è superiore a $2a$. Supponiamo che il raggio luminoso sia emesso dal fuoco F_1. Allora dopo riflessione dallo specchio ellissoidale nel punto A, questo raggio passerà attraverso il secondo fuoco F_2, poiché secondo la proprietà dell'ellisse le rette F_1A e F_2A formano con la normale alla superficie dello

specchio angoli uguali. Spostandosi lungo la superficie dello specchio la somma $F_1A + F_2A$ e con essa anche il tempo di propagazione della luce da F_1 a F_2 non variano. La variazione del tempo di propagazione della luce in seguito a questo spostamento è uguale a zero, tuttavia questo tempo non è né minimo, né massimo, esso è *costante.* Proprio per questa ragione ogni raggio luminoso emesso da F_1, passerà obbligatoriamente attraverso F_2, quale che sia il punto dello specchio nel quale questo raggio si riflette. Possiamo convincercene con l'aiuto degli stessi ragionamenti riportati nel punto 3.

Immaginiamo ora di avere uno specchio concavo S che tocca l'ellissoide nel punto A e rivolto dalla stessa parte dell'ellissoide, ma avente una curvatura maggiore. Il raggio luminoso F_1A dopo la riflessione su questo specchio passa ancora nel punto F_2. Ma a seguito di uno spostamento del punto A lungo la superficie dello specchio S, la lunghezza della spezzata F_1AF_2 diminuisce. Quindi, il tempo di propagazione della luce da F_1 a F_2 lungo il cammino reale è *massimo.* Al contrario, se consideriamo uno specchio S' avente nel punto di contatto una curvatura inferiore a quella dell'ellissoide oppure convesso, il tempo di propagazione della luce lungo il cammino reale sarà *minimo.* In particolare, questo tempo è minimo nel caso di riflessione da uno *specchio piano.* Supponiamo infine che lo specchio SAS' abbia in A un *punto di flesso.* Allora in seguito allo spostamento del punto d'incidenza del raggio lungo la superficie di questo specchio, il tempo di propagazione della luce aumenterà o diminuirà, oppure resterà invariato, in dipendenza della direzione di spostamento.

6. Per esaminare il caso della rifrazione introduciamo la nozione di *superficie stigmatica.* Supponiamo che il punto P si trovi in un mezzo omogeneo con indice di rifrazione n ed il punto P' in un mezzo omogeneo con indice di rifrazione n' (fig. 27). La superficie di separazione AA' è detta *stigmatica,* se per ogni punto A di questa superficie vale la condizione

$$n \cdot PA + n' \cdot AP' = C = \text{costante.}$$

Per la rifrazione, la superficie stigmatica ha la forma del cosiddetto *ovale cartesiano* (si veda problema 2 del § 9). Questo ovale ha la concavità rivolta verso il mezzo più rifrangente ($n' > n$). La superficie stigmatica divide lo spazio in due parti che possiedono la seguente proprietà. Se il punto M è situato nel mezzo meno rifrangente, la somma $n \cdot PM + n' \cdot MP'$ è superiore a C; se invece questo punto si trova nel mezzo più rifrangente, questa somma è inferiore a C.

Dimostriamo il seguente teorema. *Un raggio luminoso emesso dal punto P, dopo una rifrazione su una superficie stigmatica passa necessariamente per il punto P'.* Infatti, sia PA il raggio incidente ed s il vettore unitario diretto lungo questo raggio. Uniamo il punto A con P' ed indichiamo con s' il vettore unitario diretto lungo la retta AP'. Per definizione di superficie stigmatica la variazione del cammino ottico della spezzata PAP'

nel caso di spostamento del punto A sulla superficie stigmatica è uguale a zero. Pertanto, applicando gli stessi ragionamenti del punto 2, troviamo che il vettore $ns - n's'$ è perpendicolare alla superficie stigmatica nel punto A. Ne segue che AP' rappresenta la direzione del raggio rifratto.

Questo teorema può essere enunciato come segue: *se AA' è una superficie stigmatica rispetto ad una coppia di punti P e P', ciascun punto è l'immagine dell'altro per i raggi rifratti da questa superficie,* senza porre restrizioni sull'apertura angolare del fascio luminoso.

Ritorniamo allo studio del carattere di estremo del cammino ottico del raggio rifratto. I nostri ragionamenti non saranno diversi da quelli fatti sopra per uno specchio ellissoidale. Supponiamo, per esempio, che i mezzi abbiano per frontiera una superficie S (fig. 27) che ha un punto di contatto con una superficie stigmatica nel punto A. Allora il raggio incidente dopo la rifrazione nel punto A passerà per il punto P'. Supponiamo che la superficie S abbia la concavità rivolta dalla stessa parte che la superficie stigmatica ed abbia, nel punto di contatto, curvatura maggiore. Allora nel caso di spostamento del punto d'incidenza lungo S esso si troverà in un mezzo meno rifrangente e, quindi, il cammino ottico del raggio spostato avrà una *lunghezza inferiore* a quello reale: il tempo di propagazione della luce lungo il cammino reale è quindi *massimo.* Al contrario, se la curvatura della superficie S al punto di contatto A è inferiore a quella della superficie stigmatica, ed anche nel caso in cui la superficie S abbia la concavità rivolta verso la parte opposta, il tempo di propagazione della luce lungo il cammino reale è *minimo.* In particolare, questo tempo è minimo nel caso di rifrazione su una *superficie piana.*

Problema

Utilizzando il principio di Fermat, dimostrare il *teorema di Malus*: *se i raggi di un fascio luminoso sono tutti ortogonali ad una superficie qualunque, essi restano ortogonali ad una certa superficie anche dopo un numero qualsiasi di riflessioni e rifrazioni.*

Soluzione. Supponiamo che tutti i raggi siano perpendicolari alla superficie F (fig. 28). Conduciamo per ogni punto di questa superficie un raggio e riportiamo su ciascun raggio un segmento arbitrario L di lunghezza ottica costante. Il luogo geometrico delle estremità di que-
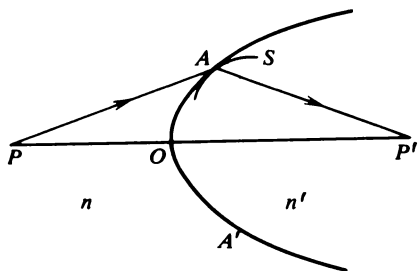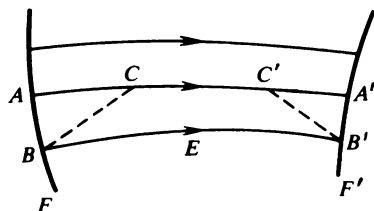
Fig. 27 Fig. 28

sti segmenti sarà una certa superficie F'. Dimostriamo che tutti i raggi del sistema considerato sono perpendicolari alla superficie F' quale che sia il valore della lunghezza L.

Stacchiamo due piccoli segmenti AC e $C'A'$ su uno dei raggi: questi segmenti si possono considerare rettilinei. Prendiamo un raggio infinitamente vicino ad AA' ed inoltre tale che le lunghezze AB ed $A'B'$ siano infinitesime rispetto ad AC e $C'A'$. Uniamo B con C e C' con B' per mezzo di segmenti rettilinei. Secondo il principio di Fermat, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $(BEB') = (BCC'B')$ e per costruzione $(BEB') = (ACC'A')$. Dunque, $(BCC'B') = (ACC'A')$. Sottraendo il segmento comune (CC'), otteniamo: $(AC) + (C'A') = (BC) + (C'B')$. Essendo per ipotesi il segmento AC perpendicolare ad AB, a meno di infinitesimi del secondo ordine $AC = BC$ e, quindi, $(AC) = (BC)$. Pertanto con la stessa precisione $(C'A') = (C'B')$, ossia $C'A' = C'B'$, da cui segue che $C'A' \perp A'B'$.

Dal punto di vista della teoria ondulatoria il teorema di Malus è quasi evidente. Infatti, per un sistema di raggi ortogonali alla superficie F, questa è una *superficie di ugual fase* (fronte d'onda). Propagandosi secondo le leggi dell'ottica geometrica, questa superficie continua a restare una superficie equifase, e l'insieme dei raggi un *sistema ad essa ortogonale*. Certo, l'ortogonalità può non essere verificata. Per esempio, le onde della forma (6.5), se è verificato il principio di sovrapposizione, si propagano indipendentemente l'una dall'altra. A ciascuna di queste onde corrisponde un sistema ortogonale di raggi, ma l'insieme dei raggi corrispondenti a tutte le onde, non forma in generale un sistema ortogonale.

§ 8. *Velocità di gruppo*

1. Finora, considerando la velocità di propagazione delle onde, abbiamo supposto che fosse verificato il principio di sovrapposizione e non vi fosse dispersione di luce. Se non vale il principio di sovrapposizione ed è presente la dispersione della luce, la questione della velocità di propagazione delle onde diventa estremamente complicata. *Supponiamo ora che il principio di sovrapposizione sia verificato, ma che vi sia dispersione.* Consideriamo dapprima onde piane che si propagano in una sola direzione, che prendiamo come asse X.

Rappresentiamo l'onda monocromatica piana progressiva nella forma

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \delta), \tag{8.1}$$

dove E_0 e δ sono costanti. Studiando questo tipo di onde, la dispersione non si manifesta poiché la frequenza ω è fissa. Per precisare il significato della velocità di propagazione consideriamo l'equazione

$$\omega t - kx + \delta = \text{costante}. \tag{8.2}$$

Questa è l'equazione di un piano perpendicolare all'asse X sul quale la fase dell'onda ha un valore costante.Derivando quest'equazione, otteniamo: $\omega dt - k\,dx = 0$, da cui si ha

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \tag{8.3}$$

Dunque, ω/k è la *velocità di propagazione della superficie di fase costante,* velocità che abbiamo indicato con v: questa è detta *velocità di fase dell'on-*

da. Un'onda sinusoidale della forma (8.1) si propaga con questa velocità senza variare la sua forma.

Se il mezzo non presentasse dispersione, non sarebbe necessario introdurre un'altra velocità di propagazione. Infatti, una perturbazione piana arbitraria propagantesi nella direzione dell'asse X, può essere rappresentata, secondo il teorema di Fourier, come sovrapposizione di onde monocromatiche della forma (8.1). Se la dispersione è assente, tutte queste onde hanno la stessa velocità di fase, cosicché la forma della perturbazione resta sempre *la stessa*: la perturbazione si propaga in avanti con una velocità
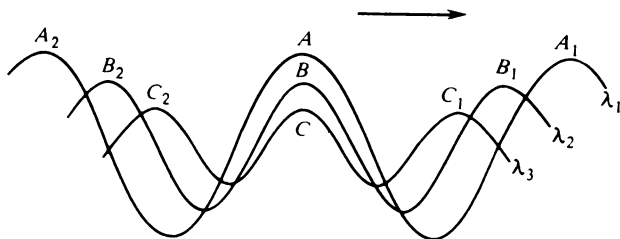
Fig. 29

uguale a quella di fase. La situazione è del tutto diversa nel caso di dispersione, poiché allora le onde monocromatiche di frequenze differenti si propagheranno in avanti con le velocità differenti, in conseguenza di ciò la forma di tutta la perturbazione *cambierà continuamente* (ad eccezione delle onde monocromatiche propagantisi come prima, senza cambiare forma). In queste condizioni la nozione di velocità di propagazione perde quel significato chiaro che aveva in assenza di dispersione. A certe condizioni si può conservare la nozione di velocità di propagazione delle onde non monocromatiche anche nei mezzi dispersivi introducendo la nozione di *velocità di gruppo*.

2. Consideriamo un ipotetico mezzo non assorbente nel quale la velocità di fase v sia una funzione lineare della lunghezza d'onda λ

$$v = a + b\lambda, \tag{8.4}$$

e quindi, la frequenza ω è una funzione lineare del numero d'onda k

$$\omega = ak + 2\pi b. \tag{8.5}$$

Decomponiamo in onde monocromatiche una perturbazione piana arbitraria propagantesi nel mezzo. In generale il loro numero sarà infinitamente grande, ma possiamo ipotizzare un caso in cui ve ne siano solamente tre. Questo sviluppo, come vedremo in seguito, non influenzerà la generalità dei ragionamenti e dei risultati. Nella fig. 29 sono rappresentate queste tre sinusoidi ad un istante dato. La forma della perturbazione risultante di-

pende dalla loro posizione reciproca. Senza perdere di generalità, possiamo ammettere che in questo istante i tre massimi *A, B, C* delle sinusoidi si trovino in uno stesso punto dello spazio.

Supponiamo, per fissar le idee, che la velocità di fase v aumenti con il crescere della lunghezza d'onda λ (se si suppone il contrario, non varieranno né i ragionamenti, né il risultato finale). Dunque, se $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, e v_1, v_2, v_3 sono le corrispondenti velocità di fase, si ha $v_1 > v_2 > v_3$. Se le onde si propagano, per esempio, da sinistra a destra le onde più lunghe sorpasseranno quelle più corte, il che implica un'alterazione continua della forma della perturbazione risultante. I massimi *A, B, C* si allontaneranno gli uni dagli altri, A_1, B_1, C_1 si allontaneranno ancor più gli uni dagli altri, mentre A_2, B_2, C_2 si avvicineranno tra loro. Se mettiamo l'origine delle coordinate nel punto in cui si trovavano all'istante iniziale i massimi *A, B, C,* ad un istante arbitrario t le coordinate dei massimi A_2, B_2, C_2 saranno date dalle espressioni

$$x_{A_2}(t) = v_1 t - \lambda_1, \quad x_{B_2}(t) = v_2 t - \lambda_2, \quad x_{C_2}(t) = v_3 t - \lambda_3.$$

All'istante τ definito dalle condizioni

$$v_1\tau - \lambda_1 = v_2\tau - \lambda_2 = v_3\tau - \lambda_3,$$

cioè

$$\tau = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{v_1 - v_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{v_2 - v_3} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{v_1 - v_3} = \frac{d\lambda}{dv} = \frac{1}{b},$$

le posizioni spaziali dei massimi A_2, B_2, C_2 sono allora coincidenti, cosicché si ristabiliranno sia la disposizione reciproca iniziale delle sinusoidi che la forma di tutta la perturbazione, con la sola differenza che, anziché i massimi *A, B, C,* coincideranno i massimi A_2, B_2, C_2, il che evidentemente non influenzerà in nessun modo la forma della perturbazione risultante. Il risultato ottenuto nel caso di una legge lineare di dispersione (8.4) è di validità generale, cioè è applicabile ad un numero arbitrario di sinusoidi, qualunque sia la loro posizione iniziale.

Dunque, *dopo il tempo* $\tau = d\lambda/dv$, *detto tempo di ripetizione, la forma della perturbazione si riproduce periodicamente.* Ad esempio, nel caso considerato di tre sinusoidi, poiché nell'origine delle coordinate si sovrapponevano i massimi *A, B, C,* nell'istante iniziale vi è un massimo della perturbazione. Un massimo assolutamente analogo si ha dopo un tempo τ in un diverso punto dello spazio nel quale si sovrappongono i massimi A_2, B_2, C_2. La propagazione della perturbazione avviene per così dire a salti, e tra un salto e l'altro intercorre il tempo τ. È naturale definire la velocità di propagazione della perturbazione come il rapporto tra la distanza percorsa dalla perturbazione durante un salto ed il tempo che intercorre tra due salti successivi. La quantità così definita è detta *velocità di gruppo* della perturbazione. Nell'esempio considerato questo è il rapporto tra la distanza di

due posizioni successive di massimo della perturbazione ed il tempo di ripetizione τ. All'istante $t = 0$ la coordinata del massimo $x_{max}(0) = 0$. All'istante τ la coordinata dello stesso massimo è

$$x_{max}(\tau) = v_1\tau - \lambda_1 = v_2\tau - \lambda_2 = v_3\tau - \lambda_3 = v\tau - \lambda.$$

Durante l'intervallo di tempo τ il massimo percorre il cammino

$$x_{max}(\tau) - x_{max}(0) = v\tau - \lambda.$$

Quindi, la velocità di gruppo è $u = v - \lambda/\tau$, o

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \tag{8.6}$$

Questa formula è stata per la prima volta stabilita da Rayleigh (1842-1919) e porta il suo nome. Nella fig. 30 è data l'interpretazione grafica di questa formula, che si deve a Ehrenfest (1880-1933). In questa figura, in
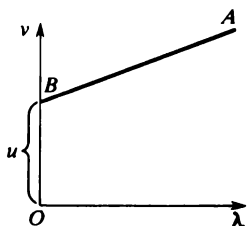
Fig. 30
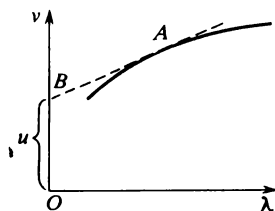
Fig. 31

coordinate λ e v, è rappresentato il grafico AB della retta (8.4). Essendo $u = v - \lambda dv/d\lambda = a$, questa retta taglia sull'asse delle ascisse un segmento BO la cui lunghezza è uguale alla velocità di gruppo u. La formula (8.6) può essere scritta nella forma

$$u = v + \frac{1}{\lambda}\frac{dv}{d(1/\lambda)} = \frac{d}{d(1/\lambda)}\left(\frac{v}{\lambda}\right),$$

nella quale

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \tag{8.7}$$

Si può trasformare la (8.6) nella forma

$$u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right). \tag{8.8}$$

3. I risultati ottenuti sono rigorosamente validi soltanto se la legge di dispersione è lineare (formule (8.4) e (8.5)). Ma, se la perturbazione copre so-

lo una piccola regione spettrale, questi risultati restano approssimativamente validi nei mezzi dispersivi non assorbenti. Le perturbazioni di questo tipo sono dette *treni d'onde*. Più esattamente, si dice *treno d'onde un insieme di onde occupante una banda spettrale tanto stretta che, nei limiti di questa banda, l'incremento della velocità di fase* v *può essere posto proporzionale al corrispondente incremento della lunghezza d'onda* λ, *e quindi l'incremento della frequenza* ω *è proporzionale al corrispondente incremento di numero d'onda* k. Ciò significa che nei limiti della banda spettrale considerata entrambe le dipendenze $v = v(\lambda)$ e $\omega = \omega(k)$ possono essere approssimate mediante funzioni lineari di λ e k, tali che

$$v = v(\lambda_0) + \left(\frac{dv}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} (\lambda - \lambda_0), \tag{8.9}$$

$$\omega = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} (k - k_0), \tag{8.10}$$

dove λ_0 è una certa lunghezza d'onda che si trova all'interno della banda spettrale occupata dal gruppo, e $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ è il corrispondente numero d'onda. Quando una tale approssimazione è valida, si può anche parlare di tempo di ripetizione approssimato $\tau = d\lambda/dv$, e della propagazione della perturbazione con velocità di gruppo u definita dalle espressioni (8.6) o (8.7). Nel diagramma di Ehrenfest per un treno d'onde interessa solo un piccolo tratto della curva $v = v(\lambda)$, il quale può essere considerato approssimativamente rettilineo e sostituito con un corrispondente segmento della tangente alla curva. La velocità di gruppo u è allora data dalla lunghezza del segmento OB tagliato da questa tangente sull'asse delle ordinate (fig. 31).

4. Se si tiene conto dei termini d'ordine superiore negli sviluppi (8.9) e (8.10), si arriva al seguente carattere della propagazione della perturbazione. La perturbazione avanza, ma la sua forma cambia continuamente. Ma dopo un tempo $\tau = d\lambda/dv$ la perturbazione assume una forma quasi coincidente con quella iniziale, ed ha percorso una distanza $x = u\tau$. Si può dire che ha luogo una trasmissione d'energia con velocità di gruppo u. Dopo un altro intervallo di tempo τ la perturbazione riprende aprossimativamente la stessa forma avendo percorso la distanza $x = u\tau$. In generale, ad un istante qualsiasi $t + \tau$ la perturbazione riproduce con piccole distorsioni la forma che aveva all'istante t, spostandosi di una distanza $u\tau$. Ma se la perturbazione si propaga per un tempo sufficientemente lungo, le piccole distorsioni da essa subìte in ciascun intervallo di tempo τ si accumuleranno e possono modificare la perturbazione fino a farle perdere ogni somiglianza con quella iniziale.

Per stimare il tempo necessario per produrre quest'alterazione di forma, aggiungiamo allo sviluppo (8.10) un termine di secondo grado in

$(k - k_0)$. Tenendo conto della formula (8.7) possiamo scrivere

$$\omega = \omega_0 + u_0(k - k_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dk}\right)_0 (k - k_0)^2,$$

dove l'indice zero denota i valori delle corrispondenti grandezze per $k = k_0$. Sia δk il valore massimo della differenza $k - k_0$. Allora la massima variazione di fase, dovuta all'esistenza del termine quadratico, sarà uguale a $\frac{t}{2}\left|\frac{du}{dk}\right|(\delta k)^2$. Se questa variazione è piccola in confronto con una quantità dell'ordine di π, essa influenzerà poco la differenza relativa di fase tra le sinusoidi costituenti il treno d'onde, e la presenza del termine quadratico altererà poco la forma della perturbazione. Dunque, affinché nell'intervallo di tempo t abbia luogo un ristabilimento periodico della forma iniziale della perturbazione, è necessario che sia verificata la seguente condizione:

$$t \ll \frac{2\pi}{|du/dk|(\delta k)^2}. \tag{8.11}$$

In termini di lunghezze d'onda questa disuguaglianza si trasforma nella seguente espressione

$$t \ll \frac{\lambda^2}{|du/d\lambda|(\delta\lambda)^2}. \tag{8.12}$$

Se, invece, l'intervallo di tempo t è comparabile o superiore al valore del secondo membro di questa disuguaglianza, non può più esistere la questione di un ristabilimento della forma iniziale della perturbazione.

5. Abbiamo supposto sopra che le onde monocromatiche piane costituenti una perturbazione si propagassero tutte *nella stessa direzione e nello stesso verso.* Consideriamo ora il caso in cui queste onde occupano come prima una piccola banda di frequenze, ma si propagano in direzioni differenti comprese in un cono molto stretto. L'insieme di queste onde è detto *pacchetto d'onde* e può essere rappresentato dall'integrale triplo

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \int_{k_{0x}-\Delta k_x}^{k_{0x}+\Delta k_x} \int_{k_{0y}-\Delta k_y}^{k_{0y}+\Delta k_y} \int_{k_{0z}-\Delta k_z}^{k_{0z}+\Delta k_z} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}) e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} dk_x dk_y dk_z,$$

o nella forma concisa,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}) e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} d\boldsymbol{k}. \tag{8.13}$$

La frequenza ω deve essere considerata come funzione del vettore d'onda $\boldsymbol{k}$. La forma di questa funzione determina *la legge di dispersione delle onde.* Se il mezzo è *isotropo,* la funzione $\omega(\boldsymbol{k})$ può dipendere solo dalla *lunghezza del vettore* $\boldsymbol{k}$ e non dalla sua direzione. Ma *nei mezzi anisotropi,* per

esempio nei cristalli, è necessario tener conto della dipendenza di ω *dalla direzione del vettore* $\boldsymbol{k}$. Pertanto in quanto segue la forma della funzione $\omega(\boldsymbol{k})$ non viene concretizzata ed i ragionamenti vengono sviluppati in forma generale. Poniamo $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 + \Delta\boldsymbol{k}$ ed esprimiamo $\Delta\omega$ in modo approssimato mediante la seguente espressione lineare:

$$\Delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\Delta k_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\Delta k_y + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\Delta k_z = (\boldsymbol{u}\,\Delta\boldsymbol{k}), \tag{8.14}$$

dove $\boldsymbol{u}$ indica un vettore di componenti

$$u_x = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}, \quad u_y = \frac{\partial\omega}{\partial k_y}, \quad u_z = \frac{\partial\omega}{\partial k_z}. \tag{8.15}$$

La forma simbolica concisa di questo vettore è

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}. \tag{8.16}$$

Dopo la sostituzione dei corrispondenti valori nell'espressione (8.13) quest'ultima si trasforma in

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)e^{i(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})}, \tag{8.17}$$

dove è stata introdotta la notazione

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})e^{i(\Delta\omega t - \Delta\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}d\boldsymbol{k} = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{u}t - \boldsymbol{r})\Delta\boldsymbol{k}}d\boldsymbol{k}.$$

Quest'ultima espressione mostra che in ogni punto M che si sposta con velocità $\boldsymbol{u}$ secondo la legge $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{r}_0$ ($\boldsymbol{r}_0$ = costante) l'ampiezza $\boldsymbol{A}$ resta costante. Questo punto esegue oscillazioni armoniche

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}e^{i(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})} = \boldsymbol{A}e^{i[(\omega_0 - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{u})t - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r}_0]}$$

di frequenza $\omega_0 - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{u}$. Dopo un tempo τ la fase di queste oscillazioni varia di $(\omega_0 - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{u})\tau$. Se questa variazione è uguale a 2π, cioè

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 - \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{u}} \approx \frac{2\pi}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}}, \tag{8.18}$$

il vettore $\boldsymbol{E}$ attaccato al punto mobile M assume in un qualsiasi istante t lo stesso valore che aveva al tempo $t - \tau$. Poiché questo vale per un valore qualsiasi del parametro $\boldsymbol{r}_0$, ha luogo un ristabilimento periodico della forma della perturbazione con periodo τ, ed inoltre durante questo tempo la perturbazione avanza di una distanza $\boldsymbol{u}\tau$. Arriviamo di nuovo alla concezione della propagazione della perturbazione con la velocità di gruppo $\boldsymbol{u}$ definita dall'espressione (8.16).

Nei mezzi isotropi i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{k}$ sono paralleli. In questo caso la (8.18) può essere facilmente trasformata nella forma $\tau = d\lambda/dv$. Ma nei mezzi

anisotropi i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{k}$ non sono in generale paralleli, ed è necessario utilizzare le espressioni più generali (8.16) e (8.18). Anche in questo caso, a causa della presenza di termini di ordine superiore, trascurati nello sviluppo (8.14), nell'intervallo di tempo τ ha luogo un ristabilimento solo *approssimato* e non esatto della forma della perturbazione. Durante questo intervallo la perturbazione subisce distorsioni deboli, pressoché impercettibili, ma per intervalli di tempo lunghi queste distorsioni s'accumulano e la forma iniziale della perturbazione può subire variazioni sostanziali.

6. I ragionamenti esposti sopra permettono di risolvere facilmente il problema della *velocità di trasporto dell'energia o di un segnale luminoso* nei mezzi dispersivi per frequenze contenute in regioni dello spettro dove è applicabile la nozione di velocità di gruppo (cioè lontano dalle bande di assorbimento). Osserviamo subito che la velocità di fase non ha niente a che fare con quella di trasporto dell'energia. La velocità di fase stabilisce solo una relazione *tra le fasi delle vibrazioni* in differenti punti dello spazio. Una tale relazione può in linea di massima esistere anche senza il trasporto d'energia; l'esempio che segue lo dimostra chiaramente.

Immaginiamo una fila di sportivi, allineati ad uguali distanze lungo una retta che eseguono uno stesso movimento di ginnastica, ad esempio un moto periodico delle braccia, e supponiamo che ciascun sportivo cominci il movimento con un certo ritardo rispetto allo sportivo che si trova dietro di lui. Il tempo di ritardo sia lo stesso per tutti gli sportivi. Ad un osservatore tutto apparirà come se lungo la fila si propagasse un'onda con una velocità di fase il cui valore dipende dalla distanza tra gli sportivi vicini e dal tempo di ritardo tra uno sportivo e l'altro. L'esistenza di quest'onda non significa certo che ogni sportivo mette in moto lo sportivo che si trova dopo di lui.

La possibilità di propagazione di un'onda piana monocromatica in un mezzo dato non implica necessariamente un trasporto d'energia con la velocità di fase.

Un'onda monocromatica rigorosamente piana non conviene per l'osservazione di un trasporto d'energia, poiché essa non ha né inizio, né fine nel tempo e nello spazio. L'impostazione stessa del problema di un trasporto d'energia esige la rinuncia a quest'idealizzazione. È necessario usare una perturbazione ondulatoria *limitata nello spazio* almeno da un'estremità, cioè avente un fronte d'onda davanti al quale non c'è alcuna perturbazione. Una formazione ondulatoria conveniente è un treno d'onde. Se la condizione (8.12) è verificata, la velocità media dell'energia trasportata coincide con la velocità di gruppo. Infatti, la forma posseduta dal treno d'onde all'istante t, si ripete senza distorsione notevole ad un istante successivo $t + \tau$. Nell'intervallo di tempo τ il treno d'onde e l'energia localizzata in esso si spostano in avanti di una distanza $x = u\tau$. Visto che tale ristabilimento della forma del treno d'onde ha luogo quale che sia l'istante t, il trasporto d'energia con la velocità di gruppo può aver luogo durante un inter-

vallo di tempo lungo a piacere, persino se in questo intervallo il treno d'onde cambierà notevolmente la sua forma.

Dunque, in ogni regione dello spettro, lontana da bande di forte assorbimento, la velocità di trasporto dell'energia in un treno d'onde coincide con quella di gruppo. Lo stesso è approssimativamente valido anche per la velocità di trasporto dell'energia in una perturbazione occupante una regione spettrale relativamente larga, solo se in questa regione spettrale la velocità di gruppo $u = u(\lambda)$ varia poco. Se la larghezza $\delta\lambda$ della regione spettrale occupata dal treno d'onde tende a zero, il treno d'onde si riduce al limite ad un'onda monocromatica. Si può quindi dire che la velocità media di trasporto dell'energia in un'onda monocromatica coincide con quella di gruppo. Quest'affermazione deve essere compresa nel senso che l'onda monocromatica è il caso limite di un'onda quasi-monocromatica. Non ci si può limitare a considerare un'onda piana rigorosamente monocromatica, astraendo dalla sua rappresentazione come caso limite di un'onda quasi-monocromatica. Quest'impostazione del problema è troppo astratta e ci fa perdere la relazione con i fenomeni reali, e pertanto dal punto di vista fisico essa non ha senso.

Le misure dirette della velocità della luce si riducono alla misura della distanza percorsa dal segnale luminoso in un determinato intervallo di tempo. Da quanto esposto sopra segue che questo metodo dà praticamente la velocità di gruppo. Lo stesso risultato, come mostra un'analisi dettagliata, si ottiene con i metodi indiretti noti di misura della velocità della luce. La velocità di fase, o più precisamente il rapporto tra le velocità di fase in due mezzi differenti, può essere determinato solo conoscendo gli indici di rifrazione, utilizzando la formula (3.7) della teoria ondulatoria, nella quale figurano le velocità di fase della luce nei mezzi considerati (si veda § 64).

7. Esaminiamo ora la questione della *velocità di propagazione del fronte d'onda avanzato di una perturbazione ondulatoria*. Si tratta di un'onda delimitata bruscamente dal suo fronte avanzato, davanti al quale non c'è nessuna perturbazione. La velocità di questo fronte coincide esattamente con la velocità della luce nel vuoto c. Si può facilmente convincersene partendo dalle concezioni fondamentali della teoria elettronica. Secondo questa teoria ogni mezzo deve essere considerato come un vuoto nel quale sono inseriti atomi e molecole. La luce si propaga nel vuoto tra gli atomi e le molecole della sostanza, cioè sempre con la velocità c. Se la perturbazione luminosa arriva ad un atomo, gli elettroni ed i nuclei atomici si mettono a vibrare e diventano loro stessi centri d'emissione di nuove onde elettromagnetiche. Queste onde secondarie si sovrappongono all'onda primaria e determinano così tutto il campo d'onda nel mezzo. Ma in seguito all'inerzia gli elettroni ed i nuclei atomici non entrano subito in vibrazione. Finché gli elettroni ed i nuclei non siano entrati in vibrazione, essi non emettono onde secondarie, e pertanto non esercitano alcuna influenza sulla propagazione della perturbazione. Perciò è chiaro che il fronte avanzato dell'onda deve

propagarsi nel mezzo con la stessa velocità che ha nel vuoto. Ma perché le misure della velocità della luce danno un valore differente da c? Questo avviene poiché il fronte avanzato trasporta un'energia troppo debole perché i detettori di luce insufficientemente sensibili possano rivelarla. I calcoli quantitativi eseguiti per la prima volta da A. Sommerfeld (1868-1951) ed in maniera più dettagliata da L. Brillouin (1889-1969), hanno mostrato che la situazione è proprio questa.

§ 9. *Nozione d'immagine ottica*

1. Se un fascio di raggi luminosi emesso da un punto P converge in un punto P' in conseguenza di riflessioni, rifrazioni o curvature in mezzi non omogenei, P' si dice *immagine ottica del punto P.* Il punto P' è anche detto *fuoco di convergenza geometrica dei raggi.* L'immagine P' si chiama *reale* se i raggi luminosi convergono effettivamente nel punto P'. Se, invece, nel punto P' convergono i prolungamenti dei raggi, tracciati nella direzione opposta alla direzione della propagazione della luce, l'immagine si chiama *virtuale.* Con l'aiuto dei dispositivi ottici le immagini virtuali possono essere trasformate in immagini reali. Per esempio, il nostro occhio trasforma un'immagine virtuale in immagine reale che si forma sulla retina dell'occhio.

Se ad un certo istante invertiamo il senso del vettore magnetico o di quello elettrico, allora, in virtù del *principio d'inversione,* (si veda vol. III, § 83, punto 8) la forma dei raggi resterà invariata, ma il senso di propagazione della luce s'invertirà. Il punto P' fungerà da *sorgente luminosa* e P da sua *immagine.* Pertanto i punti P e P' si chiamano *coniugati* l'uno dell'altro. In modo analogo, due linee o due superficie sono dette *coniugate* se una di esse rappresenta l'immagine ottica dell'altra.

Se si vuole sottolineare che i raggi emessi dal punto P passano tutti nel punto P', si dice che vi è *stigmatismo perfetto,* mentre il fascio luminoso emesso da un punto o convergente in un punto è detto *omocentrico.* Da esempio può fungere il fascio riflesso da uno specchio ellissoidale. In virtù delle proprietà dell'ellissoide di rotazione le rette FA e $F'A$ (fig. 32) che uniscono i suoi fuochi F e F' con un punto arbitrario A della superficie sono ugualmente inclinate in rapporto con questa superficie. Pertanto tutti i raggi emessi da un fuoco s'intersecano nell'altro fuoco dopo una riflessione sulla superficie dell'ellissoide. In pratica il caso più importante è quello dello *specchio parabolico* utilizzato nei telescopi-riflettori astronomici. Uno specchio parabolico è un caso particolare di quello ellissoidale, di cui uno dei fuochi F' è allontanato all'infinito. In virtù della proprietà nota della parabola, tutti i raggi paralleli all'asse dopo la riflessione sulla sua su-

perficie concava convergono nel fuoco F del paraboloide (fig. 33). Se invece i raggi vengono riflessi dalla superficie convessa del paraboloide, nel fuoco F s'intersecheranno i prolungamenti dei raggi riflessi (fig. 34). L'immagine stigmatica del punto P in un punto P' si ottiene anche per rifrazione su una superficie che sia *stigmatica* per questa coppia di punti (si veda § 7 ed i problemi del presente paragrafo).

In pratica i casi di immagini stigmatiche sono casi eccezionali. Di solito i raggi non s'intersecano rigorosamente in un punto, ma all'interno di un elemento di volume attorno a questo punto. L'immagine di un punto luminoso sullo schermo sarà in questo caso non un punto matematico, ma una
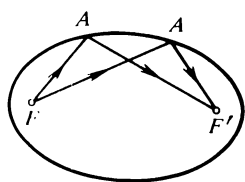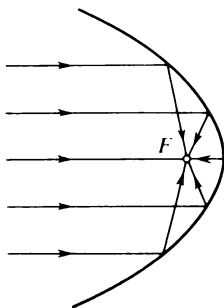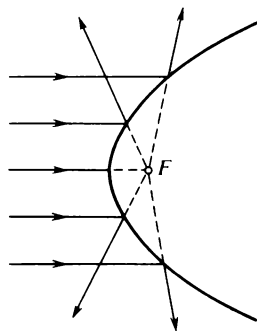
Fig. 32 Fig. 33 Fig. 34

piccola *macchia luminosa*. L'immagine ottenuta è quindi imperfetta. Un'immagine rigorosamente puntiforme di un punto luminoso non si ottiene neppure nei casi in cui secondo le leggi dell'ottica geometrica i raggi debbono intersecarsi esattamente in un punto. In seguito alla diffrazione della luce, l'immagine di un punto luminoso si presenta sotto forma di un circolo luminoso circondato da anelli chiari e scuri.

Una teoria *fisica* completa delle immagini ottiche deve tener conto delle *proprietà ondulatorie della luce*. Ma, tenendo conto della complessità di una tale teoria, è opportuno cominciare con la teoria *geometrica*. Bisogna prima esporre il procedimento di produzione delle immagini dal punto di vista più semplice, geometrico, e poi introdurre correzioni che tengano conto della natura ondulatoria della luce. La teoria geometrica è costruita sulla base delle sole leggi della riflessione e della rifrazione della luce, astraendo completamente dalla sua natura fisica. Non è certo possibile stabilire in questo modo le frontiere d'applicabilità della teoria geometrica. Lo si può fare solo in base alla teoria ondulatoria. Ma l'importanza della teoria ondulatoria risiede nel fatto che permette di precisare *ciò che è possibile in linea di principio nell'ottica,* e mostrare come si può raggiungere questo scopo.

2. L'insieme continuo dei punti dello spazio che costituiscono l'oggetto

di un sistema ottico si chiama *spazio degli oggetti,* mentre l'insieme continuo dei punti che sono le loro immagini è detto *spazio delle immagini.* Uno stesso punto può appartenere sia allo spazio degli oggetti sia a quello delle immagini a seconda che esso sia considerato *oggetto* o *immagine.* L'indice di rifrazione dello spazio degli oggetti viene indicato con n e quello dello spazio delle immagini con n'. Negli strumenti d'ottica i valori di n e n' sono sempre costanti, cioè non variano da un punto all'altro della porzione di spazio considerata. Se l'immagine è reale, n' rappresenta l'indice di rifrazione del mezzo *nel punto dove si è formata quest'immagine.* Nel caso di un'immagine virtuale n' non coincide necessariamente con l'indice di rifrazione nel punto P' dove si è formata l'immagine. Il valore di n' si riferisce al *mezzo effettivamente attraversato dai raggi reali, i cui prolungamenti s'intersecano nel punto* P'.

Esamineremo anche i casi in cui l'indice di rifrazione varia *con continuità* da un punto all'altro ed i raggi sono quindi *curvi.* Questo caso è praticamente realizzato nell'*ottica elettronica* dove le lenti sono sostituite con *campi elettrici* e *magnetici,* e l'indice di rifrazione è determinato dalla *velocità dell'elettrone* (si veda § 4).

3. Da un punto di vista matematico il problema della teoria geometrica delle immagini ottiche consiste nella determinazione della posizione dell'immagine per una qualsiasi posizione data dell'oggetto. In questo caso le proprietà generali dei sistemi ottici sono facilmente caratterizzate mediante la seguente proposizione. *Le lunghezze ottiche di tutti i raggi che uniscono i punti coniugati* P *e* P' *sono uguali.* Questo risultato è un fatto evidente quando l'immagine P' è reale, poiché allora l'onda sferica emessa da P si trasforma in un'onda sferica convergente in P'. *Le lunghezze ottiche di tutti i raggi tra due posizioni di uno stesso fronte d'onda sono uguali.* Ma questa proposizione può essere estesa anche alle *immagini virtùali,* anche se in questo caso non esistono raggi che uniscono P con P': si considerano allora le parti virtuali dei raggi, cioè il loro prolungamento rettilineo dalla parte dell'immagine P'. Per analogia con il termine «immagine virtuale» questo prolungamento può essere detto *raggio virtuale.*

La lunghezza ottica del raggio deve essere considerata *positiva* quando questa lunghezza è percorsa nella direzione di propagazione della luce (percorso reale); nel caso di un *tragitto virtuale* il cammino ottico è *negativo.* Per evitare ambiguità nel caso di immagini virtuali, supponiamo che lo spazio delle immagini sia *omogeneo,* cioè i raggi luminosi siano *rettilinei* in questo spazio. Ciò non significa assolutamente che l'immagine P' deve necessariamente formarsi là dove lo spazio è omogeneo. Si chiede solo che i raggi luminosi reali, i cui prolungamenti convergono in P', siano *rettilinei.*

Fatte queste osservazioni, passiamo alla dimostrazione della proposizione enunciata. Supponiamo che i raggi PAC e PBD (fig. 35) emessi dal punto P siano rettilinei nei tratti AC e BD. I loro prolungamenti s'intersecano nel punto P', che è l'immagine virtuale del punto P. Il fronte d'onda

in uno spazio delle immagini omogeneo ha la forma di una sfera CD con il centro in P'. È evidente che

$$(PAC) = (PBD), \quad (P'AC) = (P'BD).$$

Sottraendo membro a membro, otteniamo

$$(PA) - (P'A) = (PB) - (P'B).$$

Applicando la regola dei segni, si ha

$$(PA) - (P'A) = (PA) + (AP') = (PAP'),$$
$$(PB) - (P'B) = (PB) + (BP') = (PBP').$$

Quindi, $(PAP') = (PBP')$, come si voleva dimostrare.

La proprietà dimostrata è equivalente all'affermazione che *la luce impiega lo stesso tempo per percorrere i differenti raggi dalla sorgente puntiforme alla sua immagine.* Enunciata così, quest'affermazione si chiama *principio di tautocronismo* (uguaglianza dei tempi di propagazione). Utilizzeremo il principio di tautocronismo nello studio dei fenomeni d'interferenza.

Insieme alle immagini virtuali è necessario introdurre anche *sorgenti luminose virtuali,* o *oggetti virtuali.* Un oggetto puntiforme è detto *virtuale*
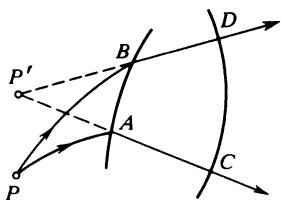
Fig. 35
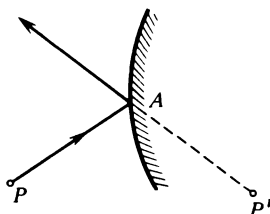
Fig. 36

se esso è il punto d'intersezione del prolungamento di raggi reali, tracciati in senso contrario alla propagazione della luce. Un oggetto virtuale può essere considerato come sorgente di *raggi virtuali.* Un insieme di oggetti virtuali puntiformi costituisce gli oggetti virtuali di dimensioni finite.

L'introduzione di oggetti e raggi virtuali permette di studiare insieme le immagini reali e virtuali. Non è più necessario studiare separatamente la rifrazione e la riflessione della luce, e questo è molto importante nella teoria degli strumenti ottici contenenti un gran numero di superfici rifrangenti e riflettenti. Infatti, sia P' l'immagine virtuale del punto P ottenuta per riflessione della luce da uno specchio (fig. 36). Conformemente alla regola dei segni da noi adottata, il cammino ottico AP' del raggio virtuale è negativo. Pertanto la lunghezza ottica del cammino PAP' può essere espressa

da

$$(PAP') = n|PA| - n|AP'| = n|PA| + n'|AP'|,$$

dove $n' = -n$. Quindi *la riflessione, da un punto di vista matematico, può essere formalmente considerata come una rifrazione, attribuendo all'indice di rifrazione n' un valore negativo ($n'/n = -1$).*

Problemi

1. Due mezzi omogenei di indici di rifrazione n e n' sono in contatto lungo una frontiera S (fig. 37) che è una superficie di rivoluzione attorno all'asse OP' (asse ottico). Trovare la forma che deve assumere la superficie S affinché essa sia stigmatica per una coppia di punti P e P' dell'asse ottico, di cui P sia all'infinito e P' occupi una posizione arbitraria.

Soluzione. Prendiamo l'asse ottico come asse X, poniamo l'origine delle coordinate nel punto in cui l'asse X interseca la superficie S ed orientiamo l'asse Y verso l'alto perpendicolarmente all'asse ottico. Essendo i cammini ottici dal punto all'infinito P al piano OA uguali, la
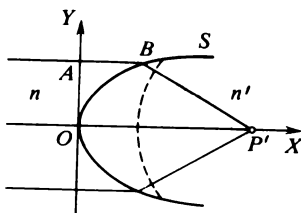
Fig. 37

condizione che la superficie S sia stigmatica si esprime con l'uguaglianza $(ABP') = (OP')$, ossia

$$nx + n'\sqrt{(x-q)^2 + y^2} = n'q,$$

dove x ed y sono le coordinate correnti dei punti della superficie S e q è l'ascissa del punto P'. Portando nx al secondo membro ed elevando al quadrato, troviamo l'equazione della superficie cercata

$$(n'^2 - n^2)x^2 + n'^2y^2 - 2n'(n' - n)qx = 0. \qquad (9.1)$$

Supponiamo dapprima che $n'^2 - n^2 > 0$. Allora l'equazione (9.1) rappresenta un ellissoide di rivoluzione di semiassi

$$a = \frac{n'}{n' + n}q, \quad b = \sqrt{\frac{n' - n}{n' + n}}q.$$

L'ellissoide è allungato nella direzione dell'asse X. La sua eccentricità è uguale a

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{n}{n'} < 1.$$

L'immagine P' è reale.

Sia ora $n'^2 - n^2 < 0$. Allora la (9.1) è l'equazione di un iperboloide di rivoluzione a

due falde di semiassi

$$a = \frac{n'}{n' + n} q, \quad b = \sqrt{\frac{n - n'}{n' + n}} q$$

e d'eccentricità

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{n}{n'} > 1.$$

L'immagine P' è virtuale (fig. 38).

Consideriamo infine il caso in cui $n'^2 - n^2 = 0$. Ciò avviene sia per $n' - n = 0$ che per $n' + n = 0$. La prima possibilità non ci interessa poiché corrisponde al caso banale in cui i due mezzi contigui sono otticamente identici. La seconda possibilità $n' = -n$ può essere realizzata in seguito alla riflessione della luce, ed in questo caso l'equazione (9.1) si trasforma in

$$y^2 = 4qx \tag{9.2}$$

e rappresenta un paraboloide di rivoluzione di parametro $p = 2q$ (specchio parabolico). Se $q > 0$ (fig. 34), il fuoco P' (nella fig. 34 punto F) è virtuale. Se $q < 0$ (fig. 33), il fuoco è reale. Abbiamo già studiato questi due casi precedentemente.

Le soluzioni di questo problema suggeriscono un procedimento di costruzione di una *lente perfetta* per una coppia di punti coniugati uno dei quali sia all'infinito. Consideriamo prima
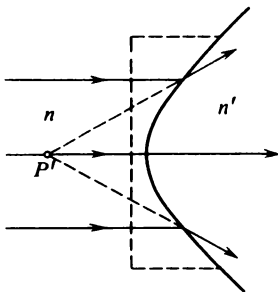
Fig. 38

una lente limitata dalla superficie OB di un ellissoide di rivoluzione e da una superficie sferica con centro in P' (nella fig. 37 questa superficie è rappresentata con un tratteggio). L'eccentricità dell'ellissoide deve essere uguale a $1/n$, dove n è l'indice di rifrazione della lente rispetto all'ambiente. Un fascio di raggi paralleli, cadendo sulla superficie ellissoidale, si trasforma dopo la rifrazione in un fascio di raggi convergenti in P'. La superficie posteriore (sferica) della lente non modifica le direzioni dei raggi, poiché il suo centro si trova nel punto di convergenza P'. Dunque, la lente considerata raccoglie tutti i raggi paralleli rigorosamente nel solo punto P'. Se mettiamo in P' una sorgente luminosa puntiforme, dopo aver attraversato la lente il fascio di raggi diventerà esattamente parallelo all'asse ottico.

Consideriamo ora una lente limitata da un lato da una superficie piana (rappresentata con un tratteggio in fig. 38) e dall'altro lato da un iperboloide di rivoluzione di eccentricità n. Quando un fascio di raggi paralleli cade sulla faccia piana della lente, la attraversa senza modificare la sua direzione, e dopo la rifrazione sulla superficie dell'iperboloide si trasforma in un fascio di raggi divergenti, i cui prolungamenti s'intersecano esattamente nel solo punto P'.

2. Trovare l'equazione di un ovale di Cartesio (si veda § 7, punto 6).

Soluzione. Siano $P(q, 0)$ e $P'(q', 0)$ due punti coniugati per i quali la superficie ottenuta con la rotazione di un ovale di Cartesio rispetto all'asse di simmetria PP' sia stigmatica. Mettiamo l'origine delle coordinate nel punto d'intersezione tra l'ovale e la retta PP'. Allora, per definizione di superficie stigmatica

$$n\sqrt{(x-q)^2+y^2}+n'\sqrt{(x-q')^2+y^2}=n'q'-nq.$$

Eliminando i radicali, otteniamo l'equazione dell'ovale di Cartesio

$$\begin{aligned}(n^2-n'^2)(x^2+y^2)+4(n^2-n'^2)(n'^2q'-n^2q)(x^2+y^2)x+\\+4nn'(nq-n'q')(nq'-n'q)(x^2+y^2)+4(n'^2q'-n^2q)^2x^2+\\+8nn'(n'-n)(nq-n'q')qq'x=0.\end{aligned} \tag{9.3}$$

Per certi valori dei parametri n, n', q, q' l'ovale di Cartesio degenera in una superficie del secondo ordine e si ritrovano i casi illustrate nelle figg. 32, 33, 34, 37 e 38.

§ 10. *Rifrazione su una superficie sferica. Specchi sferici e lenti sottili*

1. I più importanti strumenti ottici e le loro componenti appartengono ai cosiddetti *sistemi ottici centrati.* Questi sistemi sono costituiti da mezzi rifrangenti o riflettenti otticamente omogenei separati l'uno dall'altro da superfici sferiche i cui centri di curvatura sono situati su una stessa retta detta *asse ottico principale* del sistema. Di solito, se ciò non implica inconvenienti, ometteremo l'aggettivo «principale».

2. Cominciamo dal caso più semplice: una superficie rifrangente sferica che separa due mezzi omogenei di indici di rifrazione n e n' (diottro sferico). Si può supporre (benché ciò non sia necessario) che questa superficie possieda una *simmetria di rivoluzione* rispetto ad una delle rette OC passanti per il *centro di curvatura* della superficie sferica (fig. 39). Questa retta è l'asse ottico principale che prendiamo come asse X. Mettiamo l'origine delle coordinate nel punto O in cui l'asse ottico principale interseca la superficie sferica.

In seguito alla simmetria di rivoluzione è sufficiente considerare il percorso dei raggi nel piano coordinato XY, che facciamo coincidere con il piano della figura. Se la direzione in cui si misurano le ascisse coincide con quella della propagazione della luce lungo l'asse ottico, le ascisse sono *positive*; nel caso contrario *negative.* La stessa convenzione vale per tutti gli altri segmenti orientati. Ad esempio, nella fig. 39 l'ascissa del punto P è negativa e quella del punto P' è positiva. L'ordinata è considerata positiva se il corrispondente punto si trova al di sopra dell'asse ottico, e negativa se esso si trova al di sotto.

Supponiamo che una sorgente puntiforme si trovi sull'asse ottico del sistema (fig. 39). Un raggio arbitrario PA dopo aver subìto una rifrazione sulla superficie sferica procederà lungo il cammino AP'. Indichiamo con u ed u' le lunghezze dei segmenti AP e AP'. Queste lunghezze sono calcolate

a partire dal punto A positivamente o negativamente a seconda che la loro direzione sia parallela o antiparallela alla direzione di propagazione della luce. Dalla figura segue che

$$\text{area } PAC + \text{area } CAP' = \text{area } PAP'.$$

Essendo $u < 0$, $u' > 0$, per queste aree si può scrivere

area $PAC = 1/2|PA|\cdot|AC| \sin\varphi = -1/2uR \sin\varphi$,
area $CAP' = 1/2u'R \sin\psi$,
area $PAP' = -1/2uu' \sin(\varphi - \psi) = -1/2uu'(\sin\varphi \cos\psi - \sin\psi \cos\varphi)$.

Qui R è il raggio di curvatura della superficie rifrangente, calcolato a partire dalla superficie sferica verso il suo centro (nella fig. 39 il raggio R è positivo). Dunque,

$$-uR \sin\varphi + u'R \sin\psi = -uu'(\sin\varphi \cos\psi - \sin\psi \cos\varphi).$$

Secondo la legge della rifrazione $\sin\varphi/\sin\psi = n'/n$, e quindi

$$-u'Rn' + u'Rn = uu'(n \cos\varphi - n' \cos\psi),$$

da cui

$$\frac{n}{u} - \frac{n'}{u'} = \frac{n \cos\varphi - n' \cos\psi}{R}. \tag{10.1}$$

La posizione del punto P' dipende dall'angolo d'inclinazione α del raggio incidente rispetto all'asse ottico. Limitiamoci però a piccoli angoli α e
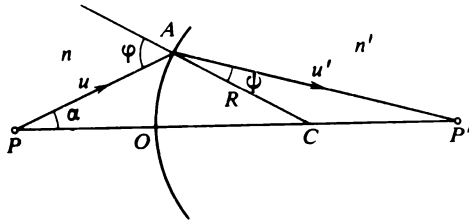
Fig. 39

supponiamo che gli angoli φ e ψ siano piccoli anch'essi. I raggi che soddisfano queste condizioni sono detti *raggi parassiali.* Si può ammettere allora che

$$\cos\varphi = \cos\psi = 1, \quad AP \approx OP = x, \quad AP' \approx OP' = x'.$$

In quest'approssimazione la formula (10.1) diventa

$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{n - n'}{R}. \tag{10.2}$$

Ne segue che nell'approssimazione considerata la posizione del punto P' è indipendente dall'angolo α. Quindi, tutti i raggi parassiali emessi da uno stesso punto dell'asse ottico, dopo aver subìto la rifrazione sulla superficie sferica, s'intersecano approssimativamente in un punto situato sull'asse ottico. Il punto P' sarà perciò l'*immagine ottica del punto P per raggi parassiali.* In tutto ciò che segue si suppone che tutti i raggi passanti attraverso sistemi centrati siano parassiali.

Durante la dimostrazione abbiamo supposto che la sorgente luminosa P fosse reale, ma quanto detto sopra è valido anche per una sorgente virtuale, cioè quando il ruolo di sorgente luminosa è assunto dal punto di convergenza dei prolungamenti dei raggi incidenti. Possiamo facilmente convincercene ripetendo i ragionamenti precedenti nel caso della fig. 40.
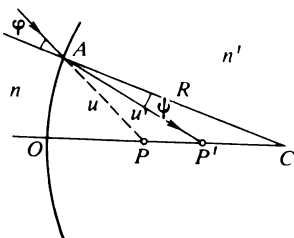
Fig. 40

Ponendo formalmente $n' = -n$, dalla (10.2) otteniamo la formula dello specchio sferico

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{R}. \tag{10.3}$$

3. Consideriamo ora il caso in cui la sorgente puntiforme P non sia situata sull'asse ottico principale (fig. 41). Tracciamo la retta PC che unisce il punto P con il centro di curvatura della superficie rifrangente. Questa retta può essere considerata come un asse ottico (asse secondario), riducen-
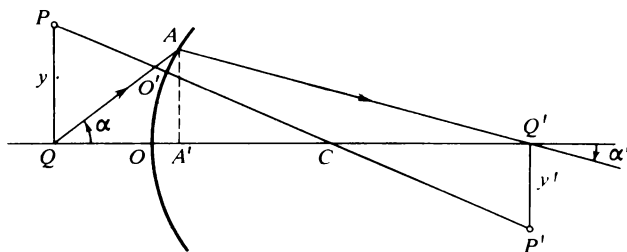
Fig. 41

do così il caso in esame a quello precedente. Per i raggi parassiali $O'P \approx OQ$, $O'P' \approx OQ'$ (qui Q e Q' sono le proiezioni dei punti P e P' sull'asse ottico principale). L'ascissa x' del punto P' è definita dall'equazione (10.2), e l'ordinata y' dalla relazione

$$\frac{y'}{y} = -\left|\frac{CQ'}{CQ}\right| = \frac{x' - R}{x - R},$$

che segue dalla similitudine dei triangoli PCQ e $P'CQ'$. Si ottiene dunque

$$x' = \frac{n'Rx}{(n' - n)x + nR}, \quad y' = \frac{nRy}{(n' - n)x + nR}. \tag{10.4}$$

Tracciamo per il punto Q un raggio parassiale arbitrario QA che forma con l'asse ottico principale un certo angolo α. L'angolo d'inclinazione del raggio rifratto AQ' rispetto allo stesso asse sia α'. Gli angoli sono misurati a partire dall'asse ottico principale verso il raggio. Se questa direzione è opposta a quella di rotazione delle lancette d'orologio, l'angolo è considerato positivo; nel caso contrario esso deve essere considerato negativo (nella fig. 41 l'angolo α è positivo e l'angolo α' è negativo). Abbassiamo dal punto A la perpendicolare AA' sull'asse ottico principale. Nell'approssimazione dell'ottica parassiale la sua lunghezza può essere espressa nella forma $|AA'| = -x\alpha = -x'\alpha'$. Quindi, $x\alpha = x'\alpha'$. Ma dalle formule (10.4) segue che

$$\frac{x'}{x} = \frac{n'y'}{ny}, \tag{10.5}$$

e quindi

$$ny\alpha = n'y'\alpha'. \tag{10.6}$$

Dunque, la quantità $ny\alpha$ non varia in seguito alla rifrazione dei raggi parassiali su una superficie sferica. Questa quantità si dice *invariante di Lagrange-Helmholtz* e l'uguaglianza (10.6) esprime il *teorema di Lagrange-Helmholtz*. Questo teorema è evidentemente valido per sistemi ottici centrati costituiti da un numero qualsiasi di superfici sferiche rifrangenti e riflettenti.

Le formule (10.4) possono essere la base della teoria geometrica di ogni sistema centrato per raggi parassiali. Applicandole alla prima superficie rifrangente di un sistema complesso, troviamo la posizione dell'immagine formata in seguito alla rifrazione su questa prima superficie. L'immagine ottenuta funge da oggetto per la rifrazione sulla seconda superficie sferica. Applicando le stesse formule (10.4) si può trovare la posizione della seconda immagine intermedia formata per rifrazione sulla seconda superficie sferica, ecc. In fin dei conti mediante un'applicazione successiva delle formule (10.4) ad ogni superficie rifrangente si può trovare la posizione dell'immagine finale formata dall'intero sistema.

4. A titolo d'esempio consideriamo una lente sottile delimitata da superfici sferiche di raggi di curvatura R_1 e R_2. L'indice di rifrazione relativo della lente sia n, prendendo come unità l'indice di rifrazione del mezzo ambiente. Supponiamo che un oggetto puntiforme P si trovi sull'asse ottico principale della lente. Trascuriamo lo spessore della lente e mettiamo l'origine delle coordinate nel suo centro. Indichiamo con x l'ascissa del punto P e con x_1 l'ascissa della sua immagine intermedia P_1 formata per rifrazione dei raggi sulla prima superficie della lente. L'ascissa x_1 si può trovare con l'aiuto della formula (10.2) eseguendo in essa le seguenti sostituzioni: $n \to 1$, $n' \to n$, $x' \to x_1$, $R \to R_1$. Si ottiene

$$\frac{1}{x} - \frac{n}{x_1} = \frac{1-n}{R_1}.$$

Consideriamo l'immagine intermedia P_1 come oggetto per la rifrazione della luce sulla seconda superficie sferica della lente. L'immagine del punto P formata da questa seconda rifrazione, è l'immagine risultante P' data dalla lente. L'ascissa x' del punto-immagine P' è ottenuta dalla formula (10.2) dopo aver effettuato le seguenti sostituzioni: $n' \to 1$, $x \to x_1$, $R \to R_2$. Troviamo allora

$$\frac{n}{x_1} - \frac{1}{x'} = \frac{n-1}{R_2}.$$

Sommando le due espressioni, otteniamo

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{10.7}$$

Questa è la formula ben nota delle lenti sottili

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = -\frac{1}{f}. \tag{10.8}$$

La distanza focale f è definita mediante la formula

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{10.9}$$

Questa formula è valida per tutte le lenti sottili: biconvesse, biconcave, piano-convesse, ecc. È necessario rispettare la regola dei segni enunciata al punto 2 del presente paragrafo. Per esempio, per una lente biconvessa $R_1 > 0$, $R_2 < 0$, e quindi la distanza focale f è positiva. Per una lente biconcava $R_1 < 0$, $R_2 > 0$ e la distanza focale f è negativa. (In entrambi i casi si suppone che $n > 1$.)

§ 11. *Proprietà generali dei sistemi ottici centrati*

1. Le proprietà dei sistemi ottici centrati per raggi parassiali furono oggetto di studi sistematici effettuati da Gauss (1777-1855) nel 1841. L'ottica dei raggi parassiali è spesso chiamata *ottica gaussiana* (*approssimazione di Gauss*). Esponendo le questioni concernenti quest'ottica applicheremo il *metodo analitico* che è meno evidente di quello geometrico, ma è più semplice e più sistematico.

Nel caso di una sola superficie rifrangente le coordinate x, y del punto-oggetto sono legate alle coordinate x', y' del punto-immagine mediante le formule (10.4). In queste formule viene utilizzato lo stesso sistema di coordinate per lo spazio degli oggetti e quello delle immagini. Scegliamo ora in questi spazi, *sistemi di coordinate differenti* che sono ottenuti dal sistema di partenza mediante una traslazione lungo l'asse ottico principale. Le origini delle coordinate di questi sistemi sono situate sull'asse ottico principale, ma possono anche non coincidere. Con questi due sistemi le formule (10.4) si trasformano in

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad y' = \frac{e.}{cx + d}y,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti che si possono facilmente calcolare se sono note le posizioni delle origini delle coordinate ed i parametri della superficie sferica rifrangente. Queste formule stabiliscono una corrispondenza tra i punti dello spazio degli oggetti e quelli dello spazio delle immagini. Questa corrispondenza è detta *corrispondenza collineare* (più precisamente, *corrispondenza collineare a simmetria assiale*).

Supponiamo ora che dopo aver attraversato la prima superficie rifrangente i raggi subiscano una rifrazione sulla seconda superficie sferica. Allora si ottiene la seconda immagine P'' di coordinate x'', y''. Queste coordinate sono legate alle coordinate x', y' da formule della stessa forma, cioè

$$x'' = \frac{a'x' + b'}{c'x' + d'}, \quad y'' = \frac{e'}{c'x' + d'}y'$$

con nuovi coefficienti a', b', c', d', e'. Eliminiamo da queste relazioni e da quelle precedenti le coordinate x', y' dell'immagine intermedia P'. Possiamo facilmente convincerci che mediante questo procedimento si ottengono nuovamente le formule di corrispondenza collineare:

$$x'' = \frac{a''x + b''}{c''x + d''}, \quad y'' = \frac{e''}{c''x + d''}y,$$

i cui coefficienti a'', b'', c'', d'', e'' possono essere espressi con i dieci coefficienti a, b, ..., d', e'. Dunque, *due o più corrispondenze collineari successive sono equivalenti ad una sola corrispondenza collineare*. Quindi,

per ogni sistema centrato nell'approssimazione di Gauss (*raggi parassiali*) *si può stabilire una corrispondenza collineare tra i punti dello spazio degli oggetti e quelli dello spazio delle immagini.* Questa corrispondenza può essere espressa con formule del tipo

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad y' = \frac{e}{cx + d} y, \quad z' = \frac{e}{cx + d} z. \qquad (11.1)$$

Qui abbiamo aggiunto una formula per le coordinate z e z'. In virtù della simmetria assiale essa coincide con la corrispondente formula per y ed y'.

La corrispondenza collineare è determinata da *quattro parametri* che possono essere uguali ai rapporti di *quattro tra i coefficienti a, b, c, d ed e con il quinto.* Pertanto qualsiasi sistema centrato è caratterizzato da *quattro parametri.*

Risolvendo le equazioni (11.1) rispetto a x, y, z, otteniamo

$$x = \frac{a'x' + b'}{c'x' + d'}, \quad y = \frac{e'}{c'x' + d'} y', \quad z = \frac{e'}{c'x' + d'} z', \qquad (11.2)$$

in cui

$$b' = b, \quad c' = c, \quad a' = -d, \quad d' = -a, \quad e' = \frac{bc - ad}{e}. \qquad (11.3)$$

La trasformazione inversa è dunque anch'essa espressa da formule di corrispondenza collineare, il che è evidentemente una conseguenza della reversibilità del cammino ottico (si veda § 10, punto 1).

2. Le formule di corrispondenza collineare permettono di mettere in evidenza le seguenti proprietà delle immagini ottiche formate dai sistemi centrati.

1) *Ad ogni piano nello spazio degli oggetti corrisponde un piano nello spazio delle immagini.* Infatti, l'equazione di un piano nello spazio degli oggetti è del tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Sostituendo le coordinate x, y, z con x', y', z' date dalle formule (11.2), otteniamo un'equazione della forma

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0,$$

che è l'equazione di un piano nello spazio delle immagini.

2) *Una retta dello spazio degli oggetti ha come immagine una retta,* poiché ogni retta può essere considerata come la linea d'intersezione di due piani.

3) *Un punto dello spazio degli oggetti ha come immagine un punto,* poiché ogni punto può essere considerato come punto d'intersezione di tre piani.

3. Dalle formule (11.1) segue che a valori finiti di x, y, z corrispondono in generale valori finiti di x', y', z', eccezion fatta per i punti appartenenti al piano

$$cx + d = 0. \qquad (11.4)$$

Ogni punto di questo piano è rappresentato da un punto infinitamente lontano. Ciò significa che tutti i raggi emessi da uno stesso punto del piano (11.4) diventano paralleli dopo aver attraversato il sistema ottico. Il piano (11.4) è detto *piano focale dello spazio degli oggetti,* o *piano focale anteriore del sistema ottico.* In modo analogo, il piano

$$c'x' + d' = 0 \qquad (11.5)$$

si chiama *piano focale dello spazio delle immagini,* o *piano focale posteriore del sistema ottico.* I raggi paralleli, dopo aver attraversato il sistema ottico, s'intersecano in uno dei punti di questo piano.

I punti d'intersezione dei piani focali con l'asse ottico principale si chiamano *punti focali* o *fuochi principali del sistema ottico.* Il fuoco principale dello spazio degli oggetti (*fuoco principale anteriore*) viene indicato con F e quello dello spazio delle immagini (*fuoco principale posteriore*) con F'. Secondo le formule (11.4), (11.5) e (11.3) le ascisse dei fuochi principali sono definite dalle seguenti espressioni:

$$x_F = -\frac{d}{c}, \quad x'_{F'} = -\frac{d'}{c'} = \frac{a}{c}. \qquad (11.6)$$

Un sistema può anche essere privo di piani focali. Ciò ha luogo quando $c = 0$, e quindi $c' = 0$. Questi sistemi si dicono *afocali* o *telescopici* e sono il caso limite di sistemi usuali quando entrambi i piani focali vengono spostati all'infinito. Dopo aver attraversato un sistema afocale, ogni fascio di raggi paralleli resta parallelo e possono variare solo la sua larghezza e direzione. Un esempio di sistema afocale è il cannocchiale astronomico (telescopio) regolato all'infinito. In questo caso il piano focale posteriore dell'obiettivo è fatto coincidere con quello anteriore dell'oculare.

Consideriamo ora sistemi aventi distanze focali finite.

4. Il rapporto y'/y si chiama *ingrandimento trasversale* del sistema, o semplicemente *ingrandimento.* Secondo le formule (11.1) o (11.2), il suo valore non dipende da y e z. Ne segue che l'*immagine di un oggetto piano perpendicolare all'asse ottico principale è simile all'oggetto stesso.* Se l'ingrandimento è positivo, l'immagine è *diritta.* Nel caso contrario l'immagine è *rovesciata.*

Si dicono *piani principali di un sistema ottico* due piani coniugati per i quali l'ingrandimento $y'/y = +1$. Si possono ottenere le equazioni di questi piani, ponendo nelle formule (11.1) e (11.2) $y' = y$

$$cx + d - e = 0, \quad c'x' + d' - e' = 0. \qquad (11.7)$$

Il primo piano si dice *piano principale dello spazio degli oggetti* (*piano principale anteriore*) ed il secondo *piano principale dello spazio delle immagini* (*piano principale posteriore*). I punti d'intersezione con l'asse ottico principale si chiamano *punti principali del sistema centrato*. Indichiamo con H il punto principale nello spazio degli oggetti, e con H' quello nello spazio delle immagini. Ponendo $y = y'$ nelle formule (11.1) e (11.2), troviamo le ascisse dei punti principali:

$$x_H = \frac{e - d}{c}, \quad x'_{H'} = \frac{e' - d'}{c'} = \frac{bc + a(e - d)}{ec}. \tag{11.8}$$

5. I punti principali e focali di un sistema centrato si chiamano *punti cardinali*. Visto che la corrispondenza collineare dipende da quattro parametri, la posizione dei quattro punti cardinali definisce completamente la corrispondenza collineare. I punti principali e focali caratterizzano completamente un sistema ottico nel senso che, conoscendo la posizione di questi punti, è possibile trovare per ogni oggetto l'immagine formata da questo sistema.

Supponiamo che l'oggetto P sia puntiforme e non sia situato sull'asse ottico principale del sistema (fig. 42). Abbassiamo dal punto P la perpendicolare PQ su questo asse. Il raggio PA parallelo all'asse ottico principale o
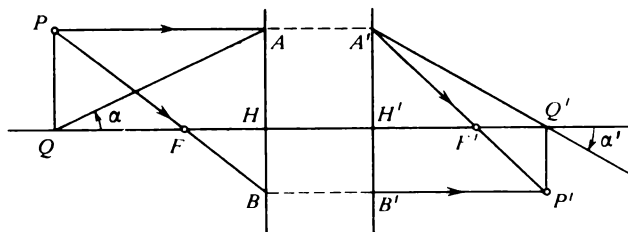
Fig. 42

il suo prolungamento nello spazio delle immagini incontra i piani principali nei punti coniugati A ed A'. Pertanto, dopo aver attraversato il sistema ottico, questo raggio o il suo prolungamento passa per il punto A' e per il fuoco posteriore F'. La posizione del raggio nello spazio delle immagini è completamente definita dai due punti A' e F'. Tracciamo ora un secondo raggio PF che passi per il fuoco anteriore F. Questo raggio o il suo prolungamento incontra il piano principale anteriore nel punto B. Tracciando la retta $BB'P'$ parallela all'asse ottico principale, troviamo la posizione di raggio $B'P'$ nello spazio delle immagini. Il punto P', nel quale s'intersecano i raggi $A'P'$ e $B'P'$, è proprio l'immagine del punto P. Inoltre, la proiezione Q del punto P sull'asse ottico principale ha come immagine la proiezione del punto P' sullo stesso asse. Si arriva così ad una regola di co-

struzione dell'immagine di un punto che si trova sull'asse ottico principale. Il segmento QP ha per immagine il segmento $Q'P'$.

Le distanze tra i punti principali ed i corrispondenti punti focali sono dette *distanze focali principali* del sistema. Denotiamo con f la distanza focale nello spazio degli oggetti e con f' quella nello spazio delle immagini. Conformemente alla regola dei segni da noi adottata la distanza focale è considerata positiva se la luce incidente si propaga dal fuoco principale verso il corrispondente piano principale. Le distanze focali sono definite dalle formule

$$f = x_H - x_F = \frac{e}{c}, \quad f' = x'_{H'} - x'_{F'} = \frac{e'}{c'} = \frac{bc - ad}{ce}. \tag{11.9}$$

Le formule (11.1) e (11.2) si possono semplificare mediante una scelta conveniente delle origini delle coordinate. Consideriamo i due casi più importanti.

6. Caso 1. Le origini delle coordinate coincidono con i punti principali H e H'. Indichiamo con ξ e ξ' le ascisse in questi sistemi di coordinate e con η e η' le ordinate. È evidente che $\eta = y$, $\eta' = y'$, e per la scelta stessa delle origini delle coordinate $\xi_H = \xi'_{H'} = 0$. Pertanto dalla (11.8) segue: $e = d$, $b = 0$. Le formule (11.1) diventano

$$\xi' = \frac{a\xi}{c\xi + d}, \quad \eta' = \frac{d}{c\xi + d}\eta.$$

Le ascisse dei punti focali, in virtù delle relazioni (11.6), sono $\xi_F = -d/c$, $\xi'_{F'} = a/c$, le distanze focali sono $f = d/c$, $f' = -a/c$. Eliminando con l'aiuto di queste relazioni i coefficienti a, c, d, otteniamo

$$\xi' = \frac{f'\xi}{f - \xi}, \quad \eta' = \frac{f\eta}{f - \xi}. \tag{11.10}$$

La prima di queste formule può anche essere scritta nella forma

$$\frac{f}{\xi} + \frac{f'}{\xi'} = -1. \tag{11.11}$$

Come si vede dalla fig. 42, $HA = -\xi\alpha$, $H'A' = -\xi'\alpha'$. Essendo $HA = H'A'$, si ha $\xi\alpha = \xi'\alpha'$. Inoltre, dalle equazioni (11.10) troviamo: $f\eta\xi' = -f'\eta'\xi$, cosicché

$$f\eta\alpha = -f'\eta'\alpha'. \tag{11.12}$$

Ma secondo il teorema di Lagrange-Helmholtz $n\eta\alpha = n'\eta'\alpha'$, e quindi

$$\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}. \tag{11.13}$$

Questa è la relazione tra le distanze focali f e f'.

Supponiamo, come spesso accade, che il mezzo da entrambe le parti del sistema ottico sia lo stesso. Se il sistema dato contiene un numero pari di riflessioni (tale sistema è detto *diottrico*), $n = n'$ e quindi $f = -f'$. In questo caso la formula (11.11) si trasforma nella *formula delle lenti*

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \tag{11.14}$$

Se, invece, il sistema ha un numero dispari di superfici riflettenti (sistema detto *catottrico*), si ha $n = -n'$ e quindi $f = f'$. Allora la formula (11.11) si trasforma nella *formula degli specchi*

$$\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \tag{11.15}$$

Nei sistemi diottrici le direzioni di propagazione della luce incidente e di quella trasmessa sono le stesse e sono contrarie nei sistemi catottrici.

7. Caso 2. Le origini dei sistemi di coordinate siano nei fuochi principali F e F'. Indichiamo con X e X' le ascisse e con Y e Y' le ordinate in questi sistemi coordinati. È evidente che $Y = y = \eta$, $Y' = y' = \eta'$. Inoltre, per la scelta stessa delle origini delle coordinate $X_F = X'_{F'} = 0$. Quindi, deve essere $a = d = 0$, $b/c = ff'$, $e/c = f$, come è facile ricavare dalle formule (11.6) e (11.9). Le formule (11.1) diventano allora

$$XX' = ff', \tag{11.16}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{X} = \frac{X'}{f'}. \tag{11.17}$$

Queste formule semplici erano note anche a Newton (per casi particolari).

8. Vengono classificati come punti cardinali, insieme con quelli principali e focali, anche i *punti nodali.* Questi punti nodali compaiono del tutto naturalmente quando si considerano gli *ingrandimenti angolari* del sistema. L'ingrandimento angolare è il rapporto α'/α tra gli angoli formati dal raggio incidente e da quello emergente con l'asse ottico principale. Si chiamano *punti nodali due punti coniugati K e K' situati sull'asse ottico principale* in cui si formano immagini con ingrandimento angolare uguale a $+1$. Ciò significa che ogni raggio passante per il punto nodale K, dopo aver attraversato il sistema ottico, resta parallelo alla sua direzione iniziale e passa per il secondo punto nodale K'. Per dimostrare l'esistenza dei punti nodali e per determinare la loro posizione poniamo nella formula (10.6) $\alpha = \alpha'$. Ciò dà $ny = n'y'$ o in virtù della formula (11.13) $y'/y = -f/f'$. Confrontando questo risultato con le formule (11.17), troviamo le ascisse dei punti nodali rispetto ai punti focali

$$X_K = -f', \quad X'_{K'} = -f, \tag{11.18}$$

o in base alla definizione delle distanze focali

$$FK = H'F', \quad F'K' = HF. \tag{11.19}$$

Ciò conduce alla seguente regola di determinazione dei punti nodali. I segmenti HF e $H'F'$ vengono fatti traslare parallelamente a sé stessi fino a che i loro punti iniziali coincidano con i fuochi F' e F, rispettivamente. Allora le estremità F e F' di questi segmenti indicano la posizione dei punti nodali K' e K (fig. 43). Se $n' = n$, si ha $f' = -f$. In questo caso i punti nodali coincidono con quelli principali. I punti nodali possono anche essere utilizzati per la costruzione delle immagini ottiche nei sistemi ottici centrati.
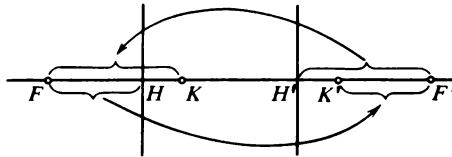
Fig. 43

A volte vengono considerati punti cardinali anche i *punti principali inversi* e *nodali inversi* (*antiprincipali ed antinodali*). I punti antiprincipali sono caratterizzati da un ingrandimento lineare uguale a -1, mentre quelli antinodali da un ingrandimento angolare uguale anch'esso a -1. Non è difficile dimostrare l'esistenza e determinare la posizione di queste coppie di punti.

9. Il rapporto tra la lunghezza $\delta X'$ dell'immagine di un segmento infinitesimo, parallelo all'asse ottico prinɵipale, e la lunghezza δX del segmento stesso si chiama *ingrandimento assiale* o *longitudinale*. Questo ingrandimento, dalla formula (11.16), risulta essere

$$\frac{\delta X'}{\delta X} = -\frac{X'}{X} = -\frac{ff'}{X^2} = -\frac{X'^2}{ff'}. \tag{11.20}$$

Il confronto di queste formule con la (11.17) mostra che *l'ingrandimento assiale in genere è diverso da quello trasversale.* Ne segue che *l'immagine di un oggetto di volume infinitamente piccolo in un sistema ottico centrato non è in generale simile all'oggetto stesso. Un'eccezione a questa regola si osserva nel caso in cui l'oggetto venga posto in uno dei punti nodali o antinodali del sistema.* Infatti, affinché l'immagine di un oggetto di volume infinitamente piccolo sia simile all'oggetto dato, è necessario e sufficiente che l'ingrandimento assiale sia uguale in modulo all'ingrandimento trasversale, cioè

$$\frac{ff'}{X^2} = \pm\frac{f}{X}.$$

Di qui $X = \pm f'$. Le formule (11.17) e (11.13) danno

$$\frac{Y'}{Y} = \pm \frac{f}{f'} = \mp \frac{n}{n'}.$$

Applicando il teorema di Lagrange-Helmholtz (10.6), otteniamo $\alpha = \pm \alpha'$, come si voleva dimostrare.

Se il sistema è diottrico (si veda punto 6), f e f' hanno segni contrari, e quindi, come si vede dalla (11.17), δX e $\delta X'$ hanno lo stesso segno. Ne segue che se l'oggetto si sposta lungo l'asse ottico, la sua immagine si sposta *nello stesso senso*. Al contrario, per un sistema catottrico, se l'oggetto si sposta lungo l'asse ottico la sua immagine si sposta *nel senso opposto*. Dato che nei sistemi diottrici le direzioni di propagazione della luce negli spazi degli oggetti e delle immagini sono le stesse ed in quelli catottrici sono contrarie, per tutti i sistemi vale la seguente regola:

Se l'oggetto si sposta lungo l'asse ottico nel senso di propagazione della luce incidente, la sua immagine si sposta nel senso di propagazione della luce trasmessa, e viceversa.

10. Nel caso di un sistema telescopico $c = 0$, ma il coefficiente d non deve annullarsi, altrimenti le formule (11.1) perdono significato. Anche i coefficienti a ed e non devono essere nulli, poiché in caso contrario otterremmo dalle formule (11.1) $x' =$ costante, $y' = 0$, $z' = 0$, cioè ogni punto avrebbe come immagine sempre lo stesso punto. Questo caso non si realizza mai nei sistemi ottici, per cui ha solo un carattere puramente matematico. Dunque, per un sistema telescopico $c = 0$, $d \neq 0$, $a \neq 0$, $e \neq 0$. Quindi, deve essere $c' = 0$, $d' \neq 0$, $a' \neq 0$, $e' \neq 0$, come segue dalle formule (11.3). Il sistema telescopico può essere considerato come il caso limite di un sistema focale, in cui entrambi i punti focali sono all'infinito ($x_F = \pm\infty$, $x'_{F'} = \pm\infty$). Entrambe le distanze focali f e f' sono infinitamente grandi, e tuttavia il loro rapporto $f/f' = -n/n'$ resta finito.

Per un sistema telescopico le formule (11.1) assumono la seguente forma:

$$x' = Ax + C, \qquad y' = By, \tag{11.21}$$

dove $A = a/d$, $B = e/d$, $C = b/d$ sono costanti. Ne segue che *ogni fascio luminoso parallelo dopo aver attraversato un sistema telescopico resta parallelo.* Le costanti A e B non sono indipendenti. Infatti, le formule (11.9) per i sistemi telescopici danno

$$\frac{f}{f'} = -\frac{e^2}{ad} = -\frac{B^2}{A},$$

da cui, in base alla (11.13),

$$\frac{B^2}{A} = \frac{n}{n'}. \tag{11.22}$$

Se prendiamo come origini dei sistemi di coordinate una coppia di punti coniugati qualsiasi dell'asse ottico, le formule (11.21) si semplificano

$$x' = Ax, \qquad y' = By. \tag{11.23}$$

Dunque, *gli ingrandimenti assiale e trasversale di un sistema telescopico sono costanti, cioè sono indipendenti dalla posizione dell'oggetto.* È costante anche l'ingrandimento angolare, poiché in virtù della formula (10.6) si ha

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{ny}{n'y'} = \frac{n}{Bn'} = \frac{B}{A}. \tag{11.24}$$

Per i cannocchiali e per qualsiasi sistema in cui $n = n'$, si ha

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{y}{y'}. \tag{11.25}$$

In questo caso l'ingrandimento angolare è chiamato semplicemente *ingrandimento* del cannocchiale. Questa grandezza indica di quante volte l'angolo, sotto il quale si vede un piccolo oggetto infinitamente lontano, è più grande dell'angolo sotto il quale questo oggetto sarebbe visto a occhio nudo. Secondo la (11.25), l'ingrandimento angolare di un cannocchiale è uguale al valore inverso del suo ingrandimento trasversale. Ne segue che *l'ingrandimento di un cannocchiale è uguale al rapporto tra la larghezza del fascio luminoso incidente e quella del fascio emergente.*

Illustriamo quest'ultima proposizione con l'esempio del *cannocchiale di Keplero,* composto di due lenti convergenti sottili, l'obiettivo O e l'oculare O' (fig. 44). Il piano focale posteriore dell'obiettivo coincide con il piano focale anteriore dell'oculare. Supponiamo che l'oggetto osservato si trovi all'infinito. L'obiettivo forma un'immagine FC di questo oggetto nel piano focale comune. Supponiamo per semplicità che uno dei raggi estremi (raggio AF) si propaghi lungo l'asse ottico del cannocchiale, e l'altro (raggio BC) sotto un angolo α rispetto a quest'asse. Passando attraverso il centro ottico dell'obiettivo, il raggio BC non subisce rifrazione. L'angolo α è l'angolo sotto il quale l'oggetto infinitamente lontano viene visto a occhio nudo; l'angolo α' è l'angolo sotto il quale lo stesso oggetto è osservato al cannocchiale. Secondo la fig. 44 *l'ingrandimento angolare α'/α è numericamente uguale al rapporto tra la distanza focale dell'obiettivo e quella dell'oculare.* Ma questo rapporto a sua volta è uguale al rapporto delle larghezze dei fasci incidente ed emergente (fig. 45).

11. Un approccio più generale alla questione dell'ingrandimento angolare di un sistema telescopico si ottiene usando il *principio di Fermat,* in particolare per sistemi telescopici non aventi simmetria assiale. In maniera del tutto generale, si dice *sistema telescopico un sistema ottico attraversando il quale ogni fascio luminoso parallelo resta parallelo.* Sia AB (fig. 46) una parte piana del fronte d'onda che entra in un sistema telescopico. Do-

po il passaggio attraverso questo sistema (non rappresentato nella figura) questa parte AB del fronte d'onda diventa una parte piana $A'B'$. Il raggio AC prosegue con il raggio $C'A'$ ed il raggio BD con il raggio $D'B'$. Dunque, $(ACC'A') = (BDD'B')$. Prendiamo un'altra parte piana AE del fronte d'onda, inclinata di un angolo α infinitamente piccolo rispetto ad AB. All'uscita il fronte d'onda AE si trasforma in $A''E'$, che forma con $A'B'$ un angolo α'. L'ingrandimento angolare del sistema è uguale a $N = \alpha'/\alpha$. Consideriamo il fronte d'onda $A''E'$ che passa per il punto A'. In base al corollario del principio di Fermat, dimostrato al punto 4 del
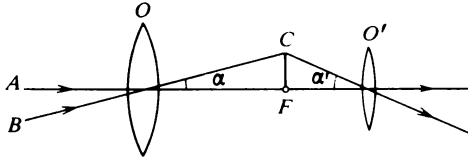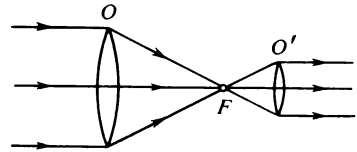
Fig. 44 Fig. 45

§ 7, le variazioni di cammino ottico dei raggi AA'' ed EE' spostandosi lungo il fronte d'onda $A''E'$ sono infinitesimi di ordine uguale o superiore a 2. In questa approssimazione le lunghezze ottiche AA'' ed EE' possono essere sostituite con le lunghezze ottiche $(ACC'A')$ e $(EDD'B'K)$. Poiché abbiamo trovato che $(ACC'A') = (EDD'B'K)$, si ha che $(BEDD'B') = (EDD'B'K)$ da cui $(BE) = (B'K)$, che si può anche scrivere

$$nh\alpha = n'h'\alpha', \qquad (11.26)$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo davanti al sistema telescopico, n' quello dietro questo sistema, h è la sezione trasversale del fascio incidente e
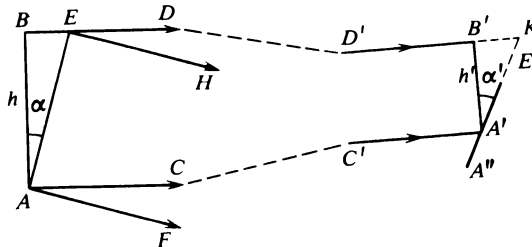
Fig. 46

h' quella del fascio emergente. Se, come al solito succede, $n' = n$, si ottiene

$$N = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{h}{h'}, \qquad (11.27)$$

cioè *l'ingrandimento di un sistema telescopico è uguale al rapporto delle larghezze dei fasci luminosi incidente ed emergente.* I risultati ottenuti sono di carattere generale e non dipendono dal tipo di sistema telescopico.

L'ingrandimento può anche non essere uguale per tutte le direzioni. Consideriamo, ad esempio, un prisma il cui spigolo rifrangente è verticale. La dimensione verticale di un fascio di raggi paralleli non varia dopo il passaggio attraverso il prisma, mentre le dimensioni orizzontali, in generale, variano. Il prisma produce un ingrandimento nella direzione orizzontale ma non ingrandisce in quella verticale. L'immagine fornita dal prisma sarà deformata (ristretta o allargata) nella direzione orizzontale, a seconda che le dimensioni trasversali del fascio luminoso aumentano o diminuiscono in questa direzione. La distorsione non avrà luogo se il prisma è mantenuto sotto un angolo di deviazione minima, ma in questo caso non avrà luogo neanche l'ingrandimento. Associando due prismi i cui spigoli rifrangenti sono mutuamente perpendicolari, si può aumentare o diminuire la sezione trasversale di un fascio luminoso in modo arbitrario ed uniforme per tutte le direzioni. Quest'associazione si comporta come un cannocchiale ordinario. Ruotando ciascun prisma attorno al suo spigolo rifrangente, si può ottenere un ingrandimento arbitrario. I difetti di questo strumento ottico sono grandi aberrazioni geometriche e cromatiche, ed esso non è d'importanza pratica.

§ 12. *Composizione di sistemi ottici centrati. Lenti spesse*

1. Supponiamo che due sistemi centrati vengano uniti in modo che i loro assi ottici coincidano. Se sono noti i parametri di ogni sistema, nonché la loro posizione mutua, per costruzione geometrica o per calcolo analitico si può determinare la posizione di tutti i punti cardinali del sistema ottico composto formato da questi due sistemi.

Indichiamo con f_1 e f_1' le distanze focali del primo sistema e con f_2 e f_2' quelle del secondo sistema. Sia Δ la distanza del punto focale anteriore F_2
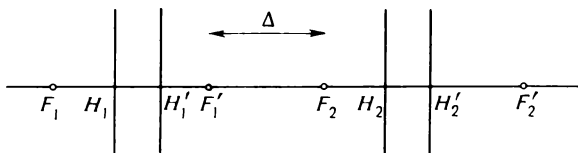
Fig. 47

del secondo sistema dal punto focale posteriore F_1' del primo sistema (fig. 47). Questa distanza si chiama *intervallo ottico* tra i due sistemi e, conformemente alla regola dei segni adottata, è considerata positiva se la luce in-

cidente si propaga dal fuoco F_1' verso il fuoco F_2; nel caso contrario l'intervallo ottico è negativo. Assegnando l'intervallo ottico, definiamo completamente la posizione mutua dei sistemi componenti. Per semplificare i calcoli, mettiamo le origini delle coordinate di ogni sistema componente nei suoi fuochi. Prendiamo il fuoco F_1 come origine delle coordinate dello spazio oggetto per il sistema complessivo, ed il fuoco F_2' come origine delle coordinate dello spazio immagine. Siano x, y le coordinate di oggetto e x_1, y_1 quelle di sua immagine formata dal primo dei sistemi da comporre. Si ha allora

$$xx_1 = f_1 f_1', \quad \frac{y_1}{y} = \frac{f_1}{x}.$$

Consideriamo quest'immagine intermedia come «oggetto» per il secondo sistema. Le coordinate di questo oggetto nel sistema coordinato avente per origine il punto F_2 sono $x_2 = x_1 - \Delta, y_2 = y_1$. Se x', y' sono le coordinate dell'immagine formata dal secondo sistema (e, quindi, da tutto il sistema) rispetto all'origine F_2', si ha

$$x_2 x' = f_2 f_2', \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{x'}{f_2'}.$$

Eliminando le coordinate intermedie x_1, y_1, x_2, y_2, otteniamo

$$x' = \frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1' - \Delta \cdot x} x, \quad y' = \frac{f_1 f_2}{f_1 f_1' - \Delta \cdot x} y. \tag{12.1}$$

Queste sono le formule di corrispondenza collineare con i coefficienti

$$a = f_2 f_2', \quad b = 0, \quad c = -\Delta, \quad d = f_1 f_1', \quad e = f_1 f_2.$$

Troviamo con l'aiuto delle formule (11.6) e (11.9) le coordinate dei fuochi e le distanze focali del sistema complessivo

$$x_F = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}, \quad x_{F'}' = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}, \tag{12.2}$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \tag{12.3}$$

Le coordinate dei punti principali sono date dalle espressioni

$$\begin{aligned} x_H &= x_F + f = f_1 \frac{f_1' - f_2}{\Delta}, \\ x_{H'}' &= x_{F'}' + f' = f_2' \frac{f_1' - f_2}{\Delta}. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Quindi,

$$\frac{x_H}{x_{H'}'} = \frac{f_1}{f_2'}. \tag{12.5}$$

Se l'intervallo ottico Δ s'annulla, le distanze focali f e f' diventano infinite, cioè il sistema è un sistema *telescopico*. (Tale situazione è per esempio realizzata nel cannocchiale.) In questo caso le equazioni (12.1) si trasformano nelle (11.23), con

$$A = \frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}, \quad B = \frac{f_2}{f_1'}.$$

L'ingrandimento angolare del sistema composto è

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{B}{A} = \frac{f_1}{f_2'}. \tag{12.6}$$

In particolare, per $n = n'$ si ha

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1}{f_2}. \tag{12.7}$$

Ciò coincide con il risultato ricavato sopra per il cannocchiale di Keplero.

Se entrambi i sistemi componenti sono telescopici, il sistema composto lo sarà anch'esso, ed inoltre il suo ingrandimento angolare è uguale al prodotto degli ingrandimenti angolari dei singoli sistemi. Se un sistema telescopico è associato ad un sistema a distanze focali finite esso forma un sistema a distanze focali finite, quale che sia l'ordine nel quale sono associati i due sistemi semplici.

2. L'inverso della distanza focale principale f' dello spazio immagine cambiata di segno, cioè $-1/f'$ si chiama *potenza ottica di un sistema*. La potenza ottica è misurata in *diottrie*. Una diottria rappresenta la potenza ottica di un sistema la cui distanza focale $|f'|$ è uguale ad un metro. La potenza delle lenti convergenti sottili è *positiva* e quella delle lenti divergenti è *negativa*.

Calcoliamo la potenza ottica di un sistema complesso, conoscendo le potenze ottiche dei sistemi semplici e la loro posizione mutua. Supporremo che gli indici di rifrazione di tutti gli spazi oggetto ed immagine siano gli stessi. Indichiamo con l_{12} la distanza $\overline{H_1' H_2}$ del piano principale anteriore H_2 del secondo sistema dal piano principale posteriore H_1' del primo sistema. L'intervallo ottico tra i sistemi in esame è allora uguale a

$$\Delta = F_1' F_2 = F_1' H_1' + H_1' H_2 + H_2 F_2 = f_1' + l_{12} - f_2 = f_1' + l_{12} + f_2'.$$

Sostituendo questo valore nella formula (12.3), otteniamo

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} + \frac{l_{12}}{f_1' f_2'}. \tag{12.8}$$

In particolare, quando il piano principale posteriore (o immagine) del primo sistema coincide con quello anteriore (o oggetto) del secondo sistema, si

ha

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}, \tag{12.9}$$

cioè *la potenza ottica del sistema composto è uguale alla somma delle potenze dei sistemi costituenti.* Questo caso ha, per esempio, luogo per due lenti sottili poste vicine l'una all'altra.

Applichiamo i risultati ottenuti ad un sistema centrato composto da due lenti sottili, una convergente e l'altra divergente, messe una dopo l'altra. Se le distanze focali di queste lenti sono uguali in modulo $f_1 = -f_2$, deve essere $f'_1 = -f'_2$. L'intervallo ottico tra le lenti è $\Delta = f'_1 + l_{12} + f'_2 = l_{12}$, cioè è positivo ($l_{12} > 0$). Dalla formula (12.6) otteniamo

$$f = -f' = -\frac{f'_1 f'_2}{l_{12}} = -\frac{f_1 f_2}{l_{12}} = \frac{f_1^2}{l_{12}} > 0.$$

Inoltre, con l'aiuto delle formule (12.2) e (12.4) troviamo $x_H = x'_{H'} = 0$, cioè i piani principali H e H' del sistema passano rispettivamente nei fuochi F_1 e F'_1 e si trovano ad una distanza l_{12} l'uno dall'altro. L'ascissa del fuoco principale F' del sistema composto è

$$x'_{F'} = -\frac{f_2 f'_2}{l_{12}} = \frac{f_1^2}{l_{12}},$$

l'ascissa della lente L_2

$$x'_{L_2} = f'_2 = -f'_1 = f_1.$$

Quindi,

$$x'_{F'} - x'_{L_2} = \frac{f_1^2}{l_{12}} - f_1.$$

Affinché il sistema di lenti focalizzi i raggi paralleli all'asse ottico principale nel fuoco reale del sistema, cioè sia convergente, è necessario che questa differenza sia positiva. Se la prima lente è divergente, la condizione menzionata è sempre verificata, poiché in questo caso $f_1 < 0$. Se, invece, la prima lente è convergente, questa condizione impone che sia $l_{12} < f_1$. Questi risultati si ottengono più facilmente con una costruzione geometrica diretta, il che proponiamo di fare al lettore.

Sistemi di lenti, analoghi a quello esaminato, vengono utilizzati nei moderni acceleratori per la focalizzazione delle particelle cariche (principio di *focalizzazione forte*).

3. Ogni sistema centrato può essere considerato come un sistema complesso, composto di parecchi sottosistemi. Si può sempre adottare come sottosistemi le superfici sferiche di separazione sulle quali i raggi luminosi subiscono una rifrazione o una riflessione. Per una superficie sferica di separazione (diottro) la corrispondenza collineare è espressa dalle formule (10.4). Da queste formule e dalle formule (11.8) troviamo prima di tutto: $x_H = x'_{H'} = 0$, cioè i piani principali coincidono e passano per il punto d'intersezione della superficie rifrangente considerata con l'asse ottico principale del sistema. Per le distanze focali f e f' dei sottosistemi le formule (10.4) e (11.9) danno

$$f = \frac{Rn}{n' - n}, \quad f' = -\frac{Rn'}{n' - n}. \tag{12.10}$$

Utilizzando queste formule, nonché le formule (12.2), (12.3) e (12.4), si possono calcolare i parametri di ogni sistema centrato.

4. A titolo d'esempio eseguiamo il calcolo dei parmetri di una *lente spessa*. Siano R_1 e R_2 i raggi di curvatura delle superfici sferiche rifrangenti della lente, n_1, n_2, n_3 gli indici di rifrazione del primo mezzo, del materiale della lente e del secondo mezzo (fig. 48), f_1 e f_1' le distanze focali corrispondenti alla rifrazione sulla superficie anteriore della lente, f_2 e f_2' quelle della
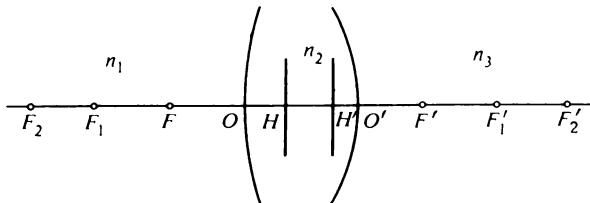
Fig. 48

superficie rifrangente posteriore. Abbiamo allora

$$f_1 = \frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1}, \quad f_1' = -\frac{n_2 R_1}{n_2 - n_1},$$

$$f_2 = \frac{n_2 R_2}{n_3 - n_2}, \quad f_2' = -\frac{n_3 R_2}{n_3 - n_2}.$$

Assimiliamo le superficie rifrangenti della lente a sottosistemi centrati e la lente stessa ad un sistema composto. Se d è lo spessore della lente, si ha $\Delta = f_1' + d - f_2$, o dopo la sostituzione delle espressioni di f_1' e f_2'

$$\Delta = \frac{D}{(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)}, \tag{12.11}$$

nella quale è introdotta la notazione

$$D = d(n_1 - n_2)(n_2 - n_3) + n_2[R_1(n_2 - n_3) + R_2(n_1 - n_2)]. \tag{12.12}$$

Le distanze focali f e f' della lente si ricavano dalle formule (12.3) ottenendo

$$f = -n_1 n_2 \frac{R_1 R_2}{D}, \quad f' = n_2 n_3 \frac{R_1 R_2}{D}. \tag{12.13}$$

Le coordinate dei punti focali F e F' della lente si possono calcolare con l'aiuto delle formule (12.2) che danno

$$x_F = -n_1 n_2 \frac{n_2 - n_3}{n_1 - n_2} \frac{R_1^2}{D}, \quad x_{F'}' = n_2 n_3 \frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3} \frac{R_2^2}{D}. \tag{12.14}$$

In questo caso l'origine delle coordinate dello spazio oggetto coincide con il fuoco F_1 e l'origine dello spazio immagine con il fuoco F_2'.

Troviamo le distanze h e h' dei piani principali della lente dai punti O ed O'. Per definizione,

$$h = OH = OF_1 + F_1F + FH = -f_1 + x_F + f,$$
$$h' = O'H' = O'F_2' + F_2'F' + F'H' = -f_2' + x_{F'}' + f'.$$

Di qui

$$h = n_1(n_2 - n_3)\frac{R_1 d}{D}, \quad h' = -n_3(n_1 - n_2)\frac{R_2 d}{D}. \tag{12.15}$$

In generale gli indici di rifrazione dei mezzi estremi n_1 e n_3 sono uguali. Ponendo in questo caso $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = n$, otteniamo

$$f = -f' = -n\frac{R_1 R_2}{D}, \tag{12.16}$$

$$h = (n - 1)\frac{R_1 d}{D}, \quad h' = (n - 1)\frac{R_2 d}{D}, \tag{12.17}$$

$$D = (n - 1)[n(R_1 - R_2) - d(n - 1)], \tag{12.18}$$

$$e = HH' = d - h + h', \tag{12.19}$$

dove e indica la distanza tra i piani principali H' e H (si veda fig. 48).

Se la lente non è molto spessa e la differenza $R_1 - R_2$ non è troppo piccola, si può trascurare il termine $d(n - 1)$ dell'espressione (12.18). In
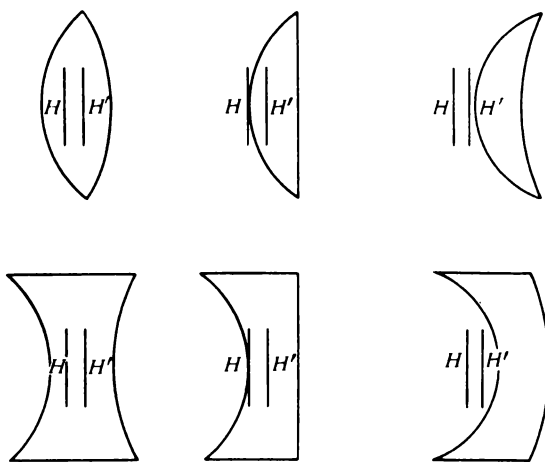
Fig. 49

quest'approssimazione si ha

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \qquad (12.20)$$

$$h = \frac{R_1}{n(R_1 - R_2)}d, \quad h' = \frac{R_2}{n(R_1 - R_2)}d, \qquad (12.21)$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{R_1}{R_2}, \qquad (12.22)$$

$$e = \frac{n-1}{n}d. \qquad (12.23)$$

Nella fig. 49 sono rappresentate lenti tipiche con indicazione delle posizioni dei loro piani principali ($n = 1{,}5$).

Problemi

1. Per determinare l'ingrandimento angolare di un cannocchiale mediante il *metodo di Ramsden* (1735-1800) lo si punta all'infinito. Dopo aver svitato l'obiettivo, al suo posto viene messo un oggetto di dimensioni determinate (schermo con apertura). L'oculare del cannocchiale forma un'immagine reale di questo oggetto. Siano L la dimensione dell'oggetto e l quella della sua immagine. Dimostrare che l'ingrandimento angolare del cannocchiale è uguale a L/l.

Soluzione. Prendiamo come origini delle coordinate i punti focali dell'oculare. Allora nella formula (11.17) si deve porre $X = f_1'$, $f = f_2$, il che dà $L/l = f_1'/f_2$, cioè proprio l'ingrandimento del cannocchiale (si veda § 11, punto 10).

2. Per la determinazione della distanza focale di una lente convergente Bessel (1784-1846) ha proposto il seguente metodo.

Mediante la lente su uno schermo si raccoglie un'immagine reale di un oggetto. Sia A la distanza dell'oggetto dalla sua immagine. Allora $A = \xi' + e - \xi$. Eliminando ξ', con l'aiuto di questa relazione, dalla (11.14), otteniamo

$$\xi^2 + (A - e)\xi + (A - e)f = 0. \qquad (12.24)$$

Se

$$A - e > 4f, \qquad (12.25)$$

l'equazione (12.24) ha due radici reali ξ_1 e ξ_2. In questo caso esistono due posizioni della lente per le quali si può formare su uno schermo immagini reali di un oggetto (mantenendo costante la distanza oggetto-immagine). Per passare da un'immagine all'altra, è necessario spostare la lente di una distanza $a = \xi_1 - \xi_2 = \sqrt{(A-e)^2 - 4f(A-e)}$, da cui

$$f = -f' = \frac{(A-e)^2 - a^2}{4(A-e)}. \qquad (12.26)$$

Si può misurare A ed a, mentre e, distanza tra i piani principali, non è conosciuta. Per determinarla si può prendere un'altra distanza A_1 tra l'oggetto e la sua immagine e misurare il corrispondente spostamento a_1 della lente. Si ottiene un'espressione della forma (12.26) nella quale A ed a sono sostituite con A_1 ed a_1. Confrontando queste due espressioni, si può calcolare e. Per semplificare il calcolo si può trascurare e^2 rispetto ad A^2, e troviamo allora

$$f = -f' = \frac{A^2 - a^2}{4A} - \frac{A^2 + a^2}{4A^2}e. \qquad (12.27)$$

§ 13. *Limitazione dei fasci luminosi per mezzo di diaframmi*

1. Immagini nette di regola si possono ottenere solo con *raggi parassiali*. I raggi non parassiali in pratica vengono eliminati per mezzo di *diaframmi*; spesso i diaframmi sono le montature stesse delle lenti e degli specchi.

Sia D (fig. 50) un diaframma e D_1 la sua immagine formata, in raggi parassiali, da lenti poste davanti a D. Se invece del diaframma D usiamo D_1 come diaframma, D_1 limiterà i raggi parassiali esattamente come D. Infatti, nell'approssimazione dell'ottica di Gauss, ogni raggio che passa in un punto periferico del diaframma D_1, passa anche attraverso un punto periferico di D. Quindi, in quest'approssimazione, tutti i diaframmi reali possono essere sostituiti dalle loro *immagini* formate da lenti poste davanti ai
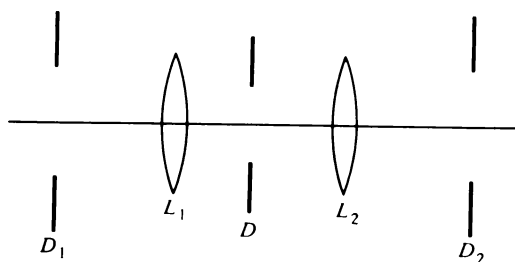
Fig. 50

diaframmi. In tal modo è come se tutti i diaframmi fossero trasposti mentalmente nello spazio oggetto. Ciò permette di *trascurare la rifrazione dei raggi luminosi* nello studio dei diaframmi. Allo stesso modo si può mentalmente trasportare tutti i diaframmi reali nello spazio immagine, sostituendo questi diaframmi con le loro immagini formate da lenti poste dietro i diaframmi.

2. Utilizzando il metodo menzionato, trasportiamo mentalmente tutti i diaframmi nello spazio oggetto (fig. 51). Il diaframma virtuale DD' che è visto sotto l'angolo minimo dal punto P situato sull'asse ottico principale assicura la più forte limitazione dei raggi emergenti da P. Questo diaframma è detto *pupilla d'entrata* del sistema ottico. Il diaframma reale la cui immagine è la pupilla d'entrata si chiama *diaframma d'apertura* o *diaframma d'azione* del sistema. Se il diaframma d'apertura si trova davanti alla prima lente, esso coincide con la pupilla d'entrata. Dunque, *il diaframma d'apertura è quello che limita più fortemente i raggi emessi da un punto dell'oggetto che si trova sull'asse ottico principale del sistema*. Perciò dalle dimensioni del diaframma d'apertura dipende la *brillanza dell'immagine*. Con il variare del diaframma d'apertura varia la *luminosità dello strumento*. L'angolo $2u$ sotto il quale si vede la pupilla d'entrata dal punto P dove

si trova l'oggetto si chiama *angolo d'apertura lato oggetto* o semplicemente *apertura* del sistema ottico.

L'immagine del diaframma d'apertura che si ottiene con raggi parassiali per mezzo di lenti poste dietro di esso si dice *pupilla d'uscita* del sistema.
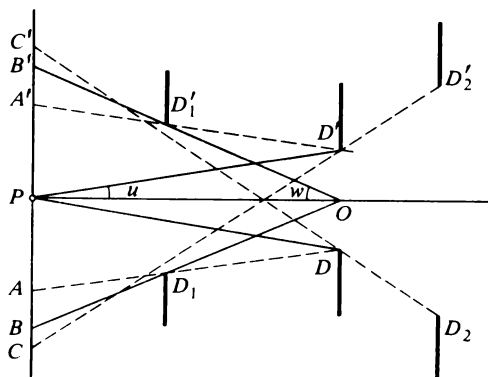
Fig. 51

La pupilla d'uscita è evidentemente l'immagine della pupilla d'entrata formata dall'intero sistema ottico. La pupilla d'uscita è il diaframma che limita più fortemente i raggi emessi dal punto P', immagine del punto oggetto P che si trova sull'asse ottico principale. L'angolo $2u'$, sotto il quale si osserva la pupilla d'uscita dal punto P', si chiama *angolo d'apertura lato immagine* o *angolo di proiezione* del sistema (si veda fig. 52).
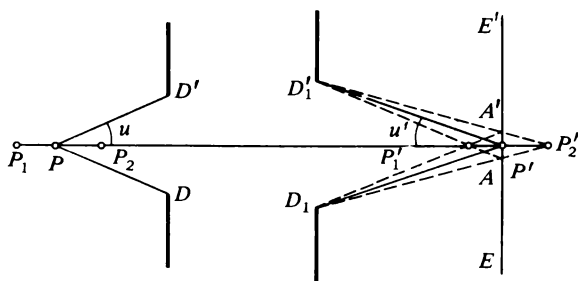
Fig. 52

Nei cannocchiali il diaframma d'apertura di solito è costituito dal bordo interno della montatura dell'obiettivo. Questo bordo assume allora il ruolo di pupilla d'entrata, la cui immagine formata dall'oculare è la pupilla d'uscita. Se il cannocchiale è posto ad una certa distanza dall'occhio puntando su di un fondo chiaro, la pupilla d'uscita appare come un'immagine reale o virtuale.

In alcuni casi il diaframma d'apertura è costituito dall'*iride dell'occhio*. La sua immagine, in raggi parassiali, formata dalla cornea e dall'umor acqueo, si chiama *pupilla dell'occhio*.

I raggi che passano nel centro del diaframma d'apertura si dicono *raggi principali*. Nell'approssimazione dell'ottica parassiale il raggio principale passa anche al centro delle pupille d'entrata e d'uscita.

Se l'oggetto si trova all'infinito, la pupilla d'entrata è costituita dall'immagine del diaframma, nello spazio oggetto, che ha diametro minimo. Analogamente, se l'immagine è all'infinito, la pupilla d'uscita è data dall'immagine dello stesso diaframma dello spazio oggetto che ha diametro minimo.

3. Se il punto oggetto si trova sull'asse ottico principale di un sistema, ogni raggio passante attraverso la pupilla d'entrata attraverserà tutto questo sistema. Ma se il raggio è emesso da un punto oggetto che non si trova sull'asse ottico principale, esso può anche non attraversare il sistema ottico persino nel caso in cui questo raggio sia passato attraverso la pupilla d'entrata; esso può essere arrestato da altri diaframmi. Per meglio illustrare questa questione, consideriamo il comportamento dei raggi principali.

Il diaframma che limita più fortemente i raggi principali, si dice *diaframma di campo*. Se la pupilla d'entrata fosse infinitamente piccola, tutti i raggi che attraversano il sistema sarebbero raggi principali, e il campo visivo sarebbe strettamente delimitato e definito dal diaframma di campo. L'immagine di questo diaframma formata dalle lenti poste davanti ad esso si chiama *finestra d'entrata* del sistema ottico. L'immagine del diaframma di campo formata dalle lenti che si trovano dietro a questo diaframma, si chiama *finestra d'uscita*. La finestra d'uscita è evidentemente l'immagine di quella d'entrata formata da tutto il sistema ottico. Nella fig. 51 la finestra d'entrata è rappresentata dal diaframma $D_1 D_1'$. Se la pupilla d'entrata è infinitamente piccola, l'angolo di campo lato oggetto è uguale all'angolo $2w$ sotto il quale si vede la finestra d'entrata dal centro della pupilla d'entrata. Analogamente è definito l'angolo di campo $2w'$ dalla parte dell'immagine.

In realtà la pupilla d'entrata ha sempre *dimensioni finite*. Ciò può condurre alla diminuzione della nettezza della frontiera del campo visivo. Infatti, dalla fig. 51 è chiaro che ogni raggio, emesso dai punti che si trovano tra A ed A' e che ha attraversato la pupilla d'entrata, passerà anche attraverso l'intero sistema ottico. I raggi emessi dal punto B' passeranno attraverso il sistema ottico solo se sono diretti verso la metà inferiore della pupilla; i raggi orientati verso la metà superiore della pupilla d'entrata sono trattenuti dal diaframma di campo e quindi non passano attraverso il sistema ottico. Per i raggi emessi da B' la metà superiore della pupilla d'entrata è come se fosse chiusa dal diaframma di campo. Infine i raggi emessi dai punti che sono situati oltre C e C' non possono attraversare il sistema ottico. Dunque, ai bordi del campo visivo si osserverà una diminuzione conti-

nua del grado d'illuminazione (*effetto finestra* o *vignettatura*). Nel caso di vignettatura il campo visivo presenta una frontiera sfumata. *Per sopprimere la vignettatura è necessario che la finestra d'entrata del sistema si trovi nel piano dell'oggetto. Pertanto in quasi tutti i sistemi ottici per sopprimere la vignettatura vengono utilizzati diaframmi di campo posti nel piano focale oggetto dell'oculare.*

4. Negli strumenti d'ottica le immagini vengono raccolte su di una superficie, per esempio su un vetro opaco, su una lastra fotografica, sulla retina dell'occhio, ecc. Questa superficie è perpendicolare all'asse principale del sistema ottico e in prima approssimazione può essere considerata piana (*piano immagine*). Tuttavia nella maggior parte dei casi l'oggetto, la cui immagine si cerca di costruire, presenta una configurazione *spaziale* complessa. A che cosa corrisponde l'immagine formata nel piano immagine del sistema ottico?

Per trovare una risposta a questa questione, definiamo nello spazio oggetto il piano otticamente coniugato al piano immagine. Questo piano si chiama *piano di messa a fuoco* o *piano di regolazione*. Proiettiamo l'oggetto dal centro della pupilla d'entrata sul piano di messa a fuoco. Questa proiezione è precisamente l'oggetto la cui immagine è formata in modo più o meno netto dal sistema ottico. Infatti, il raggio principale emesso da un qualsiasi punto dell'oggetto passa anche attraverso la sua proiezione sul piano di messa a fuoco. Questo raggio è il centro di un fascio di raggi luminosi emessi da questo punto dell'oggetto. Se un punto dell'oggetto è contenuto nel piano di messa a fuoco, cioè coincide con la sua proiezione, la sua immagine sarà netta. Se, invece, il punto considerato non è contenuto in questo piano, esso avrà per immagine un piccolo *cerchio di diffusione* il cui centro è l'immagine della proiezione di questo punto oggetto sul piano di messa a fuoco. Più grande è il diaframma d'apertura, più larghi sono i fasci luminosi emessi dai differenti punti oggetto e quindi più grandi sono le dimensioni dei corrispondenti cerchi di diffusione. Se i fasci non fossero assolutamente limitati da diaframmi o dai bordi delle lenti, i cerchi di diffusione occuperebbero tutto il piano immagine e l'immagine stessa non potrebbe in generale essere osservata. Di qui è chiaro quanto sia importante il ruolo dei diaframmi per la formazione delle immagini di oggetti reali.

5. Affinché l'immagine sia netta, è necessario che il diametro d del cerchio di diffusione non superi un certo limite (per esempio, 0,1 mm). Il valore di questo diametro determina la *profondità dello spazio rappresentato nettamente* (*profondità di campo*). Stimiamo la profondità di campo nell'approssimazione dell'ottica gaussiana. Siano DD' (fig. 52) la pupilla d'entrata, D_1D_1' quella d'uscita, P il punto oggetto sull'asse ottico, P' l'immagine di questo punto, EE' il piano immagine. Descriviamo attorno a P' un cerchio di diametro d. Uniamo i punti A ed A' diametralmente opposti, intersezione di questo cerchio con il piano immagine, con i punti D_1 e D_1' del bordo della pupilla d'uscita. Nell'intersezione di queste rette con

l'asse ottico si ottengono i punti P_1' e P_2'. Siano P_1 e P_2 i loro punti coniugati nello spazio oggetto. La distanza $|\delta X| = P_1P_2$ è la profondità di campo. Siano X e X' le coordinate dei punti coniugati P e P' rispetto ai fuochi principali del sistema. Dall'equazione (11.16), a meno di termini del secondo ordine, otteniamo $X'\delta X + X\delta X' = 0$. Come si vede dalla fig. 52, con la stessa approssimazione, $\delta X' = d/\mathrm{tg}\, u' \approx d/u'$. Si ha quindi

$$|\delta X| = \left|\frac{X}{X'}\right|\frac{d}{u'}.$$

La combinazione di questa formula con le formule (11.12) e (11.17) conduce al seguente risultato

$$|\delta X| = \frac{|X|d}{fu}. \qquad (13.1)$$

Se p è la distanza tra l'oggetto e la pupilla d'entrata ed r il raggio di quest'ultima, si ha $u = r/p$. Per l'obiettivo di una macchina fotografica si può ammettere $|X| = p$. Abbiamo allora

$$|\delta X| = \frac{p^2}{fr}\, d. \qquad (13.2)$$

Ogni fotografo sa che se la profondità di campo è troppo piccola, è necessario o diminuire il diaframma d'apertura, o allontanarsi dall'oggetto che si vuole fotografare.

6. La posizione della pupilla d'entrata rispetto al piano di messa a fuoco determina la *prospettiva* nella quale è osservato l'oggetto. Se la pupilla d'entrata è situata dietro l'oggetto nella direzione di propagazione dei raggi, proiettando l'oggetto dal centro della pupilla d'entrata sul piano di messa a fuoco, le parti dell'oggetto più vicine al sistema ottico avranno un ingrandimento maggiore di quelle più lontane. Con questa disposizione relativa dell'oggetto e del sistema ottico l'immagine degli oggetti più vicini sarà più grande di quella di oggetti con dimensioni uguali ma posti a distanza maggiore (*prospettiva normale* o *entocentrica*). Al contrario, se la pupilla d'entrata si trova davanti all'oggetto, queste dimensioni sull'immagine saranno più piccole di quelle di oggetti uguali disposti ad una distanza più grande (*prospettiva ipercentrica*). Infine nel caso intermedio in cui la pupilla d'entrata è allontanata all'infinito la grandezza delle immagini non dipende dalla distanza dell'oggetto dal sistema ottico (*prospettiva telecentrica*). Se la distanza dall'oggetto viene modificata, *la dimensione dell'immagine resta inalterata, cambia invece la sua nitidezza*. Per questa ragione la prospettiva telecentrica è utilizzata nei microscopi di misura. Poiché il risultato della misura non dipende in questo caso dalla precisione della messa a fuoco, per ottenere una messa a fuoco conveniente basta mettere il diaframma d'apertura nel fuoco posteriore (immagine) L_1 della lente (fig. 50).

Nei cannocchiali, poiché l'oggetto si trova praticamente all'infinito, è necessario che la grandezza dell'immagine proiettata su una scala graduata sia indipendente dalla precisione della messa a fuoco. Ciò si può ottenere mettendo il diaframma d'apertura nel fuoco anteriore (oggetto) L_2 della lente (fig. 50). Allora la pupilla d'uscita si porta all'infinito, il raggio principale è parallelo all'asse ottico ed incontra il piano del micrometro sempre alla stessa distanza dall'asse ottico. Quindi, le dimensioni dell'immagine formata sono indipendenti dalla posizione del piano del micrometro.

§ 14. *Astigmatismo. Superfici caustiche*

1. Se un fascio contiene raggi che non sono parassiali oppure il sistema ottico non presenta una simmetria assiale (per esempio, una lente cilindrica), l'onda sferica emessa da una sorgente luminosa puntiforme non è più sferica dopo aver attraversato il sistema. Di conseguenza l'immagine prodotta dal sistema non è più puntiforme. Le distorsioni che subiscono le immagini si chiamano *aberrazioni geometriche del sistema ottico.* Oltre alle aberrazioni geometriche esistono anche le *aberrazioni cromatiche,* che si manifestano in luce bianca con la comparsa di orli colorati attorno all'immagine, nonché le *aberrazioni di diffrazione.* Si deve tener conto di queste ultime quando si studia il potere risolutivo delle apparecchiature ottiche e spettrali, ed anche in uno studio avanzato sulla formazione delle immagini. Trascuriamo per ora le aberrazioni cromatiche e di diffrazione, supponendo che i fasci luminosi siano *monocromatici* e ad essi sia applicabile l'*ottica*
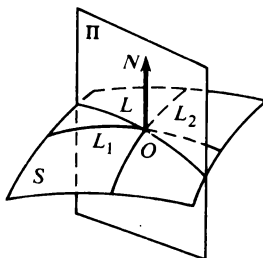
Fig. 53, *a*

geometrica: in questo modo possiamo studiare le sole aberrazioni geometriche.

2. Ricordiamo alcune nozioni di geometria differenziale. Siano S una superficie liscia ed O un punto qualsiasi di questa superficie (fig. 53,*a*). Indichiamo con N la normale in O alla superficie S. Tracciamo per N un piano Π che interseca la superficie S lungo una curva L. Se facciamo ruotare il piano Π attorno alla normale N di un angolo minore o uguale a 180°, la

curvatura della curva L in generale varia raggiungendo il suo massimo in un punto L_1 ed il suo minimo in un punto L_2. In geometria differenziale si dimostra che le sezioni normali della superficie S di curvature massima e minima sono reciprocamente perpendicolari. Queste sezioni si chiamano *sezioni normali principali della superficie* S nel punto O. Le linee lungo le quali queste sezioni intersecano la superficie S in prossimità del punto O sono dette *linee di curvatura,* ed i raggi di curvatura R_1 e R_2 di queste ultime si chiamano *raggi di curvatura principali della superficie S.* Se R_1 e R_2 hanno lo stesso segno, le linee di curvatura sono *concave dalla stessa parte,* e se R_1 e R_2 hanno segni differenti, *le concavità sono di senso contrario.* Se nel punto O si ha $R_1 = R_2$, questo punto si chiama *punto di curvatura della superficie.*
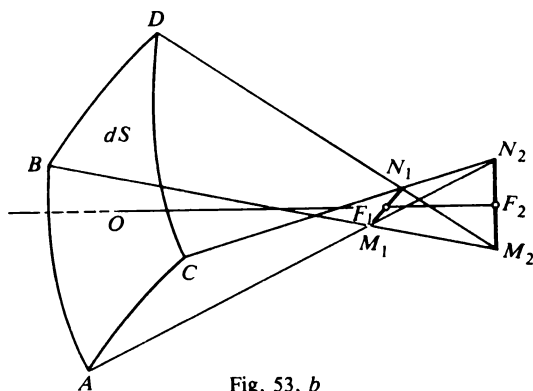
Fig. 53, *b*

3. Supponiamo ora che la superficie S sia un fronte d'onda. Consideriamo un elemento di superficie infinitesimo dS. Un fascio di raggi infinitamente sottile che attraversa questo elemento di superficie si dice *astigmatico,* se i raggi di curvatura principali R_1 e R_2 non coincidono. Il raggio che passa nel centro di dS si chiama *raggio principale* [1].

In generale due normali alla superficie S non s'intersecano in un punto. Ma le normali in punti infinitamente vicini che si trovano sulla stessa linea di curvatura, s'intersecano in un punto (se si trascurano infinitesimi di ordine superiore). Tenendolo presente, prendiamo come elemento dS un quadrilatero curvilineo infinitesimo $ABDC$, i cui lati siano le linee di curvatura della superficie S (fig. 53,*b*). I raggi contenuti nelle sezioni principali dell'elemento di fronte d'onda dS e passanti per il suo centro convergono

[1] Se l'elemento di superficie dS non è simmetrico, la nozione di centro perde di senso. Ma anche in questo caso si può trovare un punto imperfettamente definito che si può adottare come centro di questa superficie asimmetrica.

in due punti F_1 e F_2 detti *punti focali*; la distanza F_1F_2 si chiama *distanza d'astigmatismo del fascio elementare.* I raggi che passano per i lati opposti AB e CD, s'intersecano nei punti M_1 e N_1 rispettivamente. I raggi emessi da qualunque linea di curvatura intermedia tra i lati AB e CD convergono in un punto di un segmento infinitesimo M_1N_1 passante per il punto focale F_1. Analogamente, i raggi emessi dalle linee di curvatura comprese tra i lati BD e AC s'intersecano in un punto di un altro segmento infinitesimo M_2N_2 passante per il secondo punto focale F_2.

I segmenti M_1N_1 e M_2N_2 si chiamano *segmenti focali* del fascio astigmatico elementare emesso dall'elemento $ABCD$ del fronte d'onda. Se il fascio astigmatico elementare proviene da un punto luminoso, si è soliti chiamare i segmenti focali M_1N_1 e M_2N_2 *immagini* di questo punto, benché in questo caso non esista un'immagine puntiforme. Se l'elemento $ABCD$ presenta una simmetria rettangolare, i segmenti M_1N_1 e M_2N_2 sono perpendicolari tra loro ed al raggio principale del fascio. Nel caso generale ciò non è necessariamente vero. Se si fa tendere a zero l'apertura del fascio, i segmenti M_1N_1 e M_2N_2 si riducono ai punti focali F_1 e F_2.

Dunque, a differenza di un fascio omocentrico, un fascio astigmatico infinitamente stretto forma non una, ma *due immagini puntiformi* F_1 e F_2 di un punto luminoso. Ogni fascio di raggi finito può essere decomposto in fasci astigmatici elementari a ciascuno dei quali corrisponde una coppia di punti focali. Il luogo geometrico di questi punti è una superficie a due falde detta *superficie caustica* o *caustica.*

Problema

Una sorgente luminosa puntiforme P è posta in un mezzo omogeneo trasparente limitato da un piano. I raggi luminosi emessi da P subiscono una rifrazione su questo piano. Determinare la caustica di questi raggi.

Soluzione. La caustica dei raggi rifratti è composta di due strati uno dei quali è il luogo geometrico dei punti focali dei *raggi meridiani,* cioè dei raggi contenuti nel piano d'incidenza del raggio principale del fascio astigmatico elementare e l'altro rappresenta il luogo geometrico dei punti focali dei *raggi equatoriali,* cioè dei raggi contenuti in un piano perpendicolare al precedente passante per il raggio principale.

Sia n l'indice di rifrazione del mezzo dove si trova la sorgente P, mentre l'indice di rifrazione del mezzo contiguo sia uguale all'unità. Introduciamo un sistema di coordinate rettangolari la cui origine O si trova sulla frontiera del mezzo. Come asse Z prendiamo la normale alla superficie del mezzo, orientandola verso il punto P (fig. 54). In virtù della simmetria assiale che possiede il sistema, è sufficiente trovare la sezione della caustica con un piano passante per l'asse Z. La retta lungo la quale questo piano interseca la frontiera del mezzo sia l'asse X.

Calcoliamo prima la caustica dei raggi meridiani rifratti. L'equazione del raggio rifratto AB è

$$z = -\operatorname{cotg} \varphi(x - h \operatorname{tg} \psi),$$

dove h è la distanza dal punto P alla frontiera del mezzo, ψ l'angolo d'incidenza nel mezzo, φ

l'angolo di rifrazione. Per un raggio $PA'B'$ infinitamente vicino, gli angoli φ e ψ hanno incrementi $d\varphi$ e $d\psi$. L'incremento della coordinata z per uno stesso valore dell'ascissa x è in questo caso uguale a

$$dz = \frac{x - h \operatorname{tg} \psi}{\sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{h \operatorname{cotg} \varphi}{\cos^3 \psi} d\psi,$$

ed in virtù della legge della rifrazione $\sin \varphi = n \sin \psi$

$$dz = \frac{x - h \operatorname{tg} \psi}{\sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{h \operatorname{cotg} \varphi \cos \varphi}{n \cos^3 \psi.} d\varphi.$$

Le coordinate x_m e z_m del punto P_m in cui s'intersecano i prolungamenti dei raggi infinitamente vicini AB e $A'B'$ si trovano ponendo $dz = 0$

$$x_m = h \left(\operatorname{tg} \psi - \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{n \cos^3 \psi} \right), \quad z_m = h \frac{\cos^3 \varphi}{n \cos^3 \psi}. \tag{14.1}$$

Questa è l'*equazione della caustica per i raggi meridiani.* Da questa è facile dedurre la formula

$$l_m = l \frac{\cos^2 \varphi}{n \cos^2 \psi}, \tag{14.2}$$

dove l è la distanza del punto P dal punto A di uscita del raggio rifratto, e l_m la distanza del punto immagine meridiano P_m dal punto A.

In modo ancor più semplice si può trovare la *caustica per i raggi equatoriali.* Sia PAB uno dei raggi emessi dal punto P (fig. 54). Se facciamo ruotare questo raggio attorno alla perpendicolare OP alla superficie rifrangente otteniamo un cono di raggi incidenti ed un corrispondente cono di raggi rifratti. Il vertice del secondo cono è il punto P_e nel quale il prolungamento del raggio rifratto AB interseca la perpendicolare PO. I fasci di raggi incidenti e rifratti elementari che si trovano sulle superfici dei coni menzionati per i quali il raggio PAB è quello
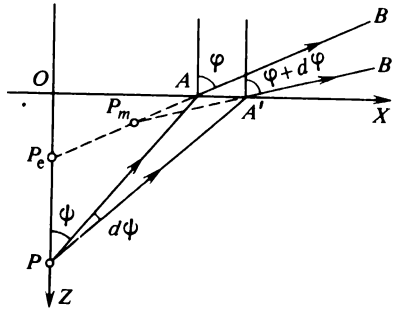
Fig. 54

principale sono evidentemente contenuti in piani perpendicolari al piano d'incidenza del raggio PAB. Quindi, i raggi di questi fasci sono *equatoriali* ed il punto P_e è l'immagine formata da questi raggi. Dunque, tutti i punti focali dei raggi equatoriali si trovano sulla perpendicolare PO, cioè la caustica di questi raggi si riduce ad un segmento di questa perpendicolare. La distanza l_e tra il punto P_e ed il punto di uscita del raggio rifratto AB è $P_eA = l \sin \psi / \sin \varphi$, cioè

$$l_e = \frac{l}{n}. \tag{14.3}$$

I risultati dei calcoli sono rappresentati nella fig. 55 per $n = 1{,}5$ (vetro). La caustica dei raggi equatoriali è rappresentata dal segmento verticale OP' la cui lunghezza è uguale a h/n. La sezione della caustica dei raggi meridiani con il piano della figura è la curva $BP'A$ per la quale il punto P' è un *punto a cuspide*. I prolungamenti dei raggi rifratti, tratteggiati nella figura, sono tangenti alla curva $BP'A$. Dunque, se tracciamo ancora la sezione del fronte d'onda dei raggi rifratti emergenti, la curva $BP'A$ sarà l'*evoluta* di questa sezione. La caustica dei
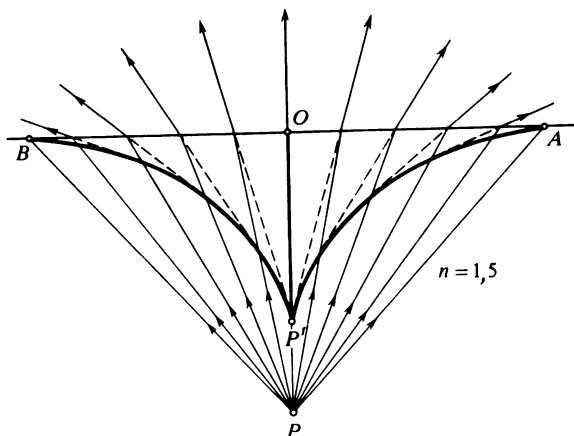
Fig. 55

raggi meridiani si ottiene per rotazione di quest'evoluta attorno alla retta verticale PO. Per fasci parassiali i punti focali dei raggi meridiani ed equatoriali coincidono in P'. I punti estremi A e B della caustica dei raggi meridiani sono definiti dall'intersezione dei raggi limite PA e PB di riflessione totale con la frontiera del mezzo. Raccomandiamo al lettore di tracciare la caustica dei raggi meridiani ed equatoriali per il caso in cui $n < 1$.

§ 15. *Aberrazioni geometriche nei sistemi centrati*

1. Le aberrazioni geometriche nei sistemi centrati, cioè gli scarti dall'ottica dei raggi parassiali, sono dovute a *fasci non parassiali* che partecipano alla formazione delle immagini ottiche. Diamo una classificazione di queste aberrazioni.

La posizione di un raggio luminoso nello spazio oggetto può essere definita conoscendo le coordinate ortogonali y, z e η, ζ dei punti della sua intersezione con il piano oggetto (cioè il piano passante per il punto oggetto P perpendicolarmente all'asse ottico principale), e con quello della pupilla d'entrata. Dopo aver attraversato il sistema ottico, il raggio incontra il piano immagine per raggi parassiali, in un punto di coordinate y', z'. Le coordinate dell'immagine formata dai raggi parassiali (detta in seguito *fuoco parassiale*) saranno indicate con y'_0, z'_0. Si può allora utilizzare le diffe-

renze $\Delta y' = y' - y'_0$, $\Delta z' = z' - z'_0$ per caratterizzare lo scarto dell'ottica del sistema reale rispetto al caso limite dell'ottica dei raggi parassiali.

Le coordinate y', z' sono funzioni delle variabili y, z, η, ζ:

$$y' = f_1(y, z, \eta, \zeta), \quad z' = f_2(y, z, \eta, \zeta).$$

Per classificare le aberrazioni geometriche sviluppiamo queste funzioni in serie di potenze rispetto alle variabili indipendenti. I termini lineari di questi sviluppi proporzionali a y e z, corrispondono all'ottica dei raggi parassiali. Non figureranno termini in η e ζ, poiché, nell'approssimazione parassiale, y' e z' non dipendono dall'inclinazione dei raggi emessi dal punto P. Non possono figurare termini di grado pari, data la simmetria assiale del sistema ottico. Ne segue che gli sviluppi in serie di potenze degli scarti $\Delta y' = y' - y'_0$ e $\Delta z' = z' - z'_0$ possono avere solo termini di *grado dispari* in y, z, η, ζ ed inoltre hanno termini iniziali il cui grado *non è inferiore a tre*. Supponendo che le variabili indipendenti y, z, η, ζ siano piccole, limitiamo gli sviluppi ai soli termini di terzo grado. Le *aberrazioni* calcolate in quest'approssimazione si chiamano *primarie* o *di terzo grado*. I termini di quinto grado causano aberrazioni del *quinto ordine*, ecc. Consideriamo quindi le sole aberrazioni del terzo ordine.

Passando alle notazioni vettoriali, introduciamo tre vettori perpendicolari all'asse ottico principale del sistema

$$\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}' = y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \eta\boldsymbol{j} + \zeta\boldsymbol{k},$$

dove $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ sono vettori che definiscono i sensi degli assi coordinati Y e Z. Il vettore $\boldsymbol{r}$ determina la posizione del punto oggetto P nel piano oggetto, il vettore $\boldsymbol{r}'$ il punto d'intersezione del raggio emergente con il piano immagine in raggi parassiali, il vettore $\boldsymbol{\sigma}$ determina il punto d'intersezione del raggio incidente con il piano della pupilla d'entrata. Il vettore $\Delta \boldsymbol{r}' = \Delta y'\boldsymbol{j} + \Delta z'\boldsymbol{k}$ può essere sviluppato secondo i vettori $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{r}$. A causa della simmetria assiale i coefficienti di questi sviluppi possono dipendere soltanto da « invarianti di rotazione » $\boldsymbol{\sigma}^2$, $(\boldsymbol{\sigma r})$ e $\boldsymbol{r}^2$. A meno di termini del terzo grado, si avrà dunque

$$\Delta \boldsymbol{r}' = [A\boldsymbol{\sigma}^2 + B(\boldsymbol{\sigma r}) + C\boldsymbol{r}^2]\boldsymbol{\sigma} + [D\boldsymbol{\sigma}^2 + E(\boldsymbol{\sigma r}) + F\boldsymbol{r}^2]\boldsymbol{r}, \quad (15.1)$$

dove A, B, C, D, E, F sono coefficienti costanti i cui valori dipendono dalla struttura del sistema ottico e dalla posizione del piano oggetto.

Nel seguito indicando con σ il raggio della pupilla d'entrata, potremo scegliere raggi incidenti (o i loro prolungamenti) passanti per i punti della circonferenza che limita la pupilla d'entrata. Il vettore $\Delta \boldsymbol{r}'$ risulta sviluppato in serie secondo le potenze del raggio della pupilla d'entrata. Chiamiamo *curva d'aberrazione* la curva lungo la quale il piano immagine, in raggi parassiali, interseca il fascio dei raggi emessi dal punto oggetto P che passano sulla circonferenza della pupilla d'entrata. L'immagine del punto P formata nel piano immagine in raggi parassiali non è più puntiforme, ma si pre-

senta come una piccola macchia limitata dalla curva d'aberrazione. Per fissare le idee supponiamo di usare un diaframma ad iride il cui raggio può essere continuamente variato. Allora lo sviluppo (15.1) permette di determinare come nell'approssimazione considerata varia la curva d'aberrazione con il variare del raggio di questo diaframma. Gli scarti rispetto all'ottica dei raggi parassiali sono dati dalla somma (15.1) e non dai suoi singoli termini. Ma per dare una classificazione delle aberrazioni è necessario considerare ogni termine isolatamente, trascurando tutti gli altri. Secondo le potenze di σ tutte le aberrazioni del terzo ordine possono essere divise in quattro gruppi che considereremo qui sotto.

2. Aberrazione sferica. Quest'aberrazione è causata dal termine di terzo grado $A\sigma^2\boldsymbol{\sigma}$, cosicché in assenza di altre aberrazioni $|\Delta \boldsymbol{r}'| = A\sigma^3 =$ costante. Quindi, la curva d'aberrazione è una *circonferenza* con centro nel fuoco parassiale e di raggio $A\,\sigma^3$. Ogni punto oggetto ha come immagine un cerchio di diffusione il cui raggio è proporzionale al cubo del raggio della pupilla d'entrata ed è indipendente dalla posizione di questo punto. Il grado d'illuminazione del cerchio di diffusione decresce rapidamente dal centro ai bordi.

La fig. 56 permette di farsi un'idea più precisa delle cause delle aberrazioni sferiche. Supponiamo che un oggetto puntiforme si trovi sull'asse ottico principale di un sistema. I raggi parassiali che esso emette incontrano il piano immagine in un punto G. I raggi che passano sulla circonferenza della pupilla d'uscita DD' convergono sull'asse ottico in un punto M che può trovarsi sia davanti che dietro al punto G. I raggi che passano su una circonferenza situata nel piano della pupilla d'uscita e concentrica con la circonferenza DD' convergono sull'asse ottico tra i punti M e G. La distanza MG si chiama *aberrazione sferica longitudinale*. Se nel piano AA' delle immagini formate da raggi parassiali mettiamo uno schermo, su esso si ottiene un cerchio luminoso di raggio GA. Il raggio GA si dice *aberrazione sferica trasversale*. A meno di termini del terzo ordine, l'aberrazione trasversale è proporzionale al cubo dell'apertura $2u$. Ne segue che l'aberrazione longitudinale è proporzionale al quadrato dell'apertura del fascio.

Se spostiamo lo schermo dal piano AA' verso M, il raggio del cerchio di diffusione prima diminuisce e poi comincia ad aumentare. Si dimostra facilmente che il cerchio di diffusione minimo si ottiene quando lo schermo occupa la posizione BB' ad una distanza $3/4MG$ dal piano delle immagini parassiali AA'. A rigore di termini, il piano BB' non è il piano in cui si osserva la miglior nitidezza dell'immagine. Per trovare la miglior nitidezza è necessario tener conto non solo delle dimensioni del cerchio di diffusione, ma anche della *ripartizione del grado d'illuminazione*. A partire da considerazioni di diffrazione, si può mostrare che in presenza della sola aberrazione sferica il piano della miglior nitidezza si trova a metà tra i punti M e G.

L'aberrazione sferica è l'unica delle aberrazioni geometriche che si os-

serva anche nel caso in cui il punto oggetto si trova sull'asse ottico principale del sistema. Tutte le altre aberrazioni geometriche spariscono in questo caso. Questo è vero in un'approssimazione qualsiasi e non solo per le aberrazioni del terzo ordine.
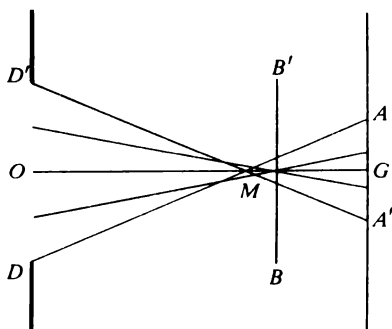
Fig. 56

3. Coma. Se nello sviluppo (15.1) solo i coefficienti B e D sono diversi da zero, la corrispondente aberrazione è detta *coma*. In questo caso

$$\Delta \boldsymbol{r}' = B(\boldsymbol{\sigma r})\boldsymbol{\sigma} + D\sigma^2 \boldsymbol{r}.$$

Di qui si ottiene

$$\left[\Delta \boldsymbol{r}' - \left(D + \frac{B}{2}\right)\sigma^2 \boldsymbol{r}\right]^2 = \left(\frac{B}{2}\sigma^2 r\right)^2.$$

Quindi, la curva d'aberrazione è una *circonferenza* di raggio $1/2B\sigma^2 r$, il cui centro è spostato rispetto al fuoco parassiale verso il vettore $\boldsymbol{r}$ di una distanza $(D + 1/2B)\sigma^2 r$. Ora è facile farsi un'idea della forma dell'immagine di un punto oggetto in presenza della sola aberrazione di coma. A questo scopo tracciamo nel piano della pupilla d'entrata una circonferenza il cui centro coincida con quello della pupilla. I raggi emessi dal punto oggetto che passano su questa circonferenza tagliano sul piano dell'immagine parassiale una circonferenza. Proprio l'insieme di queste circonferenze costituisce l'immagine del punto oggetto in questo piano. Le circonferenze hanno due inviluppi rettilinei intersecantisi nel fuoco parassiale e formanti tra loro un angolo α, definito dalla relazione sin $(\alpha/2) = B/(B + 2D)$. Uno studio più dettagliato, non riportato qui, mostra che $B = 2D$, e perciò $\alpha = 60°$. La direzione del vettore $\boldsymbol{r}$ è la bisettrice dell'angolo formato dagli inviluppi (fig 57). Dunque, l'immagine del punto ricorda una cometa, da cui proviene il nome «coma».

La figura 58 precisa la formazione del coma che viene prodotto da un fascio luminoso inclinato sull'asse ottico.

4. Astigmatismo dei fasci inclinati sull'asse ottico del sistema e curvatura del piano immagine. È comodo studiare insieme queste aberrazioni, poiché entrambe sono dovute ai termini di primo grado in σ e di secondo grado in r. Esse appaiono quando entrambi i coefficienti C ed E o uno solo di questi sono diversi da zero. Se tutti gli altri coefficienti sono nulli, la formula (15.1) si trasforma in

$$\Delta r' = Cr^2 \sigma + E(\sigma r)r. \tag{15.2}$$

Per determinare la forma della curva d'aberrazione, facciamo passare l'asse Y nel punto oggetto. Si ottiene allora $r = yj$. L'equazione della circonferenza della pupilla d'entrata in forma parametrica diventa $\eta = \sigma \cos \varphi$, $\zeta = \sigma \sin \varphi$, dove φ è l'angolo centrale considerato come parametro. In tal modo dalla relazione precedente otteniamo l'equazione della
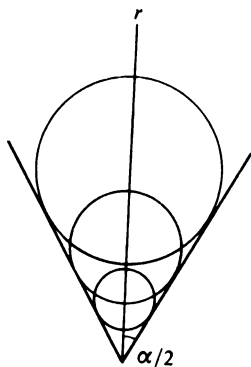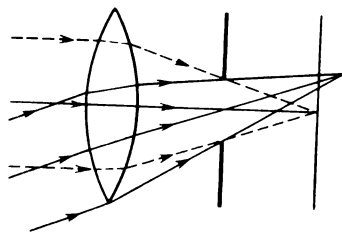
Fig. 57 Fig. 58

curva d'aberrazione

$$\begin{aligned} \Delta y' &= (C + E)y^2\eta = (C + E)\sigma y^2 \cos \varphi, \\ \Delta z' &= Cy^2\zeta = C\sigma y^2 \sin \varphi. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Questa è un'ellisse con centro nel fuoco parassiale, i cui assi sono paralleli agli assi coordinati Y e Z e le loro lunghezze sono proporzionali al raggio della pupilla d'entrata ed al quadrato della distanza del punto oggetto dall'asse ottico principale. L'immagine del punto è una piccola macchia luminosa limitata dalla curva d'aberrazione. Questo significa che il fascio di raggi che forma quest'immagine è astigmatico. In seguito ad uno spostamento parallelo lungo l'asse ottico dello schermo sul quale si è formata, l'immagine resta sempre ellittica, ma la forma e le dimensioni dell'ellisse si modificano. Per due posizioni particolari dello schermo l'ellisse degenera in due segmenti rettilinei, uno dei quali è parallelo all'asse Y e l'altro a quello Z.

Per dimostrarlo mettiamo l'origine delle coordinate al centro della pupilla d'uscita e definiamo il fascio nello spazio immagine per mezzo dei punti della sua intersezione con il piano della pupilla d'uscita e con il piano dell'immagine parassiale. Le coordinate del primo punto sono $(0, \eta', \zeta')$ e quelle del secondo $(x', y' + \Delta y', \Delta z')$. Se X, Y, Z sono le coordinate correnti, l'equazione del raggio considerato si scrive nella seguente forma:

$$Y = \eta' + \frac{y' + \Delta y' - \eta'}{x'} X, \qquad Z = \zeta' + \frac{\Delta z' - \zeta'}{x'} X.$$

Ponendo qui $\eta' = \zeta' = \Delta y' = \Delta z' = 0$, troviamo le coordinate trasversali del fuoco parassiale: $Y_0 = y'X/x'$, $Z_0 = 0$, (la coordinata longitudinale dello stesso fuoco è uguale a x'). Dunque,

$$\begin{aligned} Y - Y_0 &= \left(1 - \frac{X}{x'}\right)\eta' + \frac{X}{x'}\Delta y', \\ Z - Z_0 &= \left(1 - \frac{X}{x'}\right)\zeta' + \frac{X}{x'}\Delta z'. \end{aligned} \tag{15.4}$$

Negli ultimi termini, in prossimità del fuoco parassiale, si può porre $X = x'$, poiché ciò implica errori trascurabili nell'approssimazione considerata. Per la stessa ragione si può porre nelle formule (15.3) $y = y'/\beta_1$, $z = z'/\beta_1$, $\eta = \eta'/\beta_2$, $\zeta = \zeta'/\beta_2$, dove β_1 e β_2 sono gli ingrandimenti trasversali lineari degli oggetti posti rispettivamente nel piano oggetto ed in quello della pupilla d'entrata, calcolati nell'approssimazione parassiale. Tenendo inoltre conto del fatto che y e Y sono notazioni differenti di una medesima ordinata, possiamo scrivere la (15.3) nella forma

$$\Delta y' = \frac{C' + E'}{x'} \eta' Y^2, \qquad \Delta z' = \frac{C'}{x'} \zeta' Y^2,$$

dove C' ed E' sono nuove costanti e l'ascissa x' è introdotta nei denominatori per ragioni di comodità. In conseguenza di tutto ciò le formule (15.4) in prossimità del fuoco parassiale si trasformano in

$$\begin{aligned} Y - Y_0 &= \frac{\eta'}{x'} [x' - X + (C' + E')Y^2], \\ Z - Z_0 &= \frac{\zeta'}{x'} [x' - X + C'Y^2]. \end{aligned} \tag{15.5}$$

Se

$$X - x' = (C' + E')Y^2, \tag{15.6}$$

si ha $Y - Y_0 = 0$, cioè l'ellisse degenera in un segmento rettilineo parallelo all'asse Z. Questa è la *focale tangenziale* formata dai *raggi meridiani*. In modo analogo, se

$$X - x' = C'Y^2, \tag{15.7}$$

si ha $Z - Z_0 = 0$, e l'ellisse si trasforma in un altro segmento, la *focale sagittale* parallela all'asse Y, formata dai *raggi equatoriali*. Per rotazione delle curve (15.6) e (15.7) attorno all'asse ottico principale si ottengono due superfici con un punto di contatto nel punto della loro intersezione con l'asse ottico principale. Proprio queste due superfici formano la caustica dei raggi che sono passati attraverso il sistema ottico. In generale esse hanno un solo punto comune. La caustica è la superficie che sostituisce il piano immagine nell'ottica parassiale. Quindi si ha non solo astigmatismo, ma anche *curvatura della superficie dell'immagine*.

5. Distorsione. Tutti i coefficienti, ad eccezione di F, sono nulli. L'equazione (15.1) si riduce allora a

$$\Delta r' = Fr^3.$$

Ne segue che in presenza della sola aberrazione considerata ogni punto forma un netto punto immagine, quali che siano le dimensioni del diaframma. Tuttavia il punto immagine è spostato dal fuoco parassiale e lo scarto è proporzionale al cubo della sua distanza r dall'asse ottico principale. Perciò si ha una *distorsione* dell'immagine. Le linee rette che intersecano l'asse ottico principale hanno come immagini delle rette. Tutte le altre rette che non intersecano l'asse ottico hanno per immagine linee curve. Se F è positivo le immagini dei punti si spostano *verso l'esterno* rispetto ai corrispondenti fuochi parassiali, cioè presentano una concavità verso l'asse ottico principale. Questa distorsione è detta distorsione *a cuscino* (fig. 59,*b*). Se F è negativo gli spostamenti sono verso l'interno, cioè le immagini presentano una convessità verso l'asse ottico principale, e la distorsione è detta *a barile* (fig. 59,*c*).

Tutti questi risultati restano validi anche per *aberrazioni di ordine superiore*. Nel caso generale la distorsione è determinata da tutti i termini in
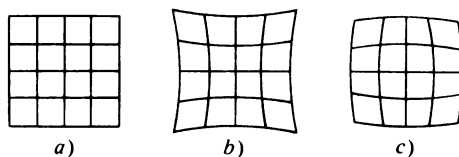
Fig. 59

$\Delta r'$ dello sviluppo non contenenti le potenze del raggio σ della pupilla d'entrata. Quale che sia l'approssimazione utilizzata, se la distorsione è la sola aberrazione esistente, un punto oggetto avrà sempre un punto immagine per tutte le aperture del diaframma.

6. L'eliminazione (o più esattamente la riduzione) delle aberrazioni geometriche è realizzata in pratica mediante la combinazione di differenti lenti (e specchi) fabbricate con vetri ottici aventi proprietà ottiche differenti. È

impossibile eliminare tutte le aberrazioni e praticamente si può parlare solo del miglior compromesso dipendente dai problemi che deve risolvere un dato strumento ottico. Tra tutte le aberrazioni del terzo ordine le più nocive sono l'aberrazione sferica ed il coma. Nella maggior parte dei casi è importante ridurle nella misura massima possibile. Diminuendo l'apertura del diaframma, in pratica si può completamente eliminare entrambe queste aberrazioni. Con una scelta conveniente delle lenti è possibile eliminare la distorsione, quindi si cerca di diminuire anche l'astigmatismo e la curvatura della superficie dell'immagine. Ma la diminuzione dell'apertura del diaframma diminuisce la brillanza dell'immagine ed aumenta gli effetti di diffrazione. La distorsione è nociva per gli obiettivi fotografici, ma può essere ammessa negli strumenti astronomici, poiché essa non influenza la nitidezza delle immagini ed implica solo una deformazione, di cui si può tener conto per mezzo di lunghi calcoli.

§ 16. *Aberrazione cromatica*

1. Se si utilizza luce bianca, anziché monocromatica, nell'immagine appaiono aberrazioni complementari. Infatti, l'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda (dispersione della luce). Perciò il sistema ottico forma in luce bianca non una, ma molte immagini monocromatiche le cui dimensioni e posizioni sono differenti. Si può convincersene, decomponendo la luce bianca in componenti monocromatiche ed utilizzando il principio di sovrapposizione. L'immagine risultante, che si ottiene per sovrapposizione delle immagini monocromatiche, non è nitida e presenta bordi colorati. Questo fenomeno si dice *aberrazione cromatica* o *cromatismo*.

Per eliminare l'aberrazione cromatica si combinano lenti fabbricate con vetri di proprietà ottiche differenti, ma è impossibile eliminarla per tutte le radiazioni dello spettro. Generalmente si fanno coincidere le immagini formate da due radiazioni a lunghezza d'onda differente. Si dice allora che il sistema ottico è *acromatico* o *corretto dal punto di vista cromatico*. L'aberrazione cromatica restante si chiama *spettro secondario*. Nella maggior parte dei casi queste aberrazioni residue non influenzano notevolmente le immagini ottenute. La scelta delle radiazioni per le quali deve essere acromatizzato il sistema ottico dipende dalla destinazione dello strumento ottico. Nei casi di strumenti d'osservazione visuale queste radiazioni debbono essere scelte da una e dall'altra parte della regione giallo-verde dello spettro alla quale l'occhio umano è più sensibile. Generalmente, l'acromatizzazione di questi strumenti è realizzata per le righe di Fraunhofer corrispondenti alle lunghezze d'onda $\lambda_C = 656{,}3$ nm e $\lambda_F = 486{,}1$ nm. Nelle macchine fotografiche l'acromatizzazione è realizzata per radiazioni più vicine alla regione blu dello spettro, poiché queste radiazioni impressionano maggiormente la lastra fotografica. Qui l'acromatizzazione è generalmente

realizzata per le righe di Fraunhofer corrispondenti alle lunghezze d'onda $\lambda_D = 589,3$ nm e $\lambda_G = 434,0$ nm.

Per realizzare una acromatizzazione completa, cioè per far coincidere le immagini di due colori (per esempio rosso e blu), è necessario che siano uguali non solo le distanze focali per questi colori, ma che coincidano anche i piani principali a loro corrispondenti. In molti casi è sufficiente una *acromatizzazione parziale,* cioè o l'uguaglianza delle sole distanze focali senza una coincidenza esatta dei piani principali, o una coincidenza dei soli piani principali senza un'uguaglianza esatta delle distanze focali. Ciò dipende dalla destinazione dello strumento ed è determinato dal fatto se sia più importante l'ingrandimento dell'immagine o la sua posizione. Per esempio, negli oculari dei cannocchiali e dei microscopi sono più importanti gli angoli sotto i quali l'occhio percepisce le differenti immagini colorate dell'oggetto. Affinché questi angoli siano uguali, è necessario che gli oculari siano acromatizzati in condizioni di uguaglianza delle distanze focali (si veda § 24, punto 4).

Un esame dettagliato dei procedimenti di acromatizzazione è dato nei manuali dedicati al calcolo dei sistemi ottici. Qui esamineremo solo le più semplici questioni di principio ed inoltre solo nell'*approssimazione parassiale.* Nelle approssimazioni di ordine superiore si manifesta sempre anche l'aberrazione cromatica la cui eliminazione esige procedimenti speciali che non considereremo qui.

2. L'acromatizzazione mediante l'uguaglianza della distanza focale può essere ottenuta per mezzo di una sola lente spessa (si veda problema 2). Tuttavia questo metodo non ha importanza pratica. Il caso più importante in pratica è l'acromatizzazione di una lente sottile o di un sistema di lenti sottili.

Consideriamo una singola lente sottile o un sistema di lenti sottili e calcoliamo come varia la sua distanza focale in seguito a piccole variazioni dell'indice di rifrazione. Prendendo la derivata logaritmica dell'espressione (10.9), otteniamo

$$\frac{\delta f}{f} = - \frac{\delta n}{n-1}. \tag{16.1}$$

Visto che l'indice di rifrazione diminuisce all'aumentare della lunghezza d'onda, da questa formula segue che la distanza focale f in modulo è più grande per le radiazioni rosse che per quelle blu.

In confronto con la variazione della distanza focale, le posizioni dei piani principali della lente variano in modo trascurabile. Determiniamo, per esempio, questa variazione di posizione per il piano principale dello spazio oggetto. Per una lente non troppo spessa si può utilizzare la formula (12.21) la quale dà $\delta h/h = -\delta n/n$, e quindi

$$\frac{\delta h}{\delta f} = \frac{h}{f}\frac{n-1}{n} = - \frac{d}{R_2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Visto che persino per una lente relativamente spessa si ha di regola $d \ll R_2$ ed inoltre $n - 1 < n$, si ha $\delta h \ll \delta f$. Pertanto una lente sottile sarà praticamente acromatizzata in modo completo se la sua distanza focale è la stessa per tutte le radiazioni.

Nei calcoli pratici si ammette che la formula (16.1) sia approssimativamente valida per variazioni finite dell'indice di rifrazione. Nel caso di strumenti destinati solamente alla visione si pone $\delta n = n_C - n_F$ e si introduce la grandezza

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}, \tag{16.2}$$

dove n_D è indice di rifrazione per la riga gialla D del sodio $\lambda = 589,3$ nm. Questa grandezza è detta *coefficiente di dispersione* o *numero di Abbe.* (Al posto di n_D al numeratore si può usare l'indice di rifrazione per un'altra lunghezza d'onda qualsiasi della regione visibile dello spettro, poiché la variazione massima di ν non è che del 2% circa.) La formula (16.1) si trasforma in

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{1}{\nu}, \tag{16.3}$$

da cui

$$\delta \frac{1}{f} = -\frac{1}{f\nu}. \tag{16.4}$$

Tavola 2

Tipi di vetro	n_D	$n_F - n_C$	$n_F - n_D$	$n_G - n_F$	ν
CL 6	1,4704	0,00704	0,00493	0,00339	66,8
C 1	1,4982	0,00765	0,00535	0,00423	65,1
C 3	1,5100	0,00805	0,00565	0,00451	63,4
C 14	1,5147	0,00849	0,00597	0,00477	60,6
CB 4	1,5302	0,00877	0,00617	0,00495	60,5
CB 6	1,5399	0,00905	0,00637	0,00513	59,7
CP 2	1,5724	0,00996	0,00702	0,00567	57,5
CP 21	1,6568	0,01285	0,00910	0,00745	51,1
FL 1	1,5406	0,01145	0,00812	0,00673	47,2
FL 7	1,5783	0,01407	0,01002	0,00843	41,1
F 6	1,6031	0,01590	0,01135	0,00903	37,9
F 8	1,6248	0,01757	0,1260	0,01088	35,6
FB 1	1,5247	0,00955	0,00674	0,00547	54,9
FB 28	1,6641	0,01874	0,01342	0,01145	35,4
Fl 1	1,6475	0,01912	0,01369	0,01172	33,9
Fl 5	1,7550	0,02743	0,01972	0,01728	27,5

Notazioni: CL — crown leggero, C — crown, CB — crown al bario, CP — crown pesante, FL — flint leggero, F — flint, FB — flint al bario, Fl — flint pesante.

Nella tavola 2 sono riportate le caratteristiche ottiche di alcuni vetri ottici. La differenza $n_F - n_C$ degli indici di rifrazione si chiama *dispersione media,* ed i rapporti

$$(n_F - n_D)/(n_F - n_C), \quad (n_G - n_F)/(n_F - n_C)$$

ed analoghi sono detti *dispersioni relative.*

3. Consideriamo ora l'acromatizzazione di un sistema composto da due lenti sottili vicine. Indichiamo con n_1 e f_1 l'indice di rifrazione e la distanza focale della prima lente, e con n_2 e f_2 indice di rifrazione e distanza focale della seconda. La distanza focale della lente composta si trova secondo la formula

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \tag{16.5}$$

Questa distanza sarà la stessa per le lunghezze d'onda λ_F e λ_C, se è verificata la condizione

$$\delta \frac{1}{f} = -\left(\frac{1}{f_1 \nu_1} + \frac{1}{f_2 \nu_2}\right) = 0 \tag{16.6}$$

ossia

$$f_1 \nu_1 + f_2 \nu_2 = 0. \tag{16.7}$$

Questa è la *condizione di acromatismo del nostro sistema.* Essendo positivi i coefficienti di dispersione per tutti i vetri ottici, dall'uguaglianza (16.6) segue che le distanze focali f_1 e f_2 debbono avere *segno contrario.* Dalle equazioni (16.5) e (16.6) troviamo

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f}\frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2}, \quad \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f}\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}. \tag{16.8}$$

Se la distanza focale f del sistema è positiva, la lente avente il più grande coefficiente di dispersione avrà distanza focale positiva, e l'altra avrà distanza focale negativa. In particolare, la lente convergente deve essere fabbricata con vetro crown e quella divergente in flint (si veda tavola 2).

Se è data la distanza focale f di una lente composta, e se sono indicati i tipi di vetro usati per la prima e la seconda lente, le distanze focali f_1 e f_2 sono date dalle equazioni (16.8). Applicando la formula (10.9), si possono determinare le differenze $\frac{1}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{R_2^{(1)}}$ e $\frac{1}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{R_2^{(2)}}$, dove $R_1^{(1)}$ e $R_2^{(1)}$ sono i raggi delle superfici sferiche della prima lente, e $R_1^{(2)}$ e $R_2^{(2)}$ della seconda. Due di questi raggi si possono scegliere in modo arbitrario. Se le lenti 1 e 2 debbono essere a contatto, è necessario porre $R_2^{(1)} = R_1^{(2)}$. Rimane ancora un raggio (o, nel caso generale, un parametro libero). È conveniente determinarlo in modo che l'aberrazione sferica sia ridotta al minimo (si veda problema 1).

Le coppie di lenti sottili affiancate e acromatiche sono largamente usate negli obiettivi dei microscopi. Ogni coppia è composta di una lente biconvessa in crown in contatto con una lente piano-concava in flint la cui superficie piana è rivolta verso la luce incidente.

4. Se le componenti (sottosistemi) di un sistema ottico complesso sono *completamente acromatizzate,* risulta *completamente acromatizzato* anche tutto il sistema. Infatti, essendo acromatico il primo sottosistema, le immagini fornite da questo sottosistema coincidono per due radiazioni semplici. Considerando le immagini coincidenti come oggetto per il secondo sottosistema, troviamo che le immagini forniti da questo sottosistema coincidono anch'asse per le stesse due radiazioni. Applicando questo ragionamento per tutti i sottosistemi, troviamo che la coincidenza di immagini vale anche per tutto il sistema.

La proposizione inversa *non è valida.* Il sistema può essere completamente acromatizzato senza che le sue componenti lo siano. Tuttavia, se un sistema è composto di due lenti sottili che si trovano ad una certa distanza la proposizione inversa vale ancora. Infatti, siano x_1, x_1' e y_1, y_1' ascisse ed ordinate del punto oggetto e della sua immagine intermedia formata dalla prima lente, l'origine delle coordinate sia il centro di questa lente. Siano x_2, x_2' e y_2, y_2' le coordinate corrispondenti per la seconda lente, per la quale l'immagine data dalla prima lente gioca il ruolo di oggetto. Evidentemente, le ordinate y_1' e y_2 dell'immagine intermedia sono identiche e le ascisse x_1' e x_2 sono legate dalla relazione $x_1' = x_2 + l$, dove l è la distanza tra le lenti. Gli ingrandimenti trasversali della prima e della seconda lente sono rispettivamente uguali a

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{x_1'}{x_1}, \quad \frac{y_2'}{y_2} = \frac{x_2'}{x_2}.$$

Di qui, tenendo conto della relazione $y_1' = y_2$, troviamo

$$\frac{y_2'}{y_1} = \frac{x_1'}{x_1}\frac{x_2'}{x_2}, \tag{16.9}$$

cioè l'ingrandimento trasversale di tutto il sistema. Per ipotesi, il sistema composto è completamente acromatizzato e perciò l'ingrandimento deve essere lo stesso per entrambe le radiazioni semplici considerate. Quindi, la variazione del primo membro e quindi quella del secondo membro dell'uguaglianza (16.9) s'annullano. Ma l'ascissa x_1 dell'oggetto è costante, e l'ascissa x_2' è la stessa per entrambe le radiazioni. Pertanto, prendendo la variazione del logaritmo del secondo membro della (16.9), otteniamo: $\frac{\delta x_1'}{x_1'} - \frac{\delta x_2}{x_2} = 0$. Inoltre, dalla relazione $x_1' = x_2 + l$, essendo la distanza l costante, segue: $\delta x_1' = \delta x_2$. Dunque, $\left(\frac{1}{x_1'} - \frac{1}{x_2}\right)\delta x_1' = 0$. Se

$\frac{1}{x_1'} - \frac{1}{x_2} \neq 0$, cioè $l \neq 0$, si ha $\delta x_1' = 0$, cioè le immagini intermedie coincidono per entrambe le radiazioni. Ma ciò significa che la prima lente è completamente acromatizzata. Tenendo conto della proprietà d'inversione dei raggi luminosi, possiamo concludere che anche la seconda lente è completamente acromatizzata. La sola eccezione si osserva se $\frac{1}{x_1'} - \frac{1}{x_2} = 0$. In questo caso le lenti sono affiancate l'una all'altra ($l = 0$) e l'acromatizzazione è possibile persino nel caso in cui le lenti non siano acromatiche. Questo caso è stato dimostrato prima.

5. *Affinché un sistema di due lenti sottili che si trovano ad una distanza l non nulla l'una dall'altra sia acromatico è necessario che ciascuna lente sia acromatica. Tuttavia, se un acromatismo parziale, assicurato dall'uguaglianza delle distanze focali, è sufficiente, le lenti possono non essere acromatiche pur garantendo il sufficiente acromatismo.*

Infatti, la distanza focale di un sistema di due lenti sottili è data dalla formula (12.8). Troviamo da questa formula la condizione di acromatismo data dall'uguaglianza delle distanze focali

$$\delta \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{f_1} - \frac{l}{f_1 f_2}\right)\frac{\delta n_1}{n_1 - 1} + \left(\frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}\right)\frac{\delta n_2}{n_2 - 1} = 0, \qquad (16.10)$$

dove n_1 è l'indice di rifrazione della prima lente e n_2 della seconda. Se n_1 e n_2 sono uguali, questa condizione diventa

$$l = \frac{1}{2}(f_1 + f_2). \qquad (16.11)$$

Dunque, un sistema di due lenti sottili fabbricate con lo stesso tipo di vetro sarà acromatizzato per uguaglianza delle distanze focali rispetto a tutte le radiazioni dello spettro visibile, se la distanza tra le lenti è uguale alla semisomma delle loro distanze focali. Questo metodo d'acromatizzazione è utilizzato negli oculari dei cannocchiali (si veda § 24).

6. Gli obiettivi corretti dall'aberrazione di cromatismo per due radiazioni dello spettro visibile sono detti *acromatici*. In alcuni sistemi ottici (obiettivi dei microscopi, dei cannocchiali astronomici a fuochi lunghi e degli apparecchi spettrali) l'esistenza di uno spettro secondario (si veda punto 1) peggiora sostanzialmente la qualità dell'immagine. Abbe ha introdotto nei microscopi *obiettivi apocromatici*, cioè obiettivi nei quali l'acromatizzazione è realizzata per tre radiazioni dello spettro visibile ed è, inoltre, soddisfatta la condizione dei seni (si veda § 18). L'aberrazione cromatica che sussiste in questo caso si chiama *spettro terziario*.

7. Per concludere ricordiamo l'esistenza di *prismi composti* costruiti con vetri di differenti tipi. Nella fig. 60 è rappresentato un prisma acromatico composto. Il primo prisma, in crown, devia e diffonde i raggi lumino-

si. Il secondo prisma, in flint, devia questi raggi in senso inverso. La capacità dispersiva del flint è più grande di quella del crown e perciò il secondo prisma può essere scelto in modo che sia compensata la capacità dispersiva del primo ed ottenere che le direzioni di due radiazioni (per esempio, rossa e violetta) emergenti dal sistema in esame, siano le stesse. Ma la deviazione dei raggi luminosi, dovuta al primo prisma, è compensata solo in modo parziale. In conseguenza di ciò la luce bianca attraversa il prisma composto senza notevole dispersione ma con una deviazione laterale.
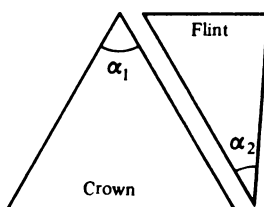
Fig. 60

Nella fig. 61,*a* è rappresentato un *prisma dispersivo* usato negli spettrografi. Questo prisma produce una grande dispersione dovuta al grande angolo rifrangente del prisma interno in flint. I prismi laterali in crown influiscono poco sulla dispersione del prisma composto, ma riducono notevolmente la deviazione dei raggi, poiché l'angolo tra le loro facce esterne è re-

a) *b*)
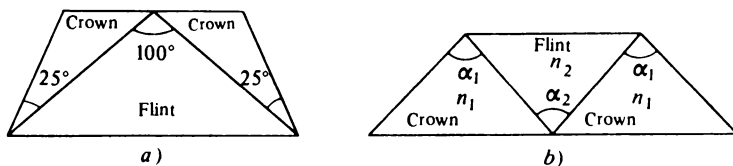
Fig. 61

lativamente piccolo. Inoltre, questi prismi permettono di aumentare l'angolo rifrangente del prisma interno, il cui valore è limitato dalla riflessione totale. Infine, nella fig. 61,*b* è rappresentato un *prisma a visione diretta,* che produce una decomposizione spettrale senza deviare il raggio medio del fascio luminoso.

Problemi

1. Calcolare un obiettivo acromatico di distanza focale f = 50 cm costituito da due lenti a contatto. La prima lente è costituita di crown C1 e la seconda di flint F8. La seconda lente che è convesso-concava presenta la sua faccia convessa verso l'esterno, il suo raggio di curvatura è uguale a 100 cm.

Soluzione. Dalla tavola 2 troviamo per la prima lente: $\nu_1 = 65,1$, $n_D = 1,4982$; per la seconda lente: $\nu_2 = 35,6$, $n_D = 1,6248$. Con l'aiuto delle formule (16.8) calcoliamo le distanze focali delle lenti

$$f_1 = f\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} = 50\cdot\frac{65,1 - 35,6}{65,1} = 22,66 \text{ cm},$$

$$f_2 = -f\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} = -50\cdot\frac{65,1 - 35,6}{35,6} = -41,43 \text{ cm}.$$

Secondo i dati del problema $R_2^{(2)} = -100$ cm. Applicando la formula (10.9) troviamo $R_1^{(2)}$

$$R_1^{(2)} = \frac{(n-1)f_2R_2^{(2)}}{(n-1)f_2 + R_2^{(2)}} = \frac{0,6248\cdot 41,43\cdot 100}{0,6248\cdot 41,43 - 100} = -20,56 \text{ cm}.$$

Il raggio $R_2^{(1)}$ ha lo stesso valore, di modo che

$$R_1^{(1)} = \frac{(n-1)f_1R_2^{(1)}}{(n-1)f_1 + R_2^{(1)}} = -\frac{0,4982\cdot 22,66\cdot 20,56}{0,4982\cdot 22,66 - 20,56} = 25,02 \text{ cm}.$$

L'obiettivo calcolato è rappresentato nella fig. 62.
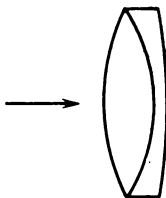
Fig. 62

2. Dire se è possibile costruire una lente spessa acromatica rendendo uguali le distanze focali per due lunghezze d'onda.

Risposta. L'acromatizzazione è possibile perché nella formula per la distanza focale di una lente spessa figura n^2. Quindi, per una distanza focale data possono esistere due valori dell'indice di rifrazione n_1 e n_2 ai quali corrisponde questa distanza focale. Lo spessore della lente deve essere uguale a

$$d = \frac{n^2}{n^2 - 1}(R_1 - R_2),$$

dove $n = \sqrt{n_1 n_2}$ è la media geometrica di n_1 e n_2. Essendo sostanzialmente positivo lo spessore *d*, l'acromatismo è possibile se $R_1 - R_2 > 0$. Questa condizione è verificata solo da lenti biconvesse o piano-concave. Tutte le altre lenti spesse non possono essere rese acromatiche.

3. Scrivere la condizione di acromatismo di un prisma rifrangente per due radiazioni vicine. Il prisma è costituito da due prismi aventi piccoli angoli rifrangenti, in vetri a coefficienti di dispersione ν_1 e ν_2.

Risposta. Gli angoli di rifrazione dei prismi debbono essere opposti l'uno all'altro. La condizione d'acromatismo è: $\frac{\varphi_1}{\nu_1} - \frac{\varphi_2}{\nu_2} = 0$ dove φ_1 è l'angolo di deviazione del primo prisma e φ_2 l'angolo di deviazione del secondo prisma. Se $\nu_1 \neq \nu_2$, la deviazione risultante è diversa da zero.

§ 17. *Condizione d'assenza di distorsione*

1. Nell'obiettivo delle macchine fotografiche è molto importante l'eliminazione della curvatura del piano immagine e della distorsione. Stabiliamo la *condizione d'assenza di distorsione.* Siano PP_1P_2 (fig. 63) il piano oggetto, $P'P_1'P_2'$ il piano immagine coniugato, O ed O' i centri delle pupille d'entrata e d'uscita. Tracciamo i raggi principali P_1O e P_2O che passano per i punti P_1 e P_2 del piano oggetto ed il centro della pupilla d'entrata. I raggi coniugati $P_1'O'$ e $P_2'O'$ passeranno per il centro O' della pupilla
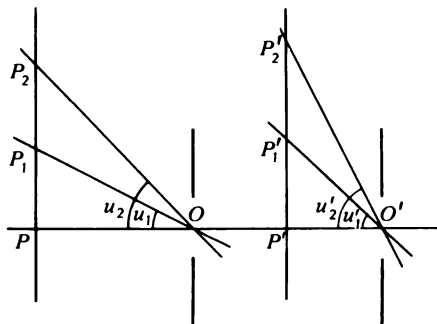
Fig. 63

d'uscita. Indichiamo con u ed u' gli angoli d'inclinazione di questi raggi rispetto all'asse ottico principale. Si ha allora $PP_1 = PO \operatorname{tg} u_1$, $P'P_1' = P'O' \operatorname{tg} u_1'$, $PP_2 = PO \operatorname{tg} u_2$, $P'P_2' = P'O' \operatorname{tg} u_2'$, e quindi

$$\frac{P'P_1'}{PP_1} = \frac{\operatorname{tg} u_1'}{\operatorname{tg} u_1}, \quad \frac{P'P_2'}{PP_2} = \frac{\operatorname{tg} u_2'}{\operatorname{tg} u_2}.$$

L'assenza di distorsione significa che gli ingrandimenti trasversali $P'P_1'/PP_1$ e $P'P_2'/PP_2$ sono gli stessi per qualsiasi posizione dei punti P_1 e P_2. Quindi, per eliminare la distorsione è necessario e sufficiente che sia verificata l'uguaglianza

$$\frac{\operatorname{tg} u_1'}{\operatorname{tg} u_1} = \frac{\operatorname{tg} u_2'}{\operatorname{tg} u_2}, \tag{17.1}$$

quali che siano i valori degli angoli u_1 ed u_2. Quest'uguaglianza si dice *condizione delle tangenti* o *condizione d'ortoscopia.* I punti O ed O' dell'asse ottico principale che soddisfano questa condizione si chiamano *punti ortoscopici.* I centri delle pupille d'entrata e d'uscita sono i centri dei campi oggetto e immagine. Dunque, la condizione d'assenza di distorsione si riduce all'esigenza che questi centri di prospettiva siano punti ortoscopici.

2. Il più semplice esempio in cui è verificata la condizione d'ortoscopia è l'obiettivo fotografico simmetrico rappresentato nella fig. 64. Esso è composto di due lenti doppie acromatizzate assolutamente identiche rivolte l'una all'altra con le facce concave. Il diaframma d'apertura si trova al centro tra queste lenti doppie. Essendo questo diaframma posto vicino ad entrambe le lenti, entrambe le sue immagini sono virtuali, diritte e si trovano di solito all'interno dell'obiettivo non lontano dal diaframma $A_1 A_2$. L'immagine $D_1 D_2$ fornita dalla lente anteriore si trova a destra dal diaframma $A_1 A_2$ e funge da pupilla d'entrata del sistema; l'immagine $D_1' D_2'$ fornita
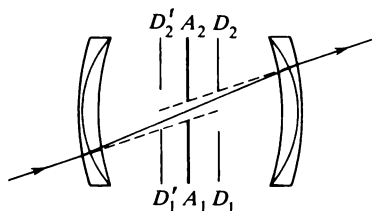
Fig. 64

dalla lente posteriore si trova a sinistra del diaframma $A_1 A_2$ e funge da pupilla d'uscita. La pupilla d'uscita $D_1' D_2'$ è l'immagine della pupilla d'entrata $D_1 D_2$ fornita da tutto il sistema ottico.

Come risulta chiaro dalla fig. 64, quest'immagine è prodotta con un ingrandimento trasversale $+1$. Pertanto i piani delle pupille d'entrata e d'uscita sono i piani principali ed i centri di queste pupille sono i punti principali dell'obiettivo. Consideriamo ora un raggio incidente qualsiasi che passi per il centro della pupilla d'entrata. In questo caso, in virtù della simmetria, il raggio emergente attraversa il centro della pupilla d'uscita, ed il raggio stesso deve passar per il centro del diaframma d'apertura. Quindi, gli angoli d'inclinazione u ed u' di questi raggi principali sull'asse ottico principale saranno sempre uguali, quali che siano i valori degli angoli stessi u ed u'. Ciò vuol dire che nel sistema considerato è verificata la condizione d'ortoscopia.

§ 18. *Condizione dei seni di Abbe*

1. Gli oggetti studiati al microscopio sono piccoli e vengono messi davanti all'obiettivo in prossimità dell'asse ottico principale. L'apertura del fascio di raggi che formano l'immagine nel microscopio deve essere la più grande possibile (nei migliori obiettivi l'apertura raggiunge praticamente il valore limite teorico di 180°). Ciò aumenta la brillanza dell'immagine e, soprattutto, aumenta il potere risolutivo dell'obiettivo, cioè la sua capacità di

risoluzione (la capacità separatrice o potere risolutivo caratterizzano la capacità dello strumento di distinguere i dettagli fini dell'oggetto esaminato) (si veda § 56). Perciò i punti coniugati dell'asse ottico principale, quello in cui si trova l'oggetto e quello in cui si forma la sua immagine fornita dall'obiettivo, debbono essere *astigmatici,* cioè il punto oggetto P deve avere per immagine un punto P' anche se si lavora con fasci luminosi di grande apertura (si veda § 9). Questa condizione è necessaria ma non sufficiente. È necessario che per tutti i punti di un elemento di superficie del piano oggetto passante per il punto P perpendicolarmente all'asse ottico principale si ottenga un'immagine priva di aberrazioni. Praticamente si tratta di eliminare l'aberrazione sferica ed il coma. I punti P e P' dell'asse ottico principale che soddisfano questa condizione sono detti *aplanatici.*

L'importanza dell'aplanatismo è stata dimostrata dal fisico tedesco Abbe (1840-1905), fisico specializzato nella teoria degli strumenti ottici, che ha indicato le vie di miglioramento di questi strumenti. Abbe dedicò un'attenzione particolare alla teoria ed al perfezionamento del microscopio. La sua lunga e proficua collaborazione con la nota ditta ottica Zeiss di Iena ebbe come risultato la messa a punto dei migliori strumenti ottici nei quali venne praticamente realizzato tutto ciò che, in linea di principio, è possibile ottenere dalla teoria ondulatoria della luce. Abbe stabilì la condizione necessaria e sufficiente per ottenere l'aplanatismo, nota sotto il nome di *condizione dei seni,* che dimostreremo.

2. Tenendo conto della simmetria assiale del sistema ottico consideriamo al posto delle immagini piane di piccole superficie le immagini di *segmenti rettilinei* di piccola lunghezza, perpendicolari all'asse ottico principale. Supponiamo che il fascio luminoso di grande apertura, inviato nel sistema da un segmento rettilineo PQ, produca un'immagine avente la forma di un segmento rettilineo $P'Q'$, perpendicolare all'asse principale (fig. 65). Le lunghezze ottiche di un qualsiasi raggio che passa per le coppie di punti coniugati P e P', Q e Q' sono uguali.
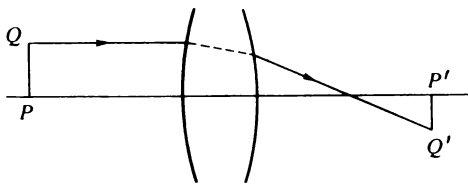
Fig. 65

Dimostriamo che la lunghezza ottica (PP') di un raggio qualsiasi che unisce i punti aplanatici P e P' è uguale alla lunghezza ottica (QQ') di un raggio qualsiasi che unisce i punti coniugati Q e Q'. In altre parole, le lunghezze ottiche dei raggi che uniscono punti coniugati del segmento PQ e

della sua immagine $P'Q'$ sono uguali per tutte le coppie di punti coniugati. In virtù di queste proprietà delle lunghezze ottiche dei raggi che uniscono i punti coniugati, è sufficiente dimostrare quest'asserzione per raggi parassiali emessi da punti dell'oggetto PQ parallelamente all'asse ottico principale. Il fronte d'onda corrispondente a questi raggi diventa sferico dopo aver attraversato l'obiettivo; ogni piccola porzione di questa superficie sferica può essere considerata piana. L'oggetto PQ è contenuto per intero nel piano del fronte d'onda incidente, e la sua immagine $P'Q'$ in quello del fronte d'onda emergente. Ma, essendo uguali le lunghezze ottiche di tutti i
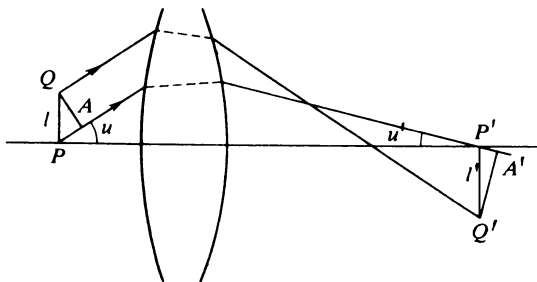
Fig. 66

raggi tra due posizioni del fronte d'onda, la nostra proposizione risulta dimostrata.

Facciamo ora passare per i punti del segmento PQ un fascio di raggi paralleli che formino un angolo arbitrario u con l'asse ottico principale (fig. 66). Visto che tutti i raggi sono contenuti in uno stesso piano, il fronte d'onda corrispondente è rappresentato dal segmento rettilineo QA perpendicolare ai raggi. Dopo aver attraversato l'obiettivo i raggi non sono più paralleli, ma, essendo l'oggetto PQ piccolo, anche l'angolo di divergenza dei raggi emergenti è piccolo. Trascurando quest'angolo, si può considerare che tutti i raggi emergenti sono inclinati sull'asse ottico praticamente dello stesso angolo u'. La parte corrispondente del fronte d'onda è rappresentata dal segmento rettilineo $Q'A'$. Visto che le lunghezze ottiche di tutti i raggi compresi tra i fronti d'onda sono uguali, si ha $(AP'A') = (QQ')$. Secondo il teorema appena dimostrato si ha $(PAP') = (QQ')$, e la relazione precedente diventa $(PAP') = (AP'A')$. Sottraendo dai due membri di quest'uguaglianza la lunghezza comune (AP'), otteniamo $(PA) =$ $= (P'A')$ ossia

$$nl \sin u = n'l' \sin u', \tag{18.1}$$

dove l e l' sono le lunghezze dei segmenti PQ e $P'Q'$, n e n' gli indici di rifrazione degli spazi oggetto e immagine. L'uguaglianza (18.1) esprime la condizione dei seni d'Abbe. Questa condizione deve essere verificata per

tutti i valori dell'angolo u e per tutti i piccoli valori della lunghezza l del segmento. Per i raggi parassiali la condizione dei seni (18.1) si riduce al teorema di Lagrange-Helmholtz (10.6) e quindi è verificata per tutte le coppie di punti coniugati dell'asse ottico principale.

Nel paragrafo seguente viene data una dimostrazione più rigorosa della condizione dei seni d'Abbe fondata sul teorema dei coseni.

3. Un esempio importante di punti aplanatici è fornito dalla costruzione di Weierstrass (1815-1897) del raggio rifratto sulla superficie di una sfera. Siano R il raggio della sfera e n il suo indice di rifrazione rispetto all'ambiente (fig. 67). Costruiamo due sfere S e S' di raggi nR e R/n, concentriche rispetto alla superficie sferica rifrangente. Prolunghiamo il raggio incidente AB fino al punto d'intersezione P con la sfera S ed uniamo il punto P con il centro O della sfera rifrangente. La retta OP interseca la sfera S' nel punto P'. La retta che unisce il punto d'incidenza B con il punto P' definisce la direzione del raggio rifratto. Infatti, dalla similitudine dei triangoli OBP e OBP' segue che l'angolo $OP'B$ è uguale all'angolo d'incidenza φ, e perciò

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{OB}{OP'} = n,$$

come si doveva dimostrare.

La costruzione mostra che il fascio di raggi incidenti convergente verso il punto P dopo la rifrazione sulla superficie sferica converge nel punto P'. Inversamente, se la sorgente puntiforme viene posta in P', dopo la rifrazione si ottiene un fascio di raggi divergenti da P. Quindi, P e P' sono punti coniugati astigmatici ed inoltre aplanatici.

In virtù della simmetria sferica, non solo i punti P e P', ma anche le sfere S e S' sono immagini l'una dell'altra per un fascio di raggi di grande apertura. Essendo entrambe le superfici sferiche normali alla retta PP', i punti P e P' debbono verificare la condizione dei seni, come è facile verificare. I punti Q e Q' sono, evidentemente, anch'essi aplanatici. Infine, il centro O della sfera può essere considerato come una coppia di punti aplanatici coincidenti, che sono simultaneamente punti nodali del sistema.

Dunque, sull'asse ottico QP si trovano tre coppie di punti aplanatici isolati: P e P', Q e Q' ed il punto aplanatico doppio O.

4. I punti aplanatici di una sfera sono utilizzati per la costruzione di *obiettivi ad immersione* dei microscopi a ingrandimento molto forte. Si dice ad immersione un obiettivo in cui tra il vetro di copertura e la lente frontale viene introdotto uno strato di liquido. L'immersione fu introdotta nel 1840 da Amici (1786-1863). Per diminuire la rifrazione sulla superficie del vetro di copertura, nociva per l'immagine, Amici riempiva d'acqua l'interstizio tra il vetro di copertura e la lente frontale dell'obiettivo. Nel 1878 Abbe cominciò ad utilizzare un'*immersione omogenea* cioè un liquido ad indice di rifrazione quasi uquale a quello del vetro di copertura e della lente

frontale. In un tale sistema i raggi emessi dai differenti punti dell'oggetto si propagano in modo praticamente rettilineo fino al diottro sferico della lente frontale dell'obiettivo. Per l'immersione omogenea si utilizza olio di cedro ($n = 1{,}515$). Nel sistema ad immersione omogenea d'Abbe la lente frontale dell'obiettivo è una semisfera di vetro la cui faccia piana è volta verso l'oggetto (fig. 68). L'oggetto è messo ad una distanza $OP = R/n$ dal centro (R è il raggio della semisfera). Poiché i raggi prima di uscire dalla lente frontale non subiscono alcuna rifrazione, ne segue che P è un punto
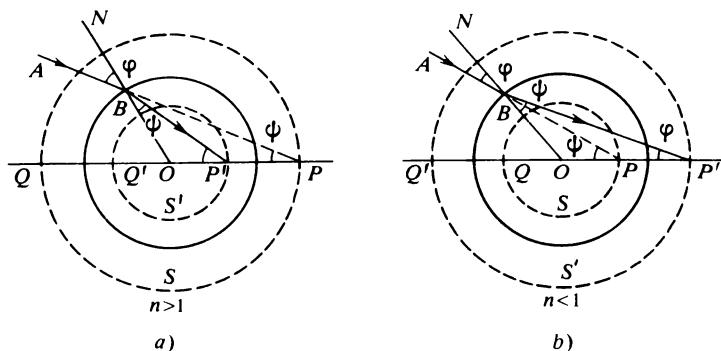
Fig. 67

aplanatico. L'immagine dell'oggetto si forma nel punto aplanatico coniugato P' ad una distanza $OP' = Rn$ dal centro O. Come appare chiaro dalla costruzione di Weierstrass, l'ingrandimento lineare è uguale a n^2. Pertanto dalla (18.1) segue che sin $u' = (\sin u)/n$, cosicché l'angolo d'inclinazione del raggio sull'asse ottico diventa più piccolo.

Al fine di ottenere un ingrandimento più forte e per diminuire ancor più l'inclinazione dei raggi sull'asse ottico, Amici propose di mettere dietro la lente frontale una lente convessa-concava. Il punto P' deve trovarsi nel centro di curvatura della superficie concava della lente. Rispetto alla rifrazione su questa superficie il punto P' è un punto aplanatico coincidente con il suo punto coniugato. Il punto P' deve simultaneamente trovarsi ad una distanza R_1/n_1 dal centro di curvatura della superficie convessa della seconda lente (n_1 è l'indice di rifrazione di questa lente e R_1 il raggio di curvatura della sua superficie convessa). In questo caso rispetto alla rifrazione su questa superficie il punto P' è un punto aplanatico, e la sua immagine si forma nel punto aplanatico coniugato P''.

Applicando il metodo di Amici più volte, si può ottenere una diminuzione a piacere degli angoli d'inclinazione dei raggi sull'asse ottico. Inoltre, in questo caso è verificata la condizione dei seni per l'intero sistema. Il metodo di Amici è spesso utilizzato nella costruzione degli obiettivi per microscopi, ma mediante questo metodo si possono costruire, al più, le prime

due lenti, poiché altrimenti compare una forte aberrazione cromatica che non può essere assolutamente compensata.

5. Ad Abbe appartiene un semplice metodo di prova degli obiettivi per la verifica della condizione dei seni. Supponiamo che nel secondo punto aplanatico P' dell'obiettivo (fig. 69) sia posto un piccolo diaframma attraverso il quale si effettuano le osservazioni. La sua immagine, fortemente ridotta che si forma nel punto coniugato aplanatico P, svolge il ruolo di pupilla d'entrata del sistema. Consideriamo l'immagine d'una parte finita del piano AB formata dall'obiettivo, nel caso in cui la distanza q di questo piano dal punto P è molto grande rispetto al diametro della pupilla d'entrata. Spostando l'oggetto a sinistra del punto aplanatico P la sua immagine si sposta anch'essa a sinistra (si veda § 11, punto 6), quindi l'immagine del piano AB si forma a sinistra del secondo punto aplanatico P'. Se la distanza q è sufficientemente grande, l'immagine $A'B'$ del piano AB si può vedere ad occhio nudo attraverso il diaframma.
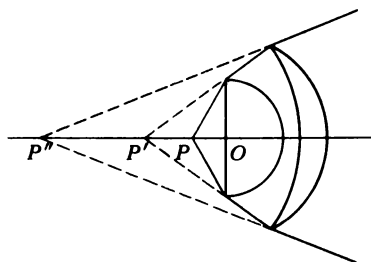
Fig. 68

L'immagine che si ottiene è molto deformata poiché si utilizza un fascio di raggi obliqui molto inclinati rispetto all'asse ottico principale. Però, tenendo conto che la pupilla d'entrata è molto piccola nello sviluppo delle aberrazioni in serie di potenze si possono trascurare tutti i termini contenenti il raggio della pupilla d'entrata σ, conservando il solo termine nullo che non contiene σ. In altre parole, è sufficiente limitarsi a tener conto della *sola distorsione*. In
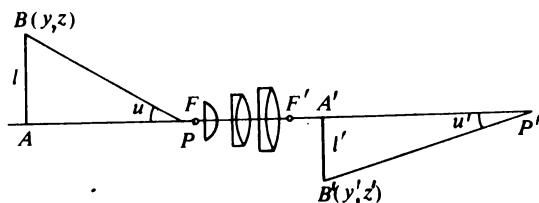
Fig. 69

quest'approssimazione l'immagine $A'B'$ sarà disposta nel piano immagine dei raggi parassiali.

Ci poniamo il problema di trovare nel piano oggetto AB una famiglia di curve tale che la loro immagine nel piano $A'B'$ abbia la forma di un reticolo rettangolare.

Prendiamo nel piano oggetto un punto arbitrario B di coordinate y, z a distanza $\sqrt{y^2 + z^2}$ dall'asse ottico principale. Facciamo passare il raggio BP per il centro della pupilla d'entrata. Il raggio coniugato $B'P'$ è univocamente definito dalla condizione dei seni

sin u'/sin $u = A$, dove $A = nl/(n'l')$, cioè per l'obiettivo in esame A è una quantità costante, u ed u' sono gli angoli d'inclinazione dei raggi incidente ed emergente rispetto all'asse ottico principale. La posizione dell'immagine B' è definita dal punto d'intersezione del raggio $B'P'$ con il piano delle immagini parassiali. Al posto di sin u e sin u' sostituiamo i loro valori

$$\sin u = \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{q^2 + y^2 + z^2}}, \quad \sin u' = \sqrt{\frac{y'^2 + z'^2}{q'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

dove q' è la distanza tra il piano $A'B'$ ed il punto aplanatico P'. Teniamo inoltre conto del fatto che i punti B e B' si trovano nello stesso piano che passa per l'asse ottico principale, di modo che $z'/y' = z/y$. Si ottiene allora

$$[A^2q'^2 - (1 - A^2)y'^2]y^2 - y'^2(1 - A^2)z^2 = q^2y'^2.$$

Prendiamo ora nel piano $A'B'$ una famiglia di rette parallele all'asse Z: $y' = C$, dove C è un parametro che può assumere valori arbitrari. L'equazione delle curve nel piano oggetto AB, la cui immagine è data da questa famiglia, si trova dalla relazione precedente, sostituendo in essa y' con C. Si ottiene dunque

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \tag{18.2}$$

dove

$$a^2 = \frac{q^2\omega^2}{1 - (1 - A^2)\omega^2}, \quad b^2 = \frac{q^2}{1 - A^2}, \tag{18.3}$$

e ω è il nuovo parametro legato al parametro C dalla relazione

$$\omega = C/Aq'. \tag{18.4}$$
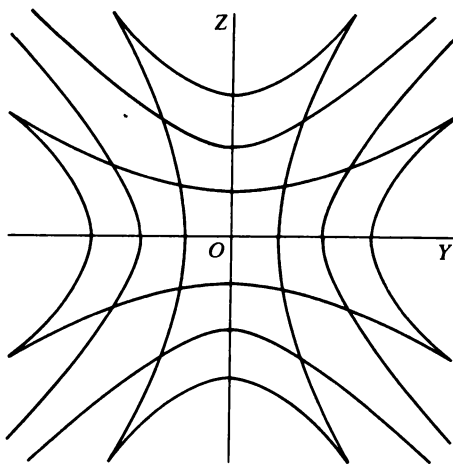
Fig. 70

Per gli obiettivi dei microscopi si ha sempre $A^2 < 1$, cosicché per $\omega^2 < 1/(1 - A^2)$ la quantità a è essenzialmente positiva. In questo caso la (18.2) rappresenta una famiglia di iperboli il cui asse è l'asse coordinato Y. Per $\omega = 0$ l'equazione (18.2) diventa $y^2 = 0$ e rappresenta l'asse Z. I valori $\omega^2 > 1/(1 - A^2)$ debbono essere esclusi, poiché in questo caso l'equazione (18.2) rappresenta una famiglia di ellissi virtuali e non si ottiene nessun'immagine ottica. Analogamente, la famiglia di rette $z' = C$, per gli stessi valori del parametro ω, è l'immagine ottica della famiglia di iperboli

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{18.5}$$

che risulta dalla famiglia (18.2) per una rotazione di 90° attorno all'origine O delle coordinate. Le famiglie di iperboli (18.2) e (18.5) s'intersecano tra loro formando una rete curvilinea riportata nella fig. 70. Passando da un'iperbole a quella vicina, il parametro ω deve aumentare
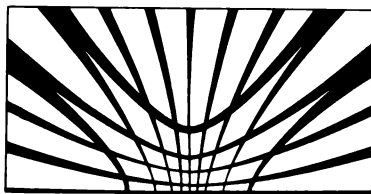
Fig. 71

di una stessa quantità ed allora anche gli incrementi del parametro C, come è evidente dalla (18.4), sono uguali. Quindi, se la fig. 70 è posta ad una distanza q davanti al punto aplanatico anteriore P, l'immagine delle iperboli è un reticolo rettangolare di rette. Per $\omega^2 = 1/2(1 - A^2)$ l'equazione (18.2) diventa $y^2 - z^2 = b^2$, mentre la (18.5) si trasforma in $z^2 - y^2 = b^2$. Entrambe queste iperboli hanno per asintoti le bisettrici degli angoli formati dagli assi coordinati. Quindi, b è la distanza tra l'origine delle coordinate ed il vertice dell'iperbole. Per gli obiettivi di un microscopio, A è una quantità sufficientemente piccola per poter trascurare A^2 rispetto all'unità. In quest'approssimazione $b = q$. Ciò fornisce un procedimento semplice per determinare la distanza q alla quale deve essere messa la fig. 70 affinché la sua immagine si presenti sotto forma di reticolo rettangolare.

Ora si può comprendere il principio del metodo di Abbe per verificare la condizione dei seni negli obiettivi di microscopio. Abbe ha utilizzato la sagoma riportata nella fig. 71. Dopo aver rimosso l'oculare del microscopio, questa sagoma deve essere messa ad una distanza q davanti al punto aplanatico anteriore (punto oggetto). L'occhio dell'osservatore si pone al secondo punto aplanatico (punto immagine). La pupilla dell'occhio funge da pupilla d'uscita e la sua immagine, formata dall'obiettivo, da quella d'entrata del sistema. Se l'immagine della sagoma presenta sotto forma di una rete di quadrati, l'obiettivo verifica la condizione dei seni. Se l'immagine che si ottiene è troppo piccola, si può utilizzare un microscopio ausiliare di debole ingrandimento, davanti al cui obiettivo è posto un piccolo diaframma che si trova al secondo punto aplanatico P'. Sottoponendo a questo procedimento di controllo un gran numero di obiettivi di microscopio che erano stati fabbricati dai migliori maestri senza alcun calcolo preliminare, Abbe ha constatato che tutti i buoni obiettivi verificavano sempre la condizione dei seni.

§ 19. *Teorema dei coseni. Immagini stigmatiche formate da fasci di grande apertura*

1. Generalizziamo i risultati del paragrafo precedente al caso di un sistema ottico arbitrario. Si suppone che i mezzi nei quali si propagano i raggi luminosi siano isotropi, ma non necessariamente omogenei. Dunque, nel caso generale, i raggi luminosi saranno curvilinei. Siano P e P' due punti di raggi vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$ che si trovano su un raggio luminoso. La lunghezza ottica del raggio che unisce questi punti, considerata come funzione delle loro coordinate, si chiama *iconale puntuale* o *funzione caratteristica del sistema ottico*. Questa funzione è stata introdotta da Hamilton (1805-1865) e risul-
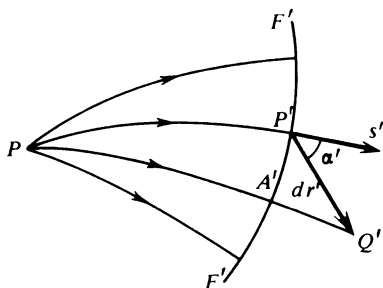
Fig. 72

ta molto utile per gli studi delle immagini ottiche. Denotiamo questa funzione con $H = H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$.

Dopo aver fissato la posizione del punto iniziale P, spostiamo il punto finale P'. Insieme con il punto P' si sposta anche il raggio PP' che lo unisce con il punto P. In conseguenza di questo procedimento si otterrà un fascio di raggi uscenti dal punto P in differenti direzioni, come se questo punto fosse una sorgente luminosa puntiforme (fig. 72). Sia $F'F$ il fronte d'onda di questo fascio passante per la posizione iniziale del punto P'. Quando il punto P' si sposta in Q', che si trova sul raggio $PA'Q'$, la funzione H acquista un incremento $\Delta H = (PA'Q') - (PP')$ da cui, essendo uguali le lunghezze ottiche PP' e PA', si ha

$$\Delta H = (PA'Q') - (PA') = (A'Q').$$

Se lo spostamento $d\boldsymbol{r}' = \overrightarrow{P'Q'}$ è infinitesimo, ΔH diventa uguale a

$$dH = n'|d\boldsymbol{r}'| \cos \alpha' = n'(\boldsymbol{s}'d\boldsymbol{r}'),$$

dove α' è l'angolo formato nel punto P' dal vettore $d\boldsymbol{r}'$ e dal vettore unitario $\boldsymbol{s}'$ del raggio, e n' è indice di rifrazione del mezzo nello stesso punto. Si trova in modo analogo anche l'incremento infinitesimo della funzione H,

quando il punto finale P' resta fisso, ed il punto iniziale si sposta di dr. In questo caso per i calcoli si deve utilizzare un fascio di raggi convergenti nel punto P' (fig. 73). Si ottiene allora $dH = -n(s\,dr)$, dove n, s e dr hanno lo stesso significato del caso precedente, ma si riferiscono al punto iniziale P. Variando entrambe le variabili indipendenti r e r', otteniamo

$$dH = n'(s'\,dr') - n(s\,dr). \tag{19.1}$$

Dimostriamo ora il *teorema* detto *dei coseni.*

Sia P' (fig. 74) l'immagine stigmatica del punto P. Uniamo questi punti con un raggio arbitrario, le cui direzioni in P e P' sono definite dai vettori unitari s e s'. Siano Q e Q' due punti infinitamente vicini a P ed a P'. Affinché il punto Q' sia l'immagine stigmatica del punto Q per fasci lar-
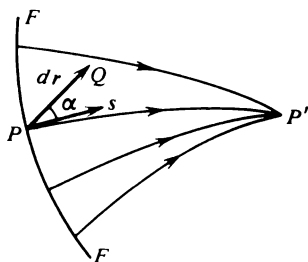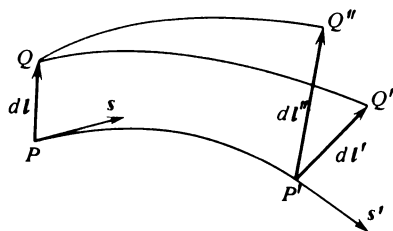
Fig. 73 Fig. 74

ghi, è necessario e sufficiente che la differenza

$$ns\,dl - n's'\,dl', \tag{19.2}$$

dove $dl = \overrightarrow{PQ}$ e $dl' = \overrightarrow{P'Q'}$, non dipenda dalla direzione del raggio che unisce P con P'.

Per dimostrare che la condizione è necessaria supponiamo che Q' sia l'immagine stigmatica del punto Q. Indichiamo con H la lunghezza ottica di un raggio qualsiasi che unisce i punti coniugati P e P', e con H' la lunghezza ottica di un raggio che collega i punti coniugati Q e Q'. In virtù della nota proprietà dei punti coniugati le grandezze H e H' e con esse anche la differenza $dH = H' - H = n's'\,dl' - ns\,dl$ non dipendono dai sensi dei raggi colleganti P con P' e Q con Q'. Dunque, l'espressione (19.2) è indipendente da s.

Dimostriamo ora che la condizione (19.2) è sufficiente. Uniamo i punti Q e Q' con il raggio QQ'. Tracciamo inoltre da Q un raggio arbitrario QQ'' e prendiamo su questo raggio un punto Q'' tale che la lunghezza ottica (QQ'') sia uguale a quella (QQ'). Dato che il teorema impone che P' sia l'immagine stigmatica del punto P, per ragioni di continuità il vettore $\overrightarrow{P'Q''} = dl''$ deve essere infinitesimo. In questo caso, in virtù della for-

mula (19.1), si ha

$$(QQ'') - (PP') = n's' \, dl'' - ns \, dl.$$

Secondo la stessa formula si ha anche

$$(QQ') - (PP') = n's' \, dl' - ns \, dl.$$

Visto che per costruzione $(QQ') = (QQ'')$, si ha $s' \, dl'' = s' \, dl'$, e secondo il teorema quest'uguaglianza deve essere verificata per tutte le direzioni del vettore s'. Ciò è possibile se e solo se $dl'' = dl'$, cioè se il punto Q'' coincide con Q'. Quindi, un raggio qualsiasi emergente da Q passerà per Q', il che dimostra che il teorema è sufficiente.
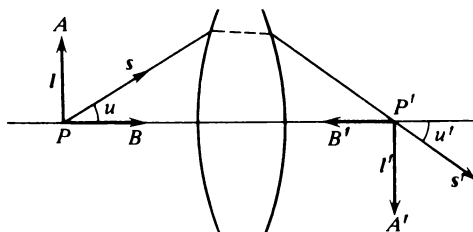
Fig. 75

Perché un fascio largo dia un'immagine stigmatica di una curva di lunghezza finita, è necessario e sufficiente che le condizioni del teorema dei coseni siano verificate per ogni coppia di segmenti infinitesimi coniugati di questa curva.

2. La condizione dei seni è un corollario del teorema dei coseni. Infatti, secondo questo teorema la differenza $nls - n'l's' = nl \sin u - n'l' \sin u'$ non deve dipendere dalla direzione del raggio che unisce i punti coniugati P e P' (fig. 75). Ma se il raggio si propaga lungo l'asse ottico la differenza si annulla ed in questo caso si ottiene la relazione (18.1) che non è solo una condizione necessaria, ma anche *sufficiente.*

Supponiamo ora che il segmento $l = PB$ si trovi sull'asse ottico. Troviamo la condizione nella quale questo segmento ha, con un fascio largo, un'immagine stigmatica avente forma di un segmento $l' = P'B'$ che si trova anch'esso sull'asse ottico. Nel caso considerato per $u = 0$ si ha

$$nls - n'l's' = nl \cos u - n'l' \cos u' = nl - n'l'.$$

In virtù del teorema dei coseni deve essere

$$nl \cos u - n'l' \cos u' = nl - n'l',$$

o

$$nl \sin^2 (u/2) = n'l' \sin^2 (u'/2), \qquad (19.3)$$

quali che siano i valori degli angoli u ed u'. Questa relazione si dice *condizione di Herschel.*

Siano P e P' punti aplanatici coniugati. Se a distanza infinitesima da questi punti esiste un'altra coppia di punti aplanatici Q e Q' (e, di conseguenza, un'infinità di tali coppie), la lunghezza ottica di un oggetto rettilineo infinitesimo che si trova nella vicinanza del punto P è uguale alla lunghezza ottica della sua immagine formata nelle vicinanze del punto P'. Infatti, essendo P e P' punti aplanatici, in virtù della condizione dei seni il rapporto

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{\cos (u/2)}{\cos (u'/2)} \cdot \frac{\sin (u/2)}{\sin (u'/2)}$$

deve essere indipendente da u. D'altro canto, essendo Q e Q' punti aplanatici anch'essi, un segmento infinitesimo PQ dell'asse ottico ha per immagine un segmento $P'Q'$ dello stesso asse. Deve essere verificata la condizione di Herschel: il rapporto

$$\frac{\sin^2 (u/2)}{\sin^2 (u'/2)}$$

deve essere indipendente dall'angolo u. Entrambe le condizioni possono essere verificate simultaneamente se e solo se $u = \pm u'$, cioè se i punti aplanatici P e P' sono punti nodali o nodali inversi del sistema. In questo caso se il segmento l è perpendicolare all'asse ottico, dalla (18.1) segue che $|nl| = |n'l'|$. Se il segmento l si trova sull'asse ottico, dalla (19.3) segue ancora che $|nl| = |n'l'|$. Dunque, il teorema è dimostrato per i seguenti due casi particolari: quando il segmento l si trova sull'asse ottico e quando è perpendicolare a questo asse. Con ciò il teorema è dimostrato anche per un segmento l di direzione qualsiasi.

In tutti i sistemi centrati utilizzati in pratica l'ingrandimento lineare è di regola differente da n/n', e pertanto dal teorema dimostrato segue che per questi sistemi le coppie di punti aplanatici (se esistono) possono solo essere costituite da *punti particolari* dell'asse ottico. Ciò significa che per ogni coppia di punti aplanatici si possono indicare intervalli finiti dell'asse ottico contenenti questi punti, all'interno dei quali non esiste un'altra coppia di punti aplanatici.

Nell'approssimazione dell'ottica parassiale la condizione dei seni e quella di Herschel sono sempre verificate. La prima di queste condizioni nell'approssimazione menzionata si trasforma nel teorema di Lagrange-Helmholtz. Per dimostrare la seconda, dalle relazioni (11.20), (11.17), (11.13) e (10.6) troviamo

$$\frac{\delta X'}{\delta X} = \frac{l'}{l} = -\frac{f^2}{X^2}\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n}\frac{y'^2}{y^2} = \frac{n}{n'}\frac{u^2}{u'^2},$$

che, per angoli u ed u' piccoli, coincide con la condizione di Herschel (19.3). Quindi l'uguaglianza degli angoli u ed u' e di conseguenza anche

l'uguaglianza delle lunghezze ottiche nl e $n'l'$ non sono necessarie. Grazie a questo fatto nell'ottica dei raggi parassiali gli ingrandimenti trasversale e longitudinale possono assumere un valore qualsiasi, non necessariamente uguale a n/n'.

3. *Sia P' un'immagine stigmatica del punto P. Per poter ottenere un'immagine stigmatica di un elemento infinitesimo di una superficie S passante per P, sotto forma di un elemento infinitesimo del piano S' passante per P', è necessario e sufficiente che sia verificata la condizione dei coseni per due segmenti infinitesimi non paralleli che si trovano nel piano S e passano per il punto P.*

La necessità del teorema è evidente. Per dimostrare la sua sufficienza uniamo P e P' con un raggio arbitrario. Siano dl_1 e dl_2 due vettori non collineari infinitesimi passanti per il punto P, per i quali è verificata la condizione del teorema dei coseni. Quindi, per definizione, le differenze

$$\begin{aligned} n's'\,dl_1' - ns\,dl_1 &= dH_1, \\ n's'\,dl_2' - ns\,dl_2 &= dH_2 \end{aligned} \tag{19.4}$$

sono indipendenti dalla direzione del raggio passante per P e P', ma possono dipendere dalle direzioni dei vettori dl_1 e dl_2. Un vettore arbitrario dl passante per P e contenuto nel piano oggetto può essere decomposto nei vettori dl_1 e dl_2

$$dl = a\,dl_1 + b\,dl_2,$$

ed inoltre i coefficienti a e b sono indipendenti da s. Introduciamo il vettore

$$dl' = a\,dl_1' + b\,dl_2',$$

moltiplichiamo le relazioni (19.4) per a e b e sommiamole. Si ottiene

$$n's'\,dl' - ns\,dl = dH, \tag{19.5}$$

dove $dH = a\,dH_1 + b\,dH_2$. Ne segue che la differenza (19.5) è indipendente da s, cioè la condizione del teorema dei coseni è verificata per un vettore dl arbitrario passante per P ed appartenente al piano oggetto. Quindi, l'oggetto è rappresentato dal sistema in modo stigmatico. In generale, l'immagine non sarà simile all'oggetto.

Le direzioni dei vettori non collineari arbitrari dl_1 e dl_2 si possono assumere come assi coordinati Y e Z nel piano oggetto, quelle dei segmenti coniugati dl_1' e dl_2' come assi coordinati Y' e Z' nel piano immagine, mentre i punti P e P' sono le origini delle coordinate dei corrispondenti sistemi. In questo caso il sistema ottico produce come immagini degli assi coordinati Y e Z nelle vicinanze del punto P gli assi coordinati Y' e Z' nelle vicinanze di P'. Le coordinate dei punti coniugati infinitamente vicini a P e P' sono allora legate da relazioni lineari

$$y' = Ay, \qquad z' = Bz. \tag{19.6}$$

In generale, il sistema coordinato $Y'Z'$ sarà obliquo, persino quando il sistema YZ è ortogonale. Ma se introduciamo nei piani oggetto ed immagine sistemi di coordinate ortogonali, dalle relazioni (19.6) e dalle formule di trasformazione delle coordinate segue direttamente che le coordinate ortogonali di punti coniugati sono collegate dalle formule di trasformazione lineare

$$y' = A_{11}y + A_{12}z, \qquad z' = A_{21}y + A_{22}z. \tag{19.7}$$

Dalle proprietà di trasformazione lineare segue che nel piano oggetto esiste una coppia di rette reciprocamente perpendicolari alla quale nel piano immagine corrisponde una coppia di rette reciprocamente perpendicolari. Se prendiamo queste quattro rette come assi coordinati le formule di trasformazione assumeranno di nuovo la forma della (19.6): l'unica differenza è che adesso entrambi i sistemi coordinati sono rettangolari. Poiché in generale, $A \neq B$, l'immagine di un elemento di superficie infinitesima non è simile all'oggetto: un cerchio infinitesimo ha come immagine un'ellisse. Solo nel caso particolare in cui $A = B$ il sistema fornisce immagini simili degli elementi di superficie infinitesima che si trovano nelle vicinanze del punto P.

4. Secondo Carathéodory (1873-1950) si dice che *un raggio luminoso si trova nel campo di uno strumento ottico se esso passa effettivamente dallo spazio oggetto allo spazio immagine attraverso diaframmi.* Si dice anche che *un segmento di curva è disposto tangenzialmente nel campo dello strumento se tutti i raggi che sono tangenti a questo segmento sono contenuti nel campo dello strumento.*

Supponiamo che il sistema ottico dia una rappresentazione stigmatica di un elemento di superficie infinitamente piccolo. Siano inoltre dl_1 e dl_2 segmenti infinitesimi non paralleli che si intersecano in un punto dell'elemento di superficie e contenuti nel suo piano. Se questi segmenti sono disposti tangenzialmente nel campo dello strumento l'elemento di superficie considerato è rappresentato dal sistema ottico con un'immagine simile. In questo caso la lunghezza ottica di tutti i segmenti contenuti nel piano dell'elemento di superficie è uguale alla lunghezza ottica dei segmenti coniugati.

Conformemente all'enunciato del teorema tutti i raggi uscenti da P (fig. 76) lungo le direzioni di dl_1 e dl_2 si trovano nel campo dello strumento. Nello spazio immagine questi raggi hanno le direzioni dei segmenti otticamente coniugati dl_1' e dl_2'. Vediamo dapprima la rappresentazione di dl_1. Consideriamo due raggi emergenti da P lungo le direzioni di dl_2 e dl_1. In base al teorema dei coseni si ha

$$n\, dl_1 \cos\alpha - n'\, dl_1' \cos\alpha' = n\, dl_1 - n'\, dl_1'. \tag{19.8}$$

Analogamente, considerando l'immagine del segmento dl_2, abbiamo

$$n\, dl_2 \cos\alpha - n'\, dl_2' \cos\alpha' = n\, dl_2 - n'\, dl_2'. \tag{19.9}$$

Supponiamo che $dl_1 = dl_2$ e dimostriamo che in questo caso $dl'_1 = dl'_2$. Infatti, sottraendo membro a membro la (19.9) dalla (19.8), abbiamo

$$n' \, dl'_1(1 - \cos \alpha') = n' \, dl'_2(1 - \cos \alpha'). \qquad (19.10)$$

La differenza $1 - \cos \alpha'$ non può essere nulla. Infatti, per ipotesi l'angolo α non è uguale a zero. Se si fissa la direzione di un raggio passante per un punto dato, questo raggio è definito in modo univoco. Se fosse $\alpha' = 0$, cioè se nel punto P' le direzioni di entrambi i raggi da noi considerati coincidessero, queste direzioni coinciderebbero in tutti gli altri punti, in particolare nel punto iniziale P. Dunque si avrebbe $\alpha = 0$, il che contraddice l'enunciato del problema. Perciò, dividendo i due membri della (19.10) per $n'(1 - \cos \alpha')$ si ottiene $dl'_1 = dl'_2$, come si voleva dimostrare.
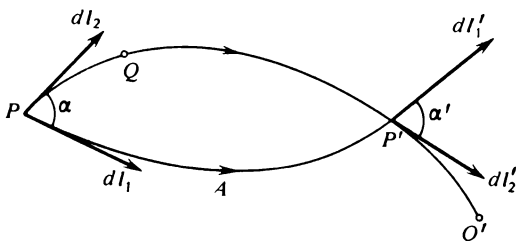
Fig. 76

Da quanto è stato dimostrato segue che i segmenti dl_1 e dl_2 sono rappresentati dal sistema ottico con lo stesso ingrandimento. Di conseguenza, nel caso considerato nelle formule (19.6), si ha $A = B$, cioè l'ingrandimento di ogni segmento contenuto nel piano oggetto non dipende dalla sua direzione. Ne segue che l'immagine è simile all'oggetto, cioè *è conforme.*

Ma l'immagine simile all'oggetto è caratterizzata dalla conservazione degli angoli. Quindi, $\alpha = \alpha'$ e la formula (19.8) dà $n \, dl_1 = n' \, dl'_1$. In generale, per tutti i segmenti dl contenuti nel piano oggetto, si ha $n \, dl = n' \, dl'$, $dl'/dl = n/n'$, e questo dimostra la seconda parte del teorema.

Quindi *una rappresentazione stigmatica degli elementi di una superficie tangente al campo dello strumento può essere ottenuta solo con un ingrandimento uguale a n/n'*. In particolare, se gli indici di rifrazione degli spazi oggetto ed immagine sono identici, l'ingrandimento è uguale all'unità. Questa proposizione non è valida per gli elementi di superficie che non sono tangenti al campo dello strumento.

A titolo d'esempio consideriamo la rifrazione su una superficie sferica (fig. 67). Mediante un fascio largo la sfera S dà un'immagine stigmatica sulla sfera S', ma l'ingrandimento lineare, come si vede dalla costruzione di fig. 67, è uguale al rapporto dei quadrati degli indici di rifrazione e non

al loro rapporto semplice. La ragione di ciò sta nel fatto che né la sfera *S*, né la sfera *S'* sono tangenti al campo dello strumento. Al contrario, se un oggetto lineare è posto nel punto *O*, che è la sovrapposizione di una coppia di punti nodali, l'ingrandimento lineare sarà uguale al rapporto degli indici di rifrazione, in conformità con il teorema da noi studiato. Infatti, data la simmetria sferica, ogni oggetto lineare posto nel centro *O*, è tangente al campo dello strumento.

Una parte infinitesima di una superficie finita può essere considerata come un elemento di superficie piano. Pertanto *per ottenere una rappresentazione stigmatica di una superficie finita, è necessario e sufficiente che tutti gli elementi infinitesimi risultanti da una suddivisione della superficie finita diano immagini stigmatiche.*

5. Consideriamo infine le rappresentazioni stigmatiche di oggetti a tre dimensioni fornite da fasci larghi. Questa questione può essere studiata esattamente nello stesso modo come la questione degli oggetti piani. In particolare, può essere dimostrato il seguente teorema:

Sia il punto P' l'immagine stigmatica del punto oggetto P. Affinché un elemento di volume infinitesimo che circonda il punto P sia rappresentato stigmaticamente, è necessario e sufficiente che sia verificata la condizione dei coseni per tre segmenti infinitesimi passanti per il punto P e non complanari.

Questo caso si distingue da quello della rappresentazione degli elementi di superficie per il fatto che la rappresentazione stigmatica di un elemento di volume fa sempre intervenire tre segmenti dl_1, dl_2 e dl_3 non complanari e tangenti al campo dello strumento. Pertanto, ripetendo i ragionamenti riportati nello studio della rappresentazione degli elementi di superficie, arriviamo alla conclusione che le rappresentazioni dei tre segmenti hanno lo stesso ingrandimento. Come corollario di ciò otteniamo il seguente teorema:

L'immagine stigmatica di un elemento di volume prodotta con l'aiuto di un fascio largo è sempre conforme (simile all'oggetto). Inoltre, l'ingrandimento lineare è uguale a n/n', di modo che la lunghezza ottica dell'oggetto è sempre uguale a quella dell'immagine.

§ 20. *Nozione di strumento ottico perfetto*

1. Dal punto di vista dell'ottica geometrica l'ideale sarebbe realizzare strumenti ottici che dessero di tutti i punti dello spazio oggetto, usando fasci larghi, una rappresentazione stigmatica nella forma di un punto dello spazio immagine. Un tale strumento è detto *perfetto*. Esaminiamo la possibilità di principio di realizzare un tale strumento e le proprietà che esso presenta.

Come è stato dimostrato nel paragrafo precedente, le immagini di og-

getti infinitesimi, fornite da uno strumento ottico perfetto, sono sempre *conformi.* Inoltre, la lunghezza ottica di ogni linea dell'oggetto è uguale alla lunghezza ottica della sua immagine. Ne segue che *in uno strumento perfetto la lunghezza ottica di un raggio tra due punti coniugati è la stessa per tutte le coppie di punti coniugati.* Questo è l'enunciato del *teorema di Carathéodory.*

Per dimostrarlo consideriamo due coppie di punti coniugati: P, P' e Q, Q' (fig. 76). Facciamo passare per P un fascio di raggi divergenti. Tutti questi raggi si intersecano in un punto P' ed uno di essi passa anche per il punto Q. Prendiamo un altro raggio arbitrario PAP'. In virtù della proprietà dei punti coniugati si ha $(PAP') = (PQP')$. Il raggio PQP', visto che passa per il punto Q, deve anche passare per il punto coniugato Q'. In questo caso la curva $P'Q'$ è l'immagine ottica della curva PQ e quindi $(PQ) = (P'Q')$. Ne segue che $(QP'Q') = (PQP')$. Confrontando quest'uguaglianza con la precedente, si ottiene $(PAP') = (QP'Q')$, come si doveva dimostrare.

2. Supponiamo ora che gli spazi oggetto ed immagine siano *omogenei,* cioè gli indici di rifrazione n e n' non dipendano dalle coordinate. In questo caso *ogni retta dello spazio oggetto è rappresentata dallo strumento perfetto con una retta dello spazio immagine.* Infatti, tracciamo per un punto arbitrario O dello spazio oggetto tre raggi non complanari che si trovano nel campo dello strumento. Nello spazio immagine i raggi coniugati s'intersecano nel punto coniugato O'. Prendiamo questi raggi come assi coordinati degli spazi oggetto ed immagine. È evidente che gli assi coordinati di un sistema avranno per rappresentazione gli assi coordinati dell'altro sistema. Senza perdere di generalità, si può supporre che gli assi con lo stesso senso siano coniugati. Dato che la rappresentazione è sempre fornita con lo stesso ingrandimento n/n', con una scelta conveniente dei sensi positivi degli assi le coordinate dei punti coniugati risultano legate dalle relazioni

$$x' = \frac{n}{n'}x, \quad y' = \frac{n}{n'}y, \quad z' = \frac{n}{n'}z, \tag{20.1}$$

che sono valide per tutti i punti dello spazio oggetto e dello spazio immagine, e non solo per le vicinanze dei punti coniugati O ed O'. Da queste relazioni segue direttamente che ogni retta avrà per immagine una retta. Quindi, *se n e n' sono costanti, uno strumento perfetto è un sistema telescopico.*

Dimostriamo ora che, *nel caso di n e n' costanti, uno strumento ottico perfetto è possibile solo per $n = n'$.* Osserviamo per la dimostrazione che l'ingrandimento lineare n/n' non dipende dalla posizione dell'oggetto. Per determinare questo ingrandimento, disponiamo un oggetto infinitesimo tangenzialmente alla superficie di separazione dei mezzi. In queste condizioni l'immagine formata per rifrazione o per riflessione si sovrappone all'oggetto. Ne segue che $n/n' = 1$, il che dimostra la nostra proposizione.

Quindi gli indici di rifrazione dei mezzi debbono essere uguali e non avrà luogo alcuna rifrazione.

Non resta altro che considerarė la riflessione dei raggi. Secondo il teorema di Carathéodory, la lunghezza ottica di un raggio tra i punti coniugati non dipende dalla posizione dell'oggetto. Mettiamo un oggetto puntiforme sulla superficie di separazione dei mezzi. La sua immagine si formerà nello stesso punto, e pertanto la lunghezza ottica del raggio tra l'oggetto e la sua immagine deve essere nulla, quale che sia la posizione dell'oggetto. Nel caso della rifrazione, se le lunghezze ottiche dei raggi conservano dappertutto i loro segni, questo sarebbe possibile solo se l'immagine coincide con l'oggetto stesso. Ma in questo caso, come abbiamo già visto, non esiste alcuna rifrazione e si può parlare di immagine solo in un modo convenzionale. Ma nel caso della riflessione, se l'immagine è virtuale, le lunghezze ottiche dei raggi possono avere segni differenti su differenti parti del cammino. Allora è anche possibile un caso non banale in cui l'oggetto e la sua immagine hanno posizioni differenti, benché le lunghezze ottiche dei raggi tra loro siano nulle. In questo caso le formule (20.1) diventano

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{20.2}$$

Questo caso è realizzato con uno specchio piano o un sistema di specchi piani. Questo è l'unico strumento ottico perfetto realizzabile per n e n' costanti.

3. *Si può realizzare uno strumento ottico perfetto che dia un ingrandimento diverso dall'unità, solo utilizzando mezzi non omogenei e raggi curvilinei.* Il primo esempio di un tale strumento è stato suggerito da Maxwell. In seguito sono stati dati anche altri esempi. Maxwell ha chiamato il suo strumento « *occhio di pesce* », benché questo strumento non assomigli assolutamente ad un occhio di pesce. D'altronde è difficile definire l'« occhio di pesce » di Maxwell uno strumento nel senso comune del termine. Infatti si tratta di un mezzo non omogeneo illimitato il cui indice di rifrazione varia allo spazio, di modo che ogni raggio ha la forma di un cerchio. All'idea dell'« occhio di pesce » si arriva in modo più naturale, utilizzando la costruzione geometrica della *proiezione stereografica.*

Una tale proiezione viene realizzata con il modo seguente. Prendiamo una sfera S, per il centro della quale tracciamo un piano coordinato XY (fig. 77). Sia N il punto d'intersezione di questa sfera con l'asse Z. Uniamo il puńto N con tutti i punti K della sfera mediante la retta NK e prolunghiamo questa retta fino all'intersezione con il piano XY in un punto P. Proprio il punto P è la proiezione stereografica del punto K sul piano XY. È facile dimostrare che le coordinate x, y, z del punto K sono legate alle coordinate ξ, η di P dalle relazioni

$$\xi = a\frac{x}{a - z}, \quad \eta = a\frac{y}{a - z}, \tag{20.3}$$

$$x = 2a^2 \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + a^2}, \quad y = 2a^2 \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2}, \quad z = a \frac{\xi^2 + \eta^2 - a^2}{\xi^2 + \eta^2 + a^2}, \tag{20.4}$$

dove a è il raggio della sfera S.

Ogni cerchio della sfera S per proiezione stereografica si trasforma in un cerchio del piano XY e viceversa. Infatti, il piano $Ax + By + Cz + D = 0$ interseca la sfera S secondo un cerchio. Se sostituiamo all'equazione di questo piano i valori delle coordinate forniti dalla (20.4), si ottiene
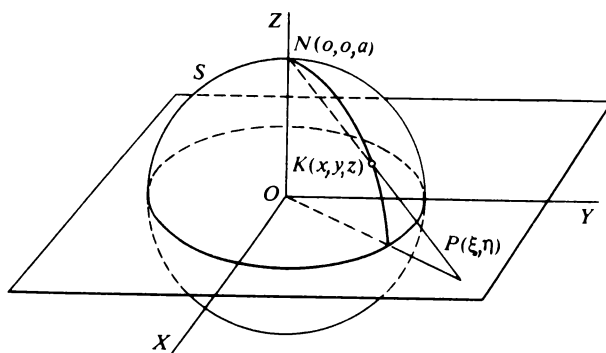
Fig. 77

un'equazione di secondo grado non contenente più il termine in $\xi\eta$ ed i quadrati ξ^2 e η^2 compaiono solo nella combinazione $\xi^2 + \eta^2$. Quest'è l'equazione di una circonferenza.

Sia $d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ l'elemento di lunghezza sulla sfera S. Per proiezione stereografica esso sarà rappresentato sul piano XY da un segmento di lunghezza $ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$. Utilizzando le formule (20.4), è facile dimostrare che questi elementi sono legati dalla relazione

$$d\sigma = \frac{2}{1 + (r/a)^2} ds, \tag{20.5}$$

dove $r^2 = \xi^2 + \eta^2$. La curva di lunghezza minima congiungente due punti su una superficie si dice *linea geodetica* di questa superficie. Per una sfera le linee geodetiche sono gli archi di cerchi massimi. Prendiamo sulla sfera S due punti diametralmente opposti $K(x_0, y_0, z_0)$ e $K'(-x_0, -y_0, -z_0)$. Siano P e P' le loro proiezioni stereografiche sul piano XY. Per la retta che unisce i punti K e K' si può tracciare un'infinità di piani intersecanti la sfera S lungo cerchi massimi passanti per questi punti. Per proiezione stereografica questi cerchi saranno rappresentati da circonferenze che uniscono i

punti P e P' (fig. 78). Lungo tutte queste circonferenze l'integrale $\int ds/(1 + r^2/a^2)$ assume lo stesso valore, come mostra la relazione (20.5).

Immaginiamo ora un mezzo avente simmetria sferica con il centro nell'origine delle coordinate O, il cui indice di rifrazione è dato dall'espressione

$$n = \frac{n_0}{1 + r^2/a^2}, \tag{20.6}$$

dove n_0 è una costante e r la distanza dall'origine delle coordinate. In questo caso le lunghezze ottiche di tutte le circonferenze tra i punti P e P' rappresentate nella fig. 78 saranno uguali. Ne segue che tutte queste circonferenze coincidono con i raggi luminosi emessi dal punto P e convergenti al
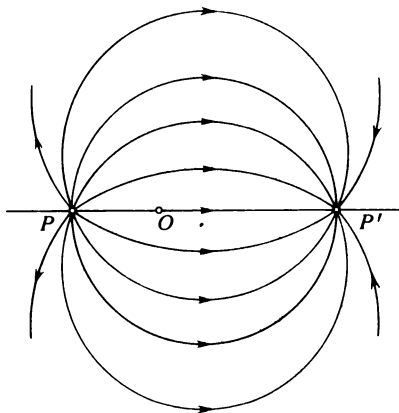
Fig. 78

punto P'. Una di queste circonferenze degenera in una retta che unisce i punti P e P'. Questa retta si ottiene in conseguenza della proiezione stereografica del cerchio massimo che si trova nel piano NKK'. L'origine O delle coordinate è contenuta nello stesso piano e quindi anche sulla retta PP'. In generale, la sua posizione non coincide con il centro del segmento PP', ad eccezione del caso in cui i punti K e K', diametralmente opposti della sfera S siano sul piano coordinato XY. In questo caso il cerchio massimo contenuto nello stesso piano coincide con la sua proiezione stereografica e perciò il raggio di curvatura del raggio luminoso sarà uguale a quello della sfera S, cioè ad a.

In virtù della simmetria sferica tutti i piani passanti per il centro O sono equivalenti. Pertanto il raggio emergente dal punto P attraverserà il punto coniugato P', indipendentemente dal fatto se esso appartiene al piano XY

oppure no. Inoltre, i ragionamenti riportati sono validi per ogni coppia di punti K e K' diametralmente opposti e per la corrispondente coppia di punti coniugati P e P'.

Si ottiene quindi il seguente risultato. Tutti i raggi emergenti da un punto qualsiasi P del mezzo, dopo aver percorso archi di circonferenza, si riuniscono in un altro punto P', cioè il punto P' è l'immagine stigmatica del punto oggetto P formata da fasci larghi. In altre parole, un mezzo con indice di rifrazione (20.6) possiede le proprietà di uno strumento ottico perfetto che Maxwell ha chiamato « occhio di pesce ».

§ 21. *Occhio e visione*

1. Nella fig. 79 è riportata in modo schematico la sezione orizzontale dell'occhio destro umano (veduta dall'alto). Il globo oculare è limitato da una membrana *ww* opaca e molto resistente detta *sclerotica*. Attraverso la parete posteriore della sclerotica passa il nervo ottico *e* ed i vasi sanguigni.
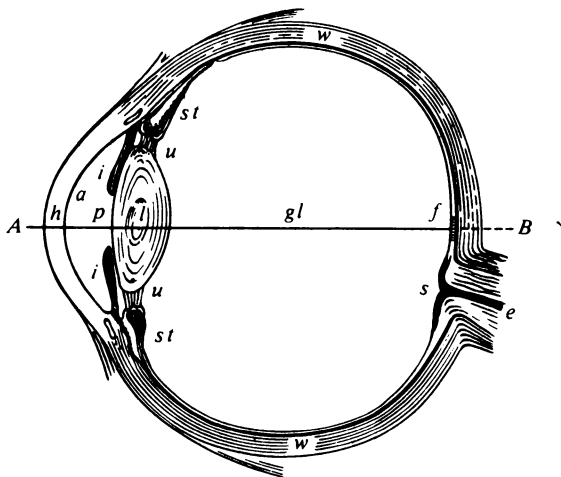
Fig. 79

La parte anteriore della sclerotica è costituita dalla *cornea trasparente h,* che è più convessa della sclerotica. Lo spessore della sclerotica è da 0,4 a 1,1 mm e quello della cornea è all'incirca di 0,5 mm. Dietro alla cornea ci sono in successione la *camera anteriore a, il cristallino l, la camera posteriore gl.* Queste parti, insieme con la cornea, formano il *sistema ottico dell'occhio* il quale, rifrangendo i raggi luminosi, dà immagini degli ogget-

ti. Lo spessore della camera anteriore dell'occhio, compreso il cristallino, è di circa 3,6 mm. La camera anteriore dell'occhio è riempita da un liquido trasparente detto *umore acqueo,* quella posteriore da una sostanza gelatinosa trasparente detta *umore vitreo.* Gli indici di rifrazione di entrambi questi mezzi sono praticamente uguali a 1,336. L'indice di rifrazione della cornea è uguale a 1,376.

La superficie interna della sclerotica è rivestita da una *membrana coroidea* (all'incirca di 0,4 mm di spessore) che contiene il sistema vascolare dell'occhio. Nella sua parte anteriore *st* questa membrana diventa più spessa e forma il muscolo ciliare anulare *uu* diventando poi l'*iride ii* che è colorata in modo diverso in individui differenti. Al centro dell'iride si ha un orifizio circolare detto *pupilla dell'occhio* che funge da diaframma d'apertura. L'immagine di quest'orifizio formata dall'umore acqueo e dalla cornea gioca il ruolo di pupilla d'entrata, mentre l'immagine formata dal cristallino e l'umore vitreo funge da pupilla d'uscita dell'occhio. Entrambe queste pupille coincidono praticamente con la pupilla fisica dell'occhio. Secondo la brillanza dell'oggetto la pupilla può dilatarsi o restringersi in modo riflesso con l'aiuto del muscolo anulare *uu* al quale è attaccata l'iride. Il diametro della pupilla può variare all'incirca da 2 a 8 mm, il che limita la sezione dei fasci luminosi che entrano nell'occhio.

2. Sulla superficie interna della coroide si trova la *retina* formata principalmente da ramificazioni divergenti radialmente dal nervo ottico *e,* che penetrano nella cavità interna dell'occhio vicino alla linea di visione diretta *AB,* dalla parte della cavità nasale. Vicino al punto *s* lo spessore della retina è di 0,2-0,22 mm; esso decresce ininterrottamente verso la periferia. Il sistema ottico dell'occhio forma le immagini sulla retina; la formazione delle immagini produce eccitazioni nervose che sono trasmesse al cervello attraverso i nervi.

Ad una piccola distanza dal punto *s* dove cominciano le ramificazioni del nervo ottico, si trova la cosiddetta *macchia lutea f* (dimensioni: lungo l'orizzontale 1-3 mm, lungo la verticale 0,8 mm). Nella sua parte centrale (dimensioni: $\approx 0,3$ mm lungo l'orizzontale, e $\approx 0,2$ mm lungo la verticale) si trova una cavità detta *fovea centrale.* Qui lo spessore della retina non è superiore a 0,08-0,1 mm. La macchia lutea ed in particolare la fovea centrale sono le regioni più sensibili della retina (per visione diurna). L'immagine dell'oggetto osservato è sempre portata al centro della fovea centrale. La retta passante per questo punto e per il punto nodale immagine dell'occhio insieme con la retta parallela passante per il punto nodale oggetto definisce il cosiddetto *asse visuale,* il quale non è del tutto coincidente con l'*asse di simmetria dell'occhio* poiché le superfici rifrangenti dell'occhio non sono del tutto simmetriche e centrate. L'asse di simmetria dell'occhio può essere tracciato solo convenzionalmente. Di solito esso è tracciato attraverso il punto estremo più prominente della superficie convessa della cornea (un po' più in alto del punto *A,* fig. 79) e per il centro della pupilla.

Quest'asse incontra la parete posteriore dell'occhio tra i punti f e s e forma con l'asse visuale AB un angolo di 5° all'incirca.

3. Il cristallino l è un corpo incolore trasparente che ricorda una lente biconvessa la cui faccia anteriore è meno convessa di quella posteriore. Il cristallino è costituito da strati di differente densità che hanno una struttura fibrosa. Lo strato esterno è soffice e quasi gelatinoso, mentre il nucleo del cristallino è più duro ed elastico. L'indice di rifrazione dello strato esterno del cristallino è 1,405, quello degli strati medi ~ 1,429 e quello del nucleo 1,454. Il muscolo anulare *uu,* contraendosi o rilassandosi, può variare la curvatura delle superfici del cristallino, principalmente di quella anteriore. Quest'azione produce l'*accomodazione,* cioè una variazione del potere ottico dell'occhio il che permette di formare l'immagine sempre sulla retina. Dato che la deformazione del cristallino può aver luogo solo entro certi limiti, ogni occhio ha dei limiti entro i quali può vedere nettamente gli oggetti. Questi limiti determinano il *campo d'accomodazione dell'occhio.* La distanza massima di visione distinta, alla quale l'occhio si accomoda con il muscolo anulare completamente rilassato, si dice *punto remoto* mentre la distanza minima alla quale l'occhio può ancora vedere distintamente con il massimo sforzo del muscolo, si chiama *punto prossimo.* In condizioni di riposo l'occhio normale è accomodato all'infinito, cioè esso fa convergere i raggi paralleli su un punto della retina, quindi il punto remoto di visione distinta per un occhio normale si trova all'infinito. Fino ad un'età di 10 anni il punto prossimo di un occhio normale si trova ad una distanza da 7 a 8 cm dall'occhio. Verso i 30 anni questa distanza aumenta all'incirca fino a 15 cm, e verso i 40-45 anni arriva a 25 cm.

Avvicinando l'oggetto osservato all'occhio, aumentiamo l'*angolo visuale* e con esso anche le dimensioni dell'immagine formata sulla retina. Ciò permette di distinguere i più minuti dettagli dell'oggetto. Ma nel caso d'avvicinamento massimo aumenta la contrazione del muscolo anulare che deforma il cristallino. Il lavoro dell'occhio diventa faticoso. Nel caso di un *occhio normale* la migliore distanza per leggere e scrivere è all'incirca 25 cm. Per un occhio normale quest'è la *distanza di visione netta.* Se è necessario osservare i dettagli dell'oggetto questa distanza può essere diminuita (per un tempo limitato), restando sempre nei limiti d'accomodazione dell'occhio.

4. Per un occhio *miope* entrambi i limiti di visione netta sono più ravvicinati di quelli di un occhio normale, mentre sono allontanati per un occhio *ipermetrope.* Il limite lontano dell'occhio ipermetrope è sempre negativo, cioè il punto lontano di visione netta si trova non davanti ma dietro l'occhio. A riposo l'occhio ipermetrope può raccogliere sulla retina solo raggi convergenti. Per un occhio fortemente ipermetrope può essere negativo anche il punto vicino di visione netta. Per l'occhio miope a riposo i raggi paralleli convergono in un punto davanti alla retina e per quello ipermetrope dietro ad essa.

La miopia può essere dovuta ad una maggior lunghezza dell'occhio e la ipermetropia ad una minor lunghezza rispetto ad un occhio normale. Uno scarto di 1 mm soltanto in confronto con la lunghezza dell'occhio normale può provocare la miopia o l'ipermetropia. Questi difetti dell'occhio, come altri, possono essere dovuti a valori inadeguati della curvatura delle superfici rifrangenti del cristallino e della cornea, alla loro asimmetria, alla posizione del cirstallino, ecc.

Il termine «ipermetropia» è inadeguato poiché viene associato alla concezione falsa che un occhio ipermetrope sia in grado di vedere nettamente gli oggetti lontani. Un occhio ipermetrope non possiede nessun vantaggio in confronto con quello normale, poiché tutto il campo che si vede con l'occhio ipermetrope, si vede nettamente anche con un occhio normale. Ma il campo compreso tra i punti vicini della visione netta degli occhi normale e ipermetrope è inaccessibile per la visione netta da parte di quest'ultimo. Al contrario, all'occhio miope è inaccessibile la regione che si trova al di là del punto lontano della visione netta dell'occhio normale [1].

Come è stato già detto, con l'età la posizione del punto vicino s'allontana (ciò è principalmente dovuto all'aumento di densità del cristallino, che perde la capacità di deformarsi). Per un occhio normale, verso i 50 anni, questa distanza è all'incirca di 50 cm. Diventa allora difficile leggere: aumentando l'età il punto vicino tende all'infinito e verso i 60-65 anni si sposta dall'altra parte dell'occhio. Poi questo punto comincia di nuovo ad avvicinarsi ad esso, sempre dall'altro lato. Questo è la *presbiopia*.

L'ipermetropia si corregge con l'aiuto di lenti *convergenti*, e la miopia mediante lenti *divergenti*. Le prime avvicinano e le seconde allontanano il punto vicino.

5. Misure sistematiche hanno permesso di stabilire i valori medi di tutti i parametri dell'occhio normale. L'insieme di questi valori definisce il cosiddetto *occhio tipo*. Nella tavola 3 sono riportati questi parametri (determinati da Gullstrand). Visto che gli indici di rifrazione dello spazio oggetto ($n = 1$) e di quello immagine ($n' = 1{,}336$) sono differenti, le distánze focali oggetto f ed immagine f' sono differenti ($f'/f = -1{,}336$). Il punto nodale immagine K' si trova all'interno dell'occhio alla distanza f dal fuoco immagine F', cioè dalla retina (cfr. fig. 43). Se la dimensione lineare dell'oggetto è uguale a l, esso viene visto dal punto dove si trova l'occhio, sotto un angolo $\alpha = l/L$. Perciò la dimensione lineare dell'immagine formata sulla retina è $l' = f\alpha = fl/L$, che per oggetti lontani vale $\approx 17\alpha$ mm.

6. La retina ha una struttura complessa; la sua sezione schematica è ri-

---

[1] L'occhio miope ha almeno un vantaggio: la possibilità di esaminare dettagli molto piccoli avvicinando l'oggetto considerato ad una distanza più piccola di quella possibile per un occhio normale. L'occhio ipermetrope avrebbe un vantaggio analogo, se avesse la possibilità di esaminare le immagini virtuali che si formano dietro l'occhio.

Tavola 3

Occhio standard secondo Gullstrand

(Tutte le lunghezze sono date in mm e tutte le distanze sono misurate dal vertice della cornea)

	Muscolo a riposo	Muscolo alla contrazione massima
Distanza dalla faccia posteriore della cornea	0,5	
Distanza dalla faccia anteriore del cristallino	3,6	3,2
Distanza dalla faccia posteriore del cristallino	7,2	
Raggio della faccia anteriore della cornea	7,7	
Raggio della faccia posteriore della cornea	6,8	
Raggio della faccia anteriore del cristallino	10	5,33
Raggio della faccia posteriore del cristallino	−6	−5,33
Potere ottico dell'occhio in diottrie	58,64	70,57
Distanza dal piano principale oggetto	1,348	1,772
Distanza dal piano principale immagine	1,602	2,086
Distanza dal fuoco oggetto	−15,707	−12,397
Distanza dal fuoco immagine	24,387	21,016
Distanza focale oggetto	17,055	14,169
Distanza focale immagine	−22,785	−18,930
Distanza dalla fovea centrale	24	
Distanza dalla pupilla d'entrata	3,047	2,668
Distanza dalla pupilla d'uscita	3,667	3,212
Ingrandimento alle pupille	0,909	0,941
Distanza del punto vicino		102,3

portata nella fig. 80,*a* (si suppone che la luce arrivi dall'alto). La retina è composta da vari strati di cellule nervose di tipo e di destinazione differenti. L'ultimo strato contiene *cellule recettrici fotosensibili,* i cosiddetti *coni* e *bastoncelli* (fig. 80,*b*). La luce produce in queste cellule *eccitazioni primarie* che, sotto forma di impulsi elettrici, sono trasmesse al cervello attraverso i nervi. La lunghezza totale di un bastoncello è 0,06-0,08 mm e quella di un cono ~0,035 mm. Un occhio contiene press'a poco 7 milioni di coni e 130 milioni di bastoncelli. Alla periferia della retina si trovano quasi esclusivamente bastoncelli. Il numero di coni per unità di area aumenta con l'avvicinamento alla macchia lutea e raggiunge il massimo nel suo centro. Sulla superficie della macchia lutea ci sono 13-15 mila coni. Al suo centro, in un cerchio di raggio ≈0,2 mm, ci sono soltanto coni, il loro numero diventa di 180 mila per millimetro quadrato, cosicché la distanza media tra i centri di coni vicini è all'incirca 0,0025 mm. Nella zona all'interno dell'occhio in cui entra il nervo ottico, cioè intorno al punto *s* della fig. 79, la retina non ha né bastoncelli, né coni. Questo è il *punto cieco,* che è facile da trovare chiudendo l'occhio sinistro ed esaminando con il destro la croce della fig. 81. Avvicinando l'occhio alla figura, a una distanza da 15 a 17 cm, il

cerchio diventa invisibile. Quest'effetto si produce quando l'immagine del cerchio si sovrappone al punto cieco.

I bastoncelli sono più sensibili alla luce che i coni. Di notte o al crepuscolo (quando la luminosità è inferiore a 0,01 lux) le sensazioni visive sono
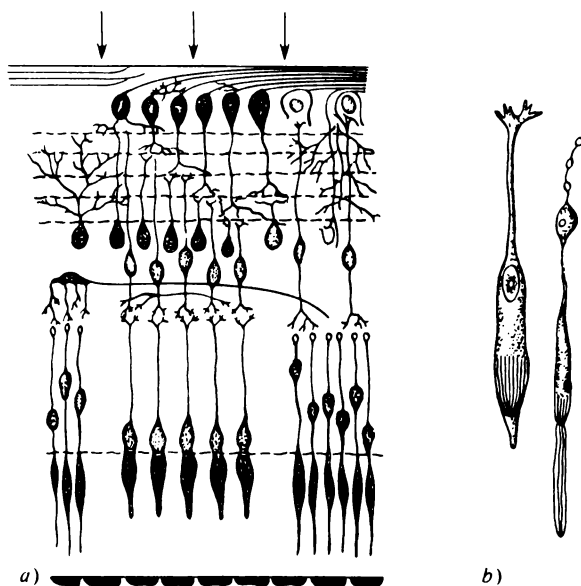
Fig. 80

dovute soltanto all'eccitazione dei bastoncelli. I coni, per contro, sono capaci di *distinguere i colori,* mentre i bastoncelli non possiedono questa capacità. La visione dei colori comincia praticamente ad una luminosità di circa 1 lux. A luminosità superiori a 10^2-10^3 lux, la vista è assicurata quasi esclusivamente dai coni.

I dettagli di un oggetto si vedono più nettamente quando la sua immagine si forma sulla macchia lutea ed in particolare sulla fovea centrale. Que-

Fig. 81

sta è la cosiddetta *visione foveale*; se l'immagine si forma lontano dalla fovea centrale, la *visione* è detta *periferica.* Nell'ultimo caso l'osservatore vede gli oggetti molto meno nettamente e discerne pochi dettagli. Siccome al-

la periferia della retina si trova ancora un piccolo numero di coni, nel caso di visione periferica esiste la percezione dei colori, ma solo a condizione che la luminosità sia sufficiente.

7. Due punti luminosi vicini per l'occhio che percepisce risultano distinti e non come un solo punto, solo se la loro distanza angolare è superiore ad un certo limite. Questo limite è detto *distanza angolare critica* e la grandezza inversa si chiama *potere risolutivo* o *acutezza visiva dell'occhio.* I medici hanno adottato come unità d'acutezza visiva l'acutezza di un occhio che separa due punti luminosi quando l'angolo al vertice del cono è dell'ordine di un minuto. Questa è in media l'acutezza visiva di un occhio normale.

L'acutezza visiva è massima se l'immagine si forma sulla fovea centrale della retina. Qui la densità di coni è massima ed ogni cono è unito ad un filamento individuale del nervo ottico (il numero di questi filamenti è di parecchi milioni). Il cervello reagisce all'eccitazione di ogni cono. Quando le immagini di due punti luminosi vicini si formano sullo stesso cono, la sensazione è unica ed i due punti sembrano confusi; in questo caso l'occhio non separa questi punti. Affinché l'occhio possa separare i punti è necessario che le loro immagini si formino su *coni differenti.* Alla periferia la densità di ripartizione degli elementi sensibili (coni e bastoncelli) è più piccola ed ogni filamento del nervo ottico è collegato con un numero più grande di elementi sensibili. Ecco perché l'acutezza visiva dell'occhio è massima nel caso di vista foveale, quando l'immagine si forma sulla cavità centrale della retina. I bastoncelli servono invece non per aumentare l'acutezza visiva, ma per rendere più forte la *sensiblità* dell'occhio in condizioni di debole luminosità. Questo risultato si ottiene in realtà quando ogni filamento nervoso è unito ad un *gruppo* di bastoncelli, poiché allora il segnale trasmesso attraverso il filamento è più forte.

Da questo punto di vista la distanza angolare $\delta\vartheta$ che l'occhio può separare è uguale all'angolo sotto il quale si vede dal punto nodale immagine la distanza media δx tra due coni vicini nella cavità centrale, cioè $\delta\vartheta = \delta x/f$, dove f è la distanza focale anteriore. Utilizzando i valori numerici di tavola 3, si ottiene $\delta\vartheta \approx 30''$. Infatti, le osservazioni hanno mostrato che per un occhio normale $\delta\vartheta$ è un po' più piccola di un minuto angolare. Questa stima coincide con quella che si ottiene in base a *considerazioni di diffrazione* (si veda § 56).

Il campo visivo corrispondente alla macchia lutea non è grande. Su questa macchia si può proiettare simultaneamente un quadro di dimensione angolare di circa 6° in orizzontale e di circa 4° in verticale. Il campo visivo della fovea è ancora più piccolo: all'incirca di 1° sia in verticale che in orizzontale. Un campo visivo tanto ridotto è però compensato dal fatto che l'occhio può rapidamente ruotare nella sua orbita, esaminando in un tempo molto breve tutti i punti della superficie visibile di un grande oggetto. Grazie a questo fatto il campo della visione netta dell'occhio si estende approssimativamente fino a 150° secondo l'orizzontale e fino a 120° secondo

la verticale. Questa mobilità dell'occhio permette di fissare rapidamente l'attenzione sulle parti più interessanti di un oggetto.

8. L'occhio è soggetto a tutte le aberrazioni dei sistemi ottici: geometriche, cromatiche e di diffrazione. Le aberrazioni geometriche e cromatiche dell'occhio sono poco palesi, poiché l'occhio dispone di mezzi propri per eliminare la loro azione nociva. Oggi si sa che i coni hanno la forma di guide d'onda. La costruzione di ogni guida d'onda è tale che i raggi passanti attraverso la zona periferica della pupilla esercitano sul cono un'azione più debole dei raggi centrali. L'occhio utilizza superfici rifrangenti non sferiche ed il cristallino è una lente il cui indice di rifrazione aumenta in modo continuo verso il centro. Ciò implica la concentrazione della luce preferibilmente nei centri dei cerchi di diffusione. Pertanto nel caso di una luminosità non forte, i bordi dei cerchi di diffusione sono poco attivi. Nel caso di una forte luminosità, invece, la pupilla dell'occhio si contrae molto e ciò implica una diminuzione del cerchio di diffusione. Tutto ciò diminuisce l'aberrazione sferica e il coma. L'astigmatismo dei fasci obliqui e la distorsione sono quasi impercettibili, poiché data la mobilità dell'occhio l'immagine di ogni punto è inconsciamente portata nel punto più favorevole della retina, cioè sulla fovea. La curvatura di campo dell'immagine è compensata dalla forma sferica della retina. L'aberrazione cromatica è quasi impercettibile, poiché la retina è sensibile solo ad una regione relativamente stretta dello spettro.

9. Esaminiamo ora brevemente la teoria della *visione dei colori* di Young-Helmholtz (1821-1894) che coincide con le osservazioni meglio di altre. Questa teoria si fonda sul fatto sperimentale che la percezione di un colore qualsiasi può essere prodotta mediante la mescolanza delle radiazioni spettrali pure corrispondenti ai colori rosso, verde e blu-azzurro. Partendo da questa proposizione la teoria suppone che esistano solo *tre* tipi di recettori fotosensibili. Essi differiscono l'uno dall'altro per i campi di sensibilità spettrale. Il rosso agisce prevalentemente su recettori del primo tipo, il verde su quelli del secondo tipo, ed il blu-azzurro sui recettori del terzo tipo. Mescolando le radiazioni di questi tre colori, si può ottenere una combinazione qualsiasi di eccitazione di tutti i tipi di recettori; da un punto di vista fisiologico questo equivale alla produzione della sensazione di qualsiasi colore. Non è stato ancora stabilito se esistono tutti e tre i ricettori in ogni cono o se esistono tre differenti tipi di coni.

Ci sono persone (più dell'1% tra i maschi ed all'incirca 0,1% tra le femmine) la cui vista è caratterizzata dalla mancanza di uno dei tre tipi di recettori nominati. Queste persone sono dette *dicromatiche.* Una persona dicromatica non distingue i colori di tutte radiazioni, colori che le persone aventi una vista normale distinguono agevolmente. Più rare sono le persone *monocromatiche* (all'incirca una per milione) le quali hanno recettori di un solo tipo. Tali persone non distinguono assolutamente i colori.

10. La sensibilità dell'occhio alle radiazioni di differenti lunghezze

d'onda è caratterizzata dalla *curva di visibilità*. Per costruire questa curva riportiamo lungo l'asse delle ascisse la lunghezza d'onda e lungo l'asse delle ordinate il *coefficiente di visibilità* V_λ, cioè la grandezza inversa della potenza energetica delle radiazioni che l'occhio percepisce come ugualmente luminose. Il confronto visivo delle luminosità delle radiazioni di lunghezze d'onda molto differenti è difficile, e perciò per la costruzione della curva di visibilità di solito si utilizza il *metodo dei piccoli gradini*, cioè si confrontano a due a due, secondo la luminosità visibile, radiazioni di lunghezze d'onda tanto vicine che la differenza di colore non ostacola questo confronto. Malgrado il carattere soggettivo di questo metodo, i risultati ottenuti sono sufficientemente riproducibili e le curve di visibilità per differenti persone sono poco differenti.
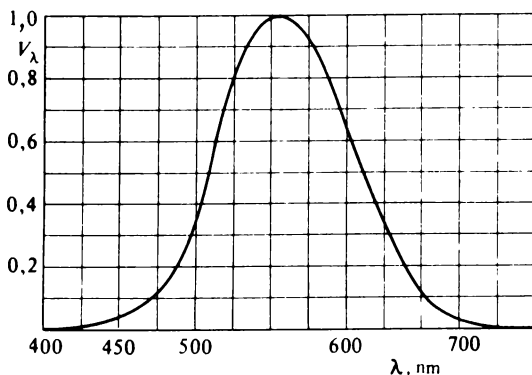
Fig. 82

La curva di visibilità dell'occhio normale alla luminosità diurna, adottata come campione dalla Commissione Internazionale dell'Illuminazione, è riprodotta nella fig. 82. Essa ha il massimo nella regione giallo-verde dello spettro per $\lambda = 555$ nm, adottato convenzionalmente come unità. Nel caso di illuminazione crepuscolare quando funziona solo il meccanismo dei bastoncelli, la curva di visibilità conserva la sua forma generale ma si sposta verso onde più corte con il massimo a circa 510 nm. In questo caso la regione di sensibilità massima della retina si sposta di 10-20° dalla fovea centrale.

Già nel 1825 Purkinje (1787-1869) aveva osservato che radiazioni di differenti lunghezze d'onda, percepite dall'occhio come aventi la stessa luminosità, modificavano la loro luminosità in modo inuguale se veniva diminuita di uno stesso numero di volte la loro intensità luminosa. La luminosità delle radiazioni di più grande lunghezza d'onda diminuisce più rapidamente di quella delle radiazioni di lunghezza d'onda più corta. Se limitiamo il campo visivo a 1,5° e concentriamo le radiazioni da confrontare solo

sulla fovea centrale, la luce sarà percepita soltanto dai coni. Gli esperimenti hanno mostrato che in questo caso l'effetto Purkinje non si manifesta. Questi risultati concordano bene con il meccanismo della percezione doppia della luce: mediante i coni e mediante i bastoncelli, ai quali corrispondono curve di visibilità differenti.

11. La regione delle radiazioni visibili percepite dall'occhio non si arresta bruscamente alle lunghezze d'onda di 400 e 760 nm. Per $\lambda = 400$ nm il coefficiente di visibilità V_λ è all'incirca 2500 volte più piccola e per $\lambda = 760$ nm essa è 20 000 volte più piccola che al massimo. In condizioni di adattamento dell'occhio all'oscurità, esso può percepire molto debolmente raggi infrarossi di grande intensità luminosa con lunghezza d'onda fino a 950 nm, e ultravioletti fino a 300 nm.

Le frontiere della regione delle radiazioni visibili nonché la forma stessa della curva di visibilità dell'occhio umano sono il risultato di una lunga evoluzione nel corso della quale l'occhio si è adattato alle condizioni di luminosità diurna, crepuscolare e notturna. Infatti, più del 40% dell'energia irradiata dal Sole corrisponde alla regione visibile dello spettro, benché questa regione ne occupi meno di un ottavo. Inoltre, lo spettro solare in prossimità della superficie terrestre s'arresta praticamente alla lunghezza d'onda di 290 nm. Le onde più corte sono arrestate dallo strato di ozono atmosferico. Sarebbe irrazionale da un punto di vista biologico se l'occhio possedesse la capacità di percepire radiazioni di lunghezza d'onda inferiore a 290 nm.

D'altra parte, l'occhio deve proteggere sé stesso dai raggi ultravioletti che sono capaci di decomporre chimicamente le sostanze organiche e di distruggere i microorganismi e le cellule biologiche. La loro azione sulla retina dell'occhio è estremamente nociva. La sensibilità della retina ai raggi ultravioletti è relativamente grande e presenta secondo S.I. Vavilov un massimo ben pronunciato per $\lambda = 380$ nm. Contro raggi ultravioletti di grande lunghezza d'onda ($290 < \lambda < 400$ nm) che penetrano attraverso l'atmosfera terrestre, l'occhio dispone di propri mezzi di protezione. Questi raggi sono fortemente assorbiti all'interno dell'occhio, ed in particolare dal cristallino, e solo una parte molto piccola di queste radiazioni raggiunge la retina. Questo spiega la rapida caduta della curva di sensibilità dell'occhio alla frontiera e nella regione dell'ultravioletto. Nel caso di un'ablazione chirurgica del cristallino, se la visibilità sussiste la sensibilità dell'occhio ai raggi ultravioletti cresce notevolmente [1)].

Una grande sensibilità dell'occhio alle radiazioni infrarosse, se vi fosse,

---

[1)] I raggi ultravioletti, penetrando nell'occhio, provocano la sua fluorescenza e si trasformano in una luce bluastra percepita dalla retina. Questa azione indiretta di raggi U.V. si manifesta, ad esempio, nel seguente esperimento. Se guardiamo una potente lampada a mercurio che emette raggi U.V. attraverso un vetro speciale, che assorba i raggi visibili ma trasmetta gli U.V., in conseguenza del fenomeno di fluorescenza all'interno dell'occhio, l'aria circostante assume l'aspetto di una nebbia bluastra che ricorda il fumo del tabacco.

sarebbe non solo inutile ma anche inopportuna, in quanto eliminerebbe la visione in condizioni d'illuminazione solare. La ragione di ciò sta nella radiazione termica dell'occhio. Alla temperatura normale dell'occhio (310 K) tutta la sua radiazione termica cade nella regione dell'infrarosso. L'energia di radiazione emessa da 1 cm^2 di parete dell'occhio all'interno della cavità oculare è calcolabile con la legge di Stefan-Boltzmann (si veda § 115). Essa è all'incirca 0,105 W/cm^2. La superficie interna totale della cavità (globo) è $\approx 17\ cm^2$, cosicché la potenza totale irradiata è $\approx 1,7$ W. Stimiamo ora la potenza di radiazione solare che penetra nell'occhio attraverso la sua pupilla, utilizzando il valore della costante solare (0,139 W/cm^2) riportato nel problema del § 5. Otteniamo allora $0,139\pi r^2 \approx 0,017$ W (ponendo che il raggio r della pupilla sia di 2 mm). Questo valore è di circa 100 volte inferiore alla potenza della radiazione termica propria dell'occhio. Se l'occhio avesse nell'infrarosso una sensibilità grande quanto nella regione giallo-verde, la radiazione termica propria dell'occhio supererebbe non solo la radiazione diffusa dall'atmosfera ma anche la luce solare diretta, e l'occhio non funzionerebbe. Secondo S.I. Vavilov (1891-1951) questa è una delle ragioni dell'assenza di sensibilità dell'occhio nell'infrarosso. L'altra ragione consiste nella piccola energia dei quanti della luce infrarossa. Il processo della percezione luminosa deve cominciare dagli effetti chimici o fotoelettrici, e questi effetti sono determinati da singoli quanti di luce di energia superiore a un valore minimo di soglia.

12. Per eccitare i recettori fotosensibili è necessario che essi assorbano la luce. Di regola, la sensibilità di un recettore alla luce di una certa lunghezza d'onda aumenta quanto più è grande l'assorbimento di questa luce da parte del recettore. Questa circostanza ha già da tempo stimolato i ricercatori a scoprire nella retina *pigmenti fotosensibili.* Tale pigmento (*rodopsina,* o *porpora retinea*) è stato scoperto nei bastoncelli dell'occhio umano. La rodopsina è una sostanza rosea che si decompone (scolora) alla luce e si ristabilisce nell'oscurità. La sua curva spettrale d'assorbimento è poco differente dalla curva spettrale di visibilità crepuscolare dell'occhio. Per il momento non si è riusciti ad estrarre i pigmenti fotosensibili dai coni, ma le osservazioni dell'occhio vivente attraverso la pupilla confermano che nella parte centrale della retina esistono pigmenti che scolorano alla luce.

L'occhio umano si adatta a condizioni di illuminazione largamente variabili. I raggi solari diretti creano un illuminamento di $\sim 10^5$ lux, mentre nell'oscurità totale l'occhio è capace di discernere oggetti con un illuminamento dell'ordine di 10^{-6} lux. L'occhio può percepire flussi luminosi compresi tra 10^{-17} e 10^{-5} W. Il processo che muta la sensibilità dell'occhio alle varie luminosità è detto *adattamento.* Se la luminosità aumenta ha luogo un *adattamento alla luce,* se invece diminuisce, si ha un *adattamento all'oscurità.* Se si passa da una luminosità di $\sim 1000\ cd/m^2$ all'oscurità, la sensibilità dell'occhio aumenta in un'ora di 10 milioni di volte circa. All'inizio la sensibilità aumenta molto velocemente, poi rallenta e dopo

un'ora di permanenza all'oscurità il livello di sensibilità non varia più. L'adattamento alla luce si svolge in un modo molto più rapido. Per luminosità medie esso dura da 1 a 3 minuti. Una variazione tanto larga della sensibilità alla luce è dovuta ai bastoncelli. L'adattamento all'oscurità dei coni avviene più rapidamente, mentre la loro sensibilità aumenta solo da 10 a 100 volte. In condizioni di massimo adattamento alla luce l'occhio può sopportare senza pregiudizio luminosità relativamente grandi (ad esempio, le luminosità di superfici bianche e opache illuminate dalla luce solare diretta). A luminosità molto grandi è necessario proteggere l'occhio. Per esempio, l'osservazione di un'eclisse solare si può realizzare solo attraverso un vetro annerito o un altro filtro adatto. Quando ci si trova sui ghiacciai o in alta montagna, è necessario utilizzare gli occhiali a vetri anneriti o colorati; gli occhiali sono qui necessari anche per proteggere la vista dai raggi ultravioletti, la cui intensità a grandi altezze è fortissima e può nuocere l'occhio.

L'adattamento dell'occhio si produce automaticamente, ma il suo meccanismo non è ancora molto chiaro. Quando la luminosità aumenta bruscamente, la pupilla si contrae quasi istantaneamente. Quando, invece, la luminosità diminuisce, la pupilla riprende la sua dimensione normale. Anche la sensibilità dei recettori stessi varia. Da lungo tempo si pensava che questa variazione di sensibilità fosse dovuta alla quantità di rodopsina contenuta nei bastoncelli. Quando aumenta la luminosità, la rodopsina si scolora e la sensibilità dell'occhio diminuisce, e quando la luminosità diminuisce, si ristabilisce la quantità di rodopsina, provocando l'aumento di sensibilità. Ma le nuove ricerche mettono in dubbio questo punto di vista. Le osservazioni mostrano che quando la sensibilità dell'occhio alla luce varia nel modo più veloce la diminuzione della quantità di rodopsina è ancora molto piccola. Al contrario, quando la concentrazione di rodopsina diminuisce bruscamente, la sensibilità diminuisce poco. È difficile interpretare questi risultati dal punto di vista esposto. Può darsi che un certo ruolo spetti ai centri di percezione della luce del cervello, cioè una variazione della loro sensibilitá.

§ 22. *Nozioni ed unità fotometriche*

1. Un irraggiamento nel vuoto o in un mezzo omogeneo trasparente può essere caratterizzato dall'*intensità,* dalla *composizione spettrale* e dalla *polarizzazione* di ciascuna radiazione. In questo caso è necessario tener presente che fasci di raggi rigorosamente paralleli non esistono, sono un'idealizzazione. Solamente fasci, per quanto piccoli che riempiono *angoli solidi finiti* possono avere un'energia finita.

Consideriamo nel campo d'irraggiamento un elemento di superficie ds sufficientemente piccolo che in ogni punto della sua superficie le caratteri-

stiche dell'irraggiamento siano le stesse. Nello stesso tempo le dimensioni lineari della superficie ds debbono essere grandi rispetto alle lunghezze d'onda della luce per poter applicare le leggi e le nozioni dell'ottica geometrica. Tracciamo attraverso la superficie ds raggi luminosi che passino sul contorno della superficie e che riempiano un angolo solido Ω. L'energia trasportata da questi raggi nell'unità di tempo si dice *flusso luminoso* Φ che attraversa la superficie ds con un angolo solido Ω. Se l'angolo solido $d\Omega$ è infinitamente piccolo e la superficie ds è perpendicolare al suo asse, il flusso luminoso può essere rappresentato nella forma $d\Phi = I\,ds\,d\Omega$. La grandezza I è il flusso luminoso rapportato all'unità di superficie perpendicolare alla radiazione, ed all'unità di angolo solido. Essa si chiama *intensità di flusso luminoso* o *luminosità d'irraggiamento* secondo la direzione dell'asse dell'angolo solido $d\Omega$. Se la normale all'elemento di superficie ds forma un angolo ϑ con la direzione del fascio, si ha

$$d\Phi = I\,ds \cos\vartheta\, d\Omega,$$

poiché il flusso luminoso che attraversa la superficie ds e la sua proiezione $ds_{\perp} = ds \cos\vartheta$ perpendicolare all'asse sono uguali. Per brevità la proiezione $ds \cos\vartheta$ si dice *area apparente della superficie ds,* vista sotto un angolo ϑ con la normale. Se vale il principio di sovrapposizione, i raggi passanti in un istante dato e in un punto dato del mezzo sono assolutamente indipendenti gli uni dagli altri. Pertanto per caratterizzare completamente lo stato dell'irraggiamento è necessario indicare l'intensità di flusso luminoso lungo tutte le direzioni in ogni punto dello spazio. Occorre tener conto separatamente dei due versi di ogni direzione poiché l'indipendenza dei raggi si applica anche in questo caso.

L'energia che passa in un tempo dt attraverso un elemento di superficie ds nell'angolo solido $d\Omega$ è rappresentata dall'espressione $I\,ds\,d\Omega\,dt \cos\vartheta$. Il tempo dt, benché compaia sotto forma di differenziale, deve essere grande rispetto ai periodi d'oscillazione delle onde costituenti la radiazione. Se questa condizione non è verificata il valore della potenza (energia nell'unità di tempo), ad esempio di una radiazione monocromatica, dipenderebbe dalla fase delle oscillazioni all'istante iniziale. L'indipendenza avrebbe luogo solo se il tempo dt contenesse per puro caso un numero intero di oscillazioni. Invece, se dt è grande rispetto ai periodi di tutte le onde presenti, la potenza di radiazione misurata non dipende praticamente dalla scelta di dt.

2. Si dice *densità di volume dell'energia raggiante* l'energia contenuta nell'unità di volume. Per esprimerla in termini dell'intensità di irraggiamento I, consideriamo prima un piccolo pennello di raggi di apertura $d\Omega$ (fig. 83). Attraverso l'elemento di superficie ds perpendicolare alla radiazione in un tempo dt passa l'energia $I\,ds\,d\Omega\,dt$. Se v è la velocità di propagazione nell'intervallo dt quest'energia si propagherà alla distanza $v\,dt$ ed occuperà il volume $ds\,v\,dt$ tratteggiato nella fig. 83. (Si suppone che non ci sia dispersione, cosicché la velocità di propagazione dell'energia coincide

con la velocità di fase v.) Dividento l'espressione dell'energia per questo volume, troviamo la densità d'energia raggiante $(I/v)\, d\Omega$ prodotta dal fascio di raggi elementare considerato. La densità totale d'energia u si ottiene integrando quest'espressione su tutto l'angolo solido

$$u = \frac{1}{v} \int I \, d\Omega, \tag{22.1}$$

tenendo conto che la grandezza I può dipendere dalla direzione dei raggi. Se I è la stessa lungo tutte le direzioni, si ha

$$u = 4\pi I/v. \tag{22.2}$$

3. Le grandezze Φ, I ed u possono essere sottoposte ad una *decomposizione spettrale* in frequenze o in lunghezze d'onda. Un irraggiamento rigorosamente monocromatico, come un fascio di raggi paralleli, in realtà non
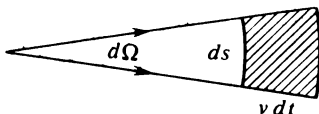
Fig. 83

esiste. Ogni irraggiamento ha un'energia finita che si estende su un *intervallo di frequenze o di lunghezze d'onda finito.* Per esempio, la grandezza u può essere rappresentata nella forma

$$u = \int_0^\infty u_\nu(\nu)\, d\nu = \int_0^\infty u_\omega(\omega)\, d\omega = \int_0^\infty u_\lambda(\lambda)\, d\lambda. \tag{22.3}$$

Le quantità $u_\nu\, d\nu$, $u_\omega\, d\omega$, $u_\lambda\, d\lambda$ indicano la densità di volume di energia raggiante negli intervalli spettrali $(\nu, \nu + d\nu)$, $(\omega, \omega + d\omega)$, $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ rispettivamente. Per brevità questi termini sono di solito applicati alle funzioni stesse $u_\nu(\nu)$, $u_\omega(\omega)$, $u_\lambda(\lambda)$, omettendo i differenziali $d\nu$, $d\omega$, $d\lambda$, benché ciò non sia molto coerente. Per stabilire dei legami tra queste funzioni si deve, evidentemente, uguagliare i differenziali $u_\nu\, d\nu$, $u_\omega\, d\omega$, $u_\lambda\, d\lambda$, poiché essi rappresentano sotto forme differenti *una stessa grandezza,* a condizione che λ, ν, ω siano legate dalle relazioni $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$. Otteniamo dunque

$$u_\nu = (\lambda^2/c)\, u_\lambda. \tag{22.4}$$

Quando si considera la ripartizione spettrale, è necessario precisare di quale funzione si tratta: u_ν (ripartizione secondo le frequenze) o u_λ (ripartizione secondo le lunghezze d'onda). Per esempio nello spettro solare la funzione u_ν presenta un massimo nella regione infrarossa pressappoco per

$\lambda = 880$ nm, mentre il massimo della funzione u_λ si ha per $\lambda \approx 500$ nm nella regione giallo-verde dello spettro.

Inoltre, l'intensità d'irraggiamento I in ogni punto dello spazio può essere rappresentata come somma delle intensità di due radiazioni polarizzate linearmente in piani reciprocamente perpendicolari. Non utilizzeremo però quest'osservazione.

4. Tutte le caratteristiche dell'irraggiamento riportate sono misurate in *unità meccaniche,* ad esempio basandosi sulla loro azione termica. Così, nel sistema SI il flusso luminoso è misurato in *watt* (W), l'intensità d'irraggiamento in *watt per steradiante e per metro quadrato* ($W/sr \cdot m^2$), la densità di volume di energia irradiata in *joule per metro cubo* (J/m^3). Queste unità sono utilizzate, ad esempio, nella teoria dell'irraggiamento termico. Ma nella regione dello spettro visibile è preferibile caratterizzare l'irraggiamento per gli *effetti visivi* ed in base all'azione della luce sull'occhio umano. Le caratteristiche corrispondenti e le loro unità sono dette *fotometriche,* a differenza delle caratteristiche e delle unità *energetiche* delle quali abbiamo parlato sopra.

Le misure fotometriche sono in larga misura soggettive, poiché le percezioni luminose di uno stesso flusso luminoso sono diverse per differenti osservatori. Quando vengono stabilite le relazioni quantitative tra unità fotometriche ed energetiche, si tiene conto di un *occhio umano medio.* Le denominazioni stesse delle grandezze caratterizzanti l'irraggiamento vengono modificate un po' quando si tratta di misure fotometriche. Al posto di energia irradiata si dice *energia ottica* ed al posto di intensità d'irraggiamento si dice *intensità luminosa* ecc. In generale, al posto delle grandezze e delle unità energetiche vengono introdotte grandezze e unità *fotometriche.* Non introdurremo i differenti simboli per grandezze fotometriche ed energetiche, poiché in ogni singolo caso sarà chiaro quale senso si deve dare a queste grandezze.

5. Si dice *intensità luminosa $\mathcal{I}$ di una sorgente* secondo una direzione data il flusso luminoso emesso dalla sorgente in questa direzione per unità di angolo solido. (Quando vengono utilizzate le unità energetiche, si parla di *intensità energetica della sorgente* misurata in W/sr.) Generalmente questa nozione è rapportata ad una *sorgente luminosa puntiforme,* in altre parole questa grandezza caratterizza la sorgente ad una distanza che è grande rispetto alle sue dimensioni lineari. In generale, la grandezza $\mathcal{I}$ varia con la direzione dei raggi luminosi. Il flusso luminoso, che una sorgente invia in un angolo solido $d\Omega$, è definito dall'espressione $d\Phi = \mathcal{I}\, d\Omega$. Il flusso luminoso totale emesso dalla sorgente è

$$\Phi = \int \mathcal{I}\, d\Omega,$$

dove l'integrale è esteso all'angolo solido totale 4π. La quantità $\mathcal{I}_0 = \Phi/(4\pi)$ si chiama *intensità luminosa sferica media della sorgente.*

L'unità di intensità luminosa di una sorgente, nel sistema SI, è la *cande-*

la. Questa è l'*unità fotometrica fondamentale*. Per definizione approvata di recente la candela (cd) significa l'intensità luminosa della sorgente, in direzione data, che emette una luce monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ Hz, la cui potenza energetica in tale direzione è pari a 1/683 W/sr. Prima la candela era costituita da un corpo nero alla temperatura di solidificazione del platino puro (2046,6 K) alla pressione di 101 325 N/m^2. La costruzione del campione è rappresentata nella fig. 84 (1 — platino, 2 — tubo in ossido di torio solidificato, 3 — crogiolo in ossido di torio solidificato, 4 — isolante termico in ossido di torio polverizzato, 5 — recipiente in vetro al silicio). Il platino è riscaldato e fuso da una corrente ad alta frequenza. Il radiatore di luce è costituito dal tubo 2, le cui
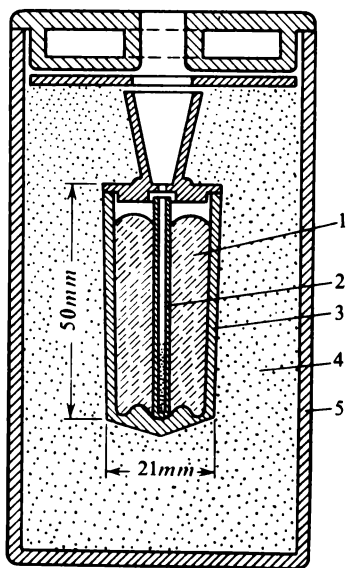
Fig. 84

pareti per tutta la lunghezza hanno una temperatura uguale a quella del platino riscaldato circostante. *La candela* (cd) *è l'intensità luminosa emessa nella direzione normale da* 1/60 cm^2 *di superficie radiante del campione*. Prima dell'introduzione di questo standard (in vigore dal 1° gennaio del 1948) l'unità d'intensità luminosa di una sorgente era la *candela internazionale* uguale a 1,005 cd. Essa aveva per sorgente campione delle lampade elettriche speciali.

L'unità di flusso luminoso è il *lumen* (lm); esso è il flusso luminoso emesso da una sorgente di 1 candela in un angolo solido di 1 steradiante.

Il flusso di radiazione misurato in watt può anche essere considerato come un flusso luminoso misurato in lumen. Il *coefficiente d'efficacia lumi-*

nosa di un flusso di radiazione, o semplicemente l'*efficacia luminosa,* è il numero di lumen corrispondente ad una potenza di 1 watt (lm/W). La quantità inversa (W/lm) si dice *equivalente meccanico della luce.* A causa della differente sensibilità dell'occhio a differenti regioni dello spettro entrambe queste quantità dipendono dalla lunghezza d'onda λ. Si è soliti riferire i loro valori a $\lambda = 555$ nm, dove la sensibilità dell'occhio è massima. Per questa lunghezza d'onda queste grandezze, secondo misure recenti, sono rispettivamente uguali a

$$625 \text{ lm/W} \quad \text{e} \quad 0{,}00160 \text{ W/lm}.$$

Utilizzando la curva di visibilità dell'occhio umano medio, riportata nella fig. 82, è facile calcolare i valori di queste grandezze per tutte le lunghezze d'onda delle radiazioni visibili.

6. Per la legge di conservazione dell'energia, il flusso luminoso totale emesso da una sorgente non può essere aumentato da nessun sistema riflettente o rifrangente, finché questi sistemi restano fissi. Questi sistemi possono solo *ridistribuire i flussi luminosi* lungo differenti direzioni, come fanno per esempio i riflettori. Se una sorgente luminosa puntiforme è messa in un mezzo omogeneo trasparente, a qualsiasi distanza da questa sorgente resta costante non solo il flusso totale Φ emesso dalla sorgente ad un dato istante, ma anche il flusso luminoso $d\Phi = \mathcal{I}\, d\Omega$ in un angolo solido $d\Omega$, emesso dalla sorgente. Poiché l'angolo solido $d\Omega$ non è in nessun modo legato alla distanza r dalla sorgente, anche l'intensità luminosa $\mathcal{I}$ della sorgente non dipende da r. L'intensità luminosa I alla distanza r dalla sorgente è uguale al quoziente di $d\Phi$ per l'area $ds = r^2\, d\Omega$ della sezione perpendicolare del fascio di raggi considerato. Di conseguenza,

$$I = \mathcal{I}/r^2, \tag{22.5}$$

cioè l'*intensità luminosa è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente puntiforme.*

7. Il flusso luminoso ripartito uniformemente sull'unità della superficie illuminata si chiama *illuminamento E* di questa superficie. (Nelle misure energetiche questo termine è sostituito dal termine *illuminamento energetico* la cui unità di misura è W/m^2.) Supponiamo che la sorgente luminosa sia puntiforme ed i raggi cadano con un angolo ϑ rispetto alla normale sulla superficie illuminata. Abbiamo allora $d\Phi = \mathcal{I}\, d\Omega = \mathcal{I}\, ds \cos\vartheta/r^2$. Dividendo per l'area ds della superficie, si ottiene

$$E = \frac{\mathcal{I}}{r^2}\cos\vartheta. \tag{22.6}$$

Dunque, *l'illuminamento prodotto da una sorgente puntiforme in assenza di assorbimento è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente e proporzionale al coseno dell'angolo tra i raggi incidenti e la normale alla superficie illuminata.* La prima parte di questa proposizione,

nonché la formula (22.5), esprimono la *legge dell'inverso del quadrato.* L'unità d'illuminamento è il *lux* (lx); un lux è l'illuminamento prodotto da un flusso luminoso di 1 lumen ripartito uniformemente su un'area di 1 m^2. Il lux è l'illuminamento della superficie interna di una sfera di raggio 1 m, prodotto da una sorgente puntiforme di 1 candela posta al centro della sfera.

Per dare un'idea di questa unità d'illuminamento, riportiamo alcune cifre. L'illuminamento prodotto dal Sole fuori dall'atmosfera terrestre a metà distanza tra la Terra ed il Sole è di $1{,}35 \cdot 10^5$ lx. L'illuminamento prodotto dalla Luna piena è dell'ordine di qualche decimo di lux. L'illuminamento prodotto dalla Luna nuova o calante è di qualche centesimo di lux. Un cielo stellato senza nuvole produce di notte un illuminamento di qualche millesimo di lux, appena sufficiente per orientarsi di notte. Con un illuminamento di 1 lux si può leggere con fatica. La velocità di lettura aumenta rapidamente se l'illuminamento arriva fino a 50 lux, ma l'ulteriore aumento fino a 100-150 lux influisce poco sulla velocità. Per leggere senza fatica occorre un illuminamento di 50 lux. Le regole di protezione del lavoro impongono norme d'illuminamento minimo dei posti di lavoro. In nessun caso quest'illuminamento deve essere inferiore a 10 lux. Nel caso di lavori fini che richiedono la percezione di dettagli degli oggetti, di trattini, di lettere e figure (angolo di visione inferiore a $2'$) è necessario un illuminamento superiore a 200 lx. Nelle classi e nelle sale dei corsi l'illuminamento dei leggii e delle lavagne deve essere superiore a 75 lx.

8. Per caratterizzare le sorgenti luminose estese (non puntiformi) si introduce la nozione *brillanza (luminanza) superficiale B* o semplicemente *brillanza.* (Nel caso di misure energetiche al posto di questo termine viene utilizzato il termine *brillanza energetica* e per essa si introduce l'unità di misura $W/(sr \cdot m^2)$.) La nozione di brillanza superficiale non si applica alle sorgenti puntiformi, cioè sorgenti le cui dimensioni angolari sono inferiori al potere risolutivo dell'occhio o dello strumento ottico aggiunto all'occhio. Consideriamo sulla superficie emittente un elemento di superficie ds e tracciamo da questa superficie un pennello luminoso ad un angolo ϑ rispetto alla normale. Per caratterizzare l'irraggiamento in questa direzione non è importante l'area ds ma la sua *area apparente,* cioè $ds \cos \vartheta$ (si veda il punto 1). La brillanza superficiale nella direzione considerata è data dal flusso luminoso $d\Phi$ emesso dall'area ds in questa direzione riferito all'unità d'angolo solido ed all'unità d'area apparente

$$B_\vartheta = \frac{d\Phi}{d\Omega\, ds \cos \vartheta} = \frac{d\mathcal{I}}{ds \cos \vartheta}, \tag{22.7}$$

dove $d\mathcal{I} = d\Phi/d\Omega$ è l'intensità luminosa dell'area ds nella stessa direzione (fig. 85). Il simbolo B ha indice ϑ poiché la brillanza dipende, in generale, dall'angolo ϑ sotto il quale si vede l'area ds.

Le sorgenti luminose la cui brillanza superficiale B non dipende dalla

direzione d'irraggiamento, obbediscono alla *legge di Lambert* (1728-1777). Per queste sorgenti, come si vede dalla (22.7), l'intensità luminosa $d\mathcal{J}$ dell'elemento di superficie *ds* è proporzionale a cos ϑ. Una sfera luminosa omogenea, che verifica la legge di Lambert, presenta la stessa brillanza al centro ed alla periferia. Proprio queste osservazioni hanno portato Lambert alla formulazione della sua legge. In realtà in molti casi si constatano importanti scarti dalla legge di Lambert.

Mostreremo nel § 113 che, nel caso di un irraggiamento termico, la superficie di un corpo opaco potrebbe irradiare conformemente alla legge di Lambert, se il coefficiente di riflessione da questa superficie fosse indipendente per ogni lunghezza d'onda dall'angolo d'incidenza. Per le superfici
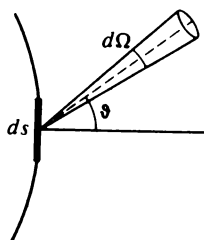
Fig. 85

lisce che riflettono in modo speculare questa condizione non si verifica (si veda § 65), ma vale approssimativamente per superfici opache che danno una riflessione diffusa. Questa legge è rigorosamente valida per l'irraggiamento termico di un corpo nero. Le superfici opache, ad esempio la super-

Tavola 4

Sorgente luminosa	Luminanza, cd/m^2	Sorgente luminosa	Luminanza, cd/m^2
Cielo notturno senza Luna	$\sim 1 \cdot 10^{-4}$	Cratere dell'arco voltaico a carbone	$1{,}5 \cdot 10^8$
Luna piena visibile attraverso l'atmosfera	$1 \cdot 10^3$	Lampada a mercurio ad alta pressione	$1{,}2 \cdot 10^9$
		Sole	$1{,}5 \cdot 10^9$
Fiamma di una candela stearica	$2{,}5 \cdot 10^3$	Lampada stroboscopica ad impulso	$1 \cdot 10^{11}$
Cielo diurno sereno	$1{,}5 \cdot 10^4$		
Lampada a gas	$5 \cdot 10^4$		
Filamento di una lampada a incandescenza riempita di gas	$5 \cdot 10^6$		

ficie bianca illuminata di un corpo ricoperta d'ossido di magnesio, o la superficie esterna di un paralume in vetro latteo illuminato dall'interno, costituiscono sorgenti che obbediscono abbastanza bene alla legge di Lambert. Ma la dimostrazione della legge di Lambert che sarà data al § 113, non si applica a queste superfici, poiché non si tratta di corpi che emettono essi stessi un irraggiamento termico, ma che diffondono la luce di sorgenti esterne.

La brillanza è espressa in *candele per metro quadrato* (cd/m^2). Una unità di brillanza di una superficie piana è una intensità luminosa, nella direzione perpendicolare, di una candela per metro quadrato. Se nelle stesse condizioni l'intensità luminosa è uguale ad una candela per centimetro quadrato, la corrispondente unità di luminanza si chiama *stilb* (sb): 1 sb = 1 cd/cm^2 = 10^4 cd/m^2. Nella tavola 4 sono riportati i valori della brillanza di alcune superfici luminose.

9. Si dice *radianza* o meglio *potere emissivo* K il flusso luminoso totale che l'unità d'area della superficie emette nell'angolo solido $\Omega = 2\pi$. L'unità di radianza è uguale a quella dell'illuminamento, cioè il lm/m^2. (Negli studi energetici si utilizza il termine *radianza energetica* avente per unità W/m^2.) Dato che il flusso luminoso che l'unità di superficie invia nell'angolo solido $d\Omega$ è uguale a $d\Phi = B_\vartheta \cos \vartheta d\Omega$, si ha

$$K = \int B_\vartheta \cos \vartheta \, d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi/2} B_\vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta. \qquad (22.8)$$

Per le superfici che irradiano in conformità alla legge di Lambert, la brillanza $B_\vartheta = B$ non dipende dall'angolo ϑ e quindi in questo caso si ha

$$K = \pi B. \qquad (22.9)$$

10. Calcoliamo ora l'illuminamento prodotto da una sorgente estesa di brillanza superficiale B_ϑ nota. Consideriamo un elemento infinitesimale ds di superficie della sorgente luminosa (fig. 86). Siano ds' la superficie elementare illuminata, r la distanza tra le superfici elementari, ϑ e ϑ' gli angoli che formano le normali alle superfici ds e ds' con la retta MN che le congiunge. L'angolo solido sotto il quale dalla superficie ds si vede la superficie ds' è uguale a $ds' \cos \vartheta'/r^2$. La superficie emittente ds invia in questo angolo solido un fascio luminoso $d\Phi = B_\vartheta \, ds \cos \vartheta \, ds' \cos \vartheta'/r^2$, o $d\Phi = B_\vartheta d\Omega \cos \vartheta' \, ds'$, dove $d\Omega = ds \cos \vartheta/r^2$ è l'angolo solido sotto il quale dalla superficie elementare illuminata ds' si vede la superficie radiante ds. Dividendo per ds', troviamo l'illuminamento dE della superficie elementare ds' prodotto dal flusso $d\Phi$. L'illuminamento totale E si ottiene per integrazione dell'espressione trovata su tutta la superficie apparente della sorgente

$$E = \int B_\vartheta \cos \vartheta' \, d\Omega. \qquad (22.10)$$

A titolo d'esempio consideriamo una sorgente a forma di disco che emette uniformemente con una brillanza superficiale $B_\vartheta = B$ indipendente dall'angolo ϑ. Disponiamo la superficie illuminata ds' sull'asse geometrico del disco, perpendicolarmente a questo asse (fig. 87). Ponendo nella
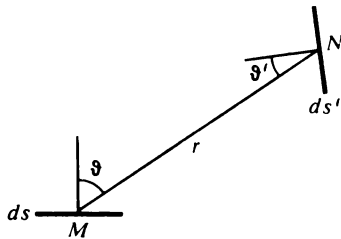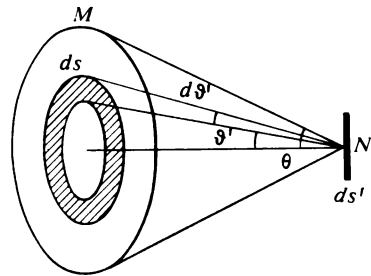
Fig. 86 Fig. 87

(22.10) $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta' \, d\vartheta'$ ed integrando, otteniamo

$$E = \pi B \sin^2 \theta, \tag{22.11}$$

dove θ è l'angolo formato dal raggio marginale MN con l'asse geometrico del disco. La formula (22.11) è valida per una sorgente sferica, nonché per ogni sorgente di forma arbitraria la cui frontiera visibile sia limitata da una circonferenza.

11. Non è nostro compito descrivere qui i metodi di misura e gli strumenti usati in fotometria. Limitiamoci solo alla descrizione di uno dei fotometri più perfetti costruiti da Lummer (1860-1925) e da Brodhun. La parte
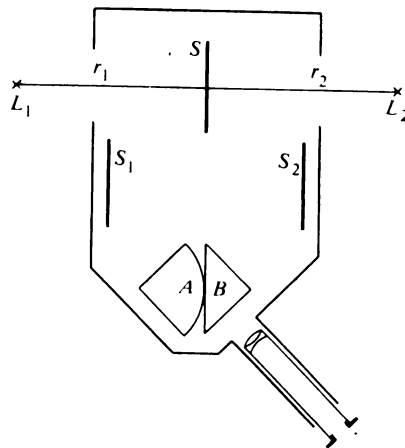
Fig. 88

più importante di questo fotometro è un cubo di vetro composto da due prismi rettangolari A e B (fig. 88). Il piano ipotenusa del prisma A ha la forma di una superficie sferica lavorata in modo che di questo piano resti solo un piccolo cerchio piano. I prismi sono poi applicati l'uno contro l'altro (contatto ottico). Tra le sorgenti L_1 e L_2 da confrontare si mette uno schermo bianco S, entrambe le facce del quale diffondono la luce in modo uguale. La luce diffusa è riflessa da due specchi identici S_1 e S_2 sul cubo del fotometro. Sul prisma A cade la luce emessa dalla sorgente L_1 e su quello B la luce emessa dalla sorgente L_2. La luce può uscire dal prisma A ed arrivare nel cannocchiale solo attraverso il cerchio della sua faccia lavorata (piano ipotenusa). Al contrario, la luce dal prisma B può cadere nello stesso cannocchiale solo dopo una riflessione totale sul suo piano ipotenusa, che è esterno rispetto allo stesso cerchio. Il cannocchiale è focalizzato per l'osservazione del piano del cerchio menzionato. L'osservatore vede due campi di brillanza diversa separati dalla circonferenza che limita il cerchio lavorato della faccia del prisma. Spostando una delle sorgenti, L_1 o L_2, si cerca di ottenere la sparizione della frontiera visibile tra i campi, affinché tutto il campo visivo diventi uniformemente illuminato. Ciò avviene quando gli illuminamenti di entrambe le facce dello schermo S sono uguali. Se r_1 e r_2 sono le distanze delle sorgenti (puntiformi) L_1 e L_2 dallo schermo corrispondenti a questa posizione, il rapporto delle intensità luminose $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ di queste sorgenti si può scrivere in base alla legge dell'inverso del quadrato

$$\frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Problemi

1. Trovare l'illuminamento E di uno schermo prodotto da un piano infinito di brillanza costante B che verifica la legge di Lambert. Lo schermo ed il piano sono paralleli.

Risposta. $E = \pi B$.

2. Calcolare l'illuminamento E di uno schermo orizzontale illuminato dall'emisfero celeste supponendo che la brillanza del cielo B sia costante.

Risposta. $E = \pi B$.

3. Calcolare l'illuminamento creato da una sorgente luminosa omogenea avente la forma di una sfera di raggio a su uno schermo a distanza R dal suo centro, se lo schermo illuminato è perpendicolare al raggio e la superficie della sfera irradia secondo la legge di Lambert con brillanza superficiale B. Mostrare che in queste condizioni a distanza qualsiasi dal centro della sfera è rigorosamente verificata la legge dell'inverso del quadrato, cioè l'illuminamento dello schermo varia in modo inversamente proporzionale al quadrato di R.

Risposta. $E = \pi Ba^2/R^2$.

4. Calcolare l'illuminamento prodotto da un disco di raggio a di radianza uniforme sul suo asse geometrico perpendicolare al piano del disco, se la superficie illuminata è perpendicolare a questo asse e si trova ad una distanza R dal centro del disco. Il disco irradia in conformità alla legge di Lambert e la sua brillanza superficiale B è costante. Con quale approssimazione sarà verificata la legge dell'inverso del quadrato se il disco è assimilato ad una sorgente luminosa puntiforme messa al suo centro?

Risposta. $E = \pi B a^2/(R^2 + a^2)$. Se $a/R \ll 1$, si ha

$$E \approx \frac{\pi B a^2}{R^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2}\right).$$

La legge è verificata a meno di $a^2/(2R^2)$. Per $a/R \sim 1/10$ questa precisione è pressappoco l'1%.

5. Supponendo che l'irraggiamento solare soddisfi la legge di Lambert, calcolare la brillanza superficiale B del Sole in base alle osservazioni terrestri (cioè tenendo conto dell'assorbimento e della diffusione della luce dall'atmosfera terrestre), se l'illuminamento della superficie terrestre prodotto dai raggi solari d'incidenza normale è $E \approx 10^5$ lx. L'angolo solido medio sotto il quale il Sole si vede da un punto della Terra è $\Omega = 6{,}8 \cdot 10^{-5}$ sr.

Risposta. $B = E/\Omega \approx 1{,}5 \cdot 10^9$ cd/m^2.

§ 23. *Brillanza ed illuminamento delle immagini ottiche. Ingrandimento normale*

1. In tutti i calcoli ulteriori, se non ci sono indicazioni speciali, non terremo conto delle perdite di luce dovute a riflessione sulle frontiere delle lenti, di prismi e di altre superficie riflettenti. Trascureremo anche l'assorbimento e la diffusione della luce. Le perdite dovute alla riflessione sono generalmente notevoli. Per esempio, per un binocolo prismatico esse sono all'incirca del 50% (si veda § 67). Tenendo conto di tutte queste perdite, la brillanza e l'illuminamento delle immagini sarebbero più piccoli di quelli calcolati. Consideriamo prima il caso in cui le dimensioni dell'oggetto sono notevolmente più grandi del limite di risoluzione del sistema ottico. In questo caso il sistema forma delle immagini geometricamente simili e la precisione dell'ottica geometrica è sufficiente.

Supponiamo che l'oggetto sia messo sull'asse ottico principale di un sistema centrato ed abbia forma di un piccolo elemento di superficie s perpendicolare a questo asse (fig. 89,*a*). L'immagine dell'elemento oggetto s sarà un elemento immagine s'. Indichiamo con B_ϑ la brillanza di s in una direzione che forma un angolo ϑ con la sua normale, o (il che è lo stesso) con l'asse ottico principale del sistema. Indichiamo con $B'_{\vartheta'}$ la corrispondente brillanza dell'immagine. La corrispondenza significa che l'angolo ϑ formato dal raggio incidente con l'asse ottico diventa l'angolo di uscita ϑ'. Ammetiamo che l'immagine sia formata non solo da fasci parassiali ma anche da fasci larghi, ciò implica che sia verificata la condizione dei seni (18.1). Da questa condizione segue che

$$sn^2 \sin^2\vartheta = s'n'^2 \sin^2\vartheta'. \qquad (23.1)$$

Se la condizione dei seni non è verificata tutti i risultati che saranno ottenuti in seguito rimangono validi soltanto per raggi parassiali. Consideriamo ora due coni aventi lo stesso vertice sull'elemento oggetto s le cui generatrici formano con l'asse ottico principale gli angoli ϑ e $\vartheta + d\vartheta$. (Nella

fig. 89,*a* sono indicate soltanto le sezioni di questi coni con il piano della figura.) L'angolo solido delimitato dai coni è $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. Il flusso luminoso emesso da s all'interno dell'angolo solido è uguale a

$$d\Phi = B_\vartheta s \cos \vartheta \, d\Omega = 2\pi B_\vartheta s \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta.$$

Nello spazio immagine il flusso luminoso $d\Phi$ si trasforma in flusso

$$d\Phi' = 2\pi B'_{\vartheta'} s' \sin \vartheta' \cos \vartheta' \, d\vartheta',$$

che attraversa l'elemento immagine s'. Se non c'è alcuna perdita di luce $d\Phi = d\Phi'$, cioè

$$B_\vartheta s \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = B'_{\vartheta'} s' \sin \vartheta' \cos \vartheta' \, d\vartheta'.$$

Teniamo ora conto della relazione (23.1), il cui differenziale è

$$sn^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = s'n'^2 \sin \vartheta' \cos \vartheta' \, d\vartheta'.$$

In conseguenza si ottiene

$$\frac{B_\vartheta}{n^2} = \frac{B'_{\vartheta'}}{n'^2}, \tag{23.2}$$

che definisce la brillanza dell'immagine. Se gli indici di rifrazione degli spazi oggetto ed immagine sono gli stessi ($n = n'$), si ha $B'_{\vartheta'} = B_\vartheta$, cioè la brillanza dell'immagine è uguale a quella dell'oggetto. Come si vede dalla
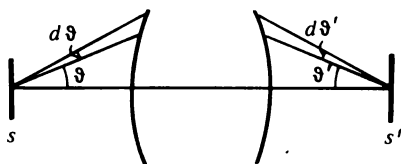
Fig. 89, *a*

dimostrazione, l'uguaglianza delle brillanze è dovuta al fatto che l'aumento dell'area dell'immagine è accompagnata da una diminuzione dell'angolo solido nel quale si propaga il flusso luminoso. Per le sorgenti luminose che verificano la legge di Lambert, B_ϑ non dipende dall'angolo ϑ. In questo caso gli indici ϑ e ϑ' sono inutili e si può scrivere

$$B' = (n'/n)^2 B. \tag{23.3}$$

2. In un altro modo si comporta la brillanza di un'immagine proiettata sullo schermo. In questo caso l'angolo solido nel quale si propaga il flusso luminoso dopo l'uscita da uno strumento ottico non gioca nessun ruolo. Sono importanti soltanto l'area dell'immagine ed il flusso luminoso totale che è concentrato su questa area. Se il flusso è costante, la brillanza sarà tanto più grande quanto più piccola è l'area dell'immagine.

Esaminando questa questione dal punto di vista quantitativo supporremo che l'oggetto s abbia la forma di un disco il cui piano è perpendicolare all'asse ottico principale ed emette luce in conformità con la legge di Lambert. Se non ci fosse lo strumento ottico, l'illuminamento dello schermo, secondo la formula (22.11), sarebbe uguale a $E_0 = \pi B \sin^2 \theta$, dove 2θ è l'angolo formato dai raggi marginali uscenti da punti diametralmente opposti dell'oggetto s e diretti al centro dell'immagine s'. In presenza dello strumento ottico l'angolo di convergenza dei raggi marginali con il vertice dell'immagine s' varia e diventa uguale a $2\theta'$. Questo è l'angolo tra i raggi marginali diretti al centro dell'immagine s' da punti diametralmente opposti della pupilla d'uscita dello strumento. Il flusso totale passante attraverso l'area s', come è stato mostrato sopra, è dato dall'integrale

$$\Phi' = 2\pi B's' \int \sin \vartheta' \cos \vartheta' \, d\vartheta' = \pi B's' \sin^2 \theta',$$

e l'illuminamento dell'immagine s' è uguale a Φ'/s', cioè

$$E = \pi B' \sin^2 \theta' = \pi B \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \sin^2 \theta'. \tag{23.4}$$

Se $n = n'$, si ha

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{\sin \theta'}{\sin \theta}\right)^2. \tag{23.5}$$

Questa formula mostra che l'influenza dello strumento ottico sull'illuminamento dell'immagine si riduce alla variazione dell'angolo tra i raggi marginali emessi da punti opposti dell'oggetto. Per esempio, l'utilizzazione della lente come specchio ustorio (in assenza di perdite di luce) è equivalente all'avvicinamento della sorgente (Sole) ad una distanza tale da essere vista a occhio nudo sotto lo stesso angolo con il quale si vede la pupilla d'entrata della lente dal suo fuoco principale.

Se l'immagine si forma nel piano focale principale dell'obiettivo (come in una macchina fotografica), nell'approssimazione parassiale $\sin \theta' = D'/(2f')$, dove D' è il diametro della pupilla d'uscita e f' la distanza focale posteriore dell'obiettivo. L'illuminamento dell'immagine sarà allora uguale al quadrato di questo rapporto così come del rapporto D/f', dove D è il diametro della pupilla d'entrata. Il rapporto D/f' si dice *apertura relativa* ed il suo quadrato $(D/f')^2$, che definisce l'illuminamento dell'immagine, è la *luminosità dell'obiettivo*.

Nei microscopi a immersione (si veda § 18, punto 4) la luce passa nel condensatore messo davanti all'obiettivo, penetra in uno spazio riempito di un liquido ad indice di rifrazione n nel quale si trova l'oggetto. Sia $2\theta_0$ l'angolo (apertura) del fascio di raggi formato dal condensatore, che penetrano nel microscopio. Visto che il condensatore si trova in aria, secondo la legge della rifrazione $\sin \theta_0 = n \sin \theta$. Il flusso luminoso è proporzionale a $\sin^2 \theta_0$, cioè a $(n \sin \theta)^2$. Per una stessa apertura 2θ il flusso luminoso che

penetra nell'obiettivo, e con esso l'illuminamento dell'immagine, sono proporzionali al quadrato dell'indice di rifrazione n. Seguendo Abbe la quantità $n \sin \theta$ è detta *apertura numerica*. Dunque, l'utilizzazione dell'obbiettivo ad immersione aumenta l'illuminamento dell'immagine, tuttavia dato che l'immagine finale si forma in aria, la sua brillanza non può essere in nessun caso superiore a quella della sorgente.

3. Consideriamo ora la questione di una stima visuale della brillanza superficiale degli oggetti (cioè il solo strumento utilizzato è l'occhio).

I singoli elementi della retina, coni e gruppi di bastoncelli legati ad uno stesso filamento del nervo ottico, reagiscono all'eccitazione luminosa indipendentemente gli uni dagli altri. L'aumento della superficie illuminata della retina, se il suo illuminamento resta invariato, non rafforza l'intensità dell'eccitazione luminosa di una cellula isolata, ma aumenta soltanto il numero di cellule illuminate. Astraendo da differenti fattori psicologici e fisiologici, dei quali è difficile tener conto e che provocano vari errori di visione, si può dire che l'occhio stima la brillanza di un oggetto non in base al flusso luminoso totale che entra nell'occhio, ma in base al flusso per unità di superficie della retina, cioè sul suo *illuminamento*. Perciò, se elimineremo tutti i fattori soggettivi, la questione della stima visuale della brillanza si ridurrà a quella della stima dell'illuminamento della retina.

L'illuminamento della retina dell'occhio nudo si chiama *illuminamento naturale*. Esso è calcolato mediante la formula (23.4) nella quale si deve porre $n = 1$, se l'oggetto osservato si trova in aria. Dunque,

$$E = \pi B(n' \sin \theta')^2. \qquad (23.6)$$

L'angolo θ' è l'angolo sotto il quale si vede il diametro della pupilla d'uscita dell'occhio dal suo fuoco posteriore. Nella formula (23.6) non figura la distanza dall'oggetto, il che significa che *se la pupilla dell'occhio è invariabile, l'illuminamento E della retina non dipende da questa distanza, essendo determinato soltanto dalla brillanza superficiale dell'oggetto.* Ecco perché fanali identici, che si trovano a differenti distanze dall'osservatore, sembrano avere la stessa brillanza (a condizione che le perdite di luce nella propagazione dal fanale all'occhio siano trascurabili).

Ammettiamo ora che l'occhio sia associato ad uno strumento, per esempio ad un cannocchiale (telescopio) o un microscopio. In questo caso lo strumento e l'occhio debbono essere considerati come un sistema ottico unico al quale sono applicabili le formule (23.5) e (23.6). Il valore dell'angolo θ' può essere modificato. Occorre guardare nello strumento in modo che il piano della pupilla d'uscita dello strumento coincida con quello della pupilla d'entrata dell'occhio. Solo in questo caso il campo visivo sarà nettamente delimitato. Il valore dell'angolo θ' è determinato dalla pupilla che diaframma di più i raggi luminosi. Se la pupilla d'entrata dell'occhio è più piccola della pupilla d'uscita dello strumento, il valore di θ' sarà determinato dalla pupilla d'occhio. In questo caso si ottiene un illuminamento na-

turale della retina, cioè la retina sarà illuminata come in assenza dello strumento (se si possono trascurare le perdite di luce supplementari dovute allo strumento ottico). Se, invece, la pupilla d'entrata dell'occhio è più grande della pupilla d'uscita dello strumento, l'angolo θ' sarà determinato dalla pupilla dello strumento e l'illuminamento della retina sarà in questo caso inferiore a quello naturale. Facciamo crescere la pupilla d'uscita dello strumento, cominciando da una dimensione molto piccola. Prima l'illuminamento della retina aumenterà proporzionalmente all'area della pupilla d'uscita (e, di conseguenza, di quella d'entrata) poiché ci troviamo nelle condizioni di approssimazione parassiale. Quando la pupilla d'uscita dello strumento diventerà uguale alla pupilla d'entrata dell'occhio, l'illuminamento E della retina raggiungerà il suo massimo ed in seguito resterà costante.

4. Le considerazioni riportate sono utilizzate nella scelta di un ingrandimento razionale dei cannocchiali, dei telescopi, dei binocoli e dei microscopi. Si dice *ingrandimento normale* o *equipupillare* l'ingrandimento che deve avere lo strumento affinché la sua pupilla d'uscita sia uguale alla pupilla d'entrata dell'occhio.

Nel telescopio, come in un cannocchiale qualsiasi, il diaframma d'apertura e la pupilla d'entrata sono determinate dall'apertura frontale dell'obiettivo. L'obiettivo forma un'immagine nel suo piano focale immagine (posteriore) il quale è contemporaneamente il piano focale oggetto (anteriore) dell'oculare. A questa condizione l'immagine formata dal telescopio sarà all'infinito e potrà essere nettamente percepita da un occhio normale senza accomodazione. Dopo aver attraversato il telescopio tutti i fasci di raggi paralleli restano paralleli, cioè il telescopio è un sistema ottico telescopico, varia soltanto la larghezza dei fasci. Se i raggi incidenti sono paralleli all'asse ottico principale, la larghezza del fascio è uguale al diametro D dell'obiettivo. L'ingrandimento N del telescopio è uguale al rapporto tra l'angolo sotto il quale si vede un piccolo oggetto al telescopio e l'angolo sotto il quale questo stesso oggetto sarebbe visto se fosse osservato a occhio nudo. Come è stato mostrato nel § 11 (punto 10), per i sistemi telescopici tale ingrandimento è uguale al rapporto della larghezza del fascio di raggi paralleli incidenti a quella del fascio emergente. Nel telescopio la larghezza del fascio emergente è uguale al diametro D' della pupilla d'uscita. Per un ingrandimento normale $D' = d$, dove d è il diametro della pupilla d'entrata dell'occhio. Quindi, l'ingrandimento normale di un telescopio è dato dall'espressione

$$N_{\text{norm}} = D/d. \qquad (23.7)$$

Il diametro d della pupilla dell'occhio non resta costante ma dipende dalla brillanza. Un ingrandimento equipupillare in condizioni d'osservazione diurna diventa troppo forte al crepuscolo e di notte. In questi ultimi casi

sono necessari cannocchiali aventi una grande pupilla d'uscita cioè aventi un piccolo ingrandimento o meglio muniti di un grande obiettivo.

L'illuminamento dell'immagine non dipende dall'ingrandimento se quest'ultimo è inferiore a quello normale. Gli ingrandimenti inferiori a quello normale sono inutili, poiché in questo caso viene utilizzata soltanto la parte centrale dell'obiettivo; i raggi periferici sufficientemente lontani dall'asse ottico, sono arrestati dall'iride e non penetrano nella pupilla dell'occhio. L'ingrandimento normale è il maggior ingrandimento per il quale l'illuminamento dell'immagine è massimo. Per questo ingrandimento l'obiettivo è pienamente utilizzato. Perciò gli oculari per i cannocchiali sono scelti in modo che diano un ingrandimento normale.

In alcuni casi può essere utile ricorrere ad ingrandimenti superiori di 2-4 volte all'ingrandimento normale, malgrado il fatto che ciò è legato ad una diminuzione sostanziale dell'illuminamento dell'immagine (rispettivamente di 4-16 volte). Il limite del potere risolutivo dell'occhio uguale a 30-60″ corrisponde al caso in cui l'immagine cade sulla fovea centrale. Sulla periferia il limite del potere risolutivo è più grande; esso aumenta anche durante il funzionamento prolungato a causa della stanchezza dell'occhio. In queste condizioni può essere vantaggioso diminuire un po' l'illuminamento per ottenere forti ingrandimenti e la possibilità di discernere i più fini dettagli degli oggetti. Ma non conviene proseguire molto in questa direzione perché diminuiscono l'illuminamento ed il campo visivo.

Se lo strumento ingrandisce di N volte, le dimensioni angolari del campo visivo diminuiscono di N volte e la sua area di N^2 volte. Perciò nei binocoli si preferisce un ingrandimento inferiore a quello normale, assicurando invece un più grande campo visivo e una maggior facilità nella ricerca degli oggetti. I binocoli sono costruiti con pupille d'uscita relativamente grandi (da 3 a 5 mm). I binocoli da campagna, per esempio, muniti di un obiettivo di 3 cm di diametro hanno un ingrandimento di 6 o di 8 volte (il diametro della pupilla d'uscita è uguale a 5 ed a 3,75 mm rispettivamente).

5. I cannocchiali, come ha scoperto M.V. Lomonosov (1711-1765), migliorano la visibilità delle immagini di oggetti poco illuminati, ad esempio di notte. Certo in questo caso l'illuminamento delle immagini non soltanto non aumenta ma persino diminuisce in conseguenza di inevitabili perdite di luce dovute alla riflessione sulle superficie delle lenti ed all'assorbimento nel vetro. Quando l'illuminamento è debole, il potere risolutivo dell'occhio diminuisce. Di notte, quando l'illuminamento scende a qualche decimillesimo di lux, il limite di risoluzione dell'occhio passa da $\sim 1'$ a $\sim 1°$. I cannocchiali aumentano l'angolo visivo, e perciò la loro utilizzazione facilita l'osservazione dei contorni e dei dettagli degli oggetti indiscernibili a occhio nudo.

Nei cannocchiali destinati alle osservazioni notturne il numero di lenti deve essere minimo e le lenti stesse debbono essere semplici per ridurre al massimo le perdite di luce per riflessione. L'ingrandimento del cannocchia-

le deve essere il più vicino a quello normale per utilizzare tutto il flusso luminoso incidente sull'obiettivo.È evidente che l'ingrandimento normale è determinato dalle dimensioni della pupilla dell'occhio nelle condizioni notturne (da 6 a 8 mm).

6. Calcoliamo ora l'ingrandimento normale di un microscopio. L'ingrandimento N del microscopio è il rapporto tra l'angolo φ' sotto il quale si vede un piccolo oggetto e l'angolo φ sotto il quale sarebbe visto questo oggetto ad occhio nudo se fosse posto alla distanza L della visione distinta (si veda § 21, punto 3). Se y è la dimensione lineare dell'oggetto considerato, $\varphi = y/L$. Mettiamo quest'oggetto $y = AB$ nel punto aplanatico oggetto (anteriore) dell'obiettivo (fig. 89, *b*); per semplificare la figura l'obiettivo e l'oculare complessi sono rappresentati sotto forma di lenti sottili, il
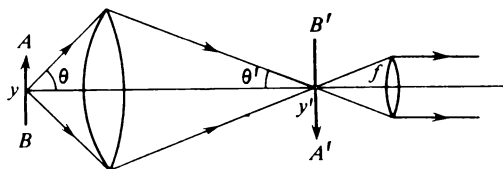
Fig. 89, *b*

che non influenza la generalità dei risultati ottenuti. La sua immagine $A'B' = y'$ si forma nel punto aplanatico immagine (posteriore). Essendo l'angolo θ' sempre piccolo, il suo seno può essere sostituito con l'angolo stesso scrivendo la condizione dei seni nella forma $ny \sin\theta = y'\theta'$. Come nel telescopio, l'immagine y' deve formarsi nel piano focale anteriore (oggetto) dell'oculare. Se f è la distanza focale dell'oculare, $2f\theta'$ rappresenta la larghezza del fascio emergente. Questa larghezza per un ingrandimento normale deve essere uguale al diametro d della pupilla d'entrata dell'occhio, cioè

$$d = 2f\theta' = 2\frac{fny \sin\theta}{y'}.$$

Ma $y = L\varphi$, $y' = f\varphi'$, cosicché $y/y' = L\varphi/(f\varphi') = L/(Nf)$. Sostituendo questo risultato nella relazione precedente, otteniamo [1)]

$$N_{\text{norm}} = 2Ln\frac{\sin\theta}{d}. \qquad (23.8)$$

[1)] Molto spesso nella deduzione della formula (23.8) viene introdotta l'ipotesi inutile che l'immagine si formi nel microscopio alla distanza L della visione distinta. La validità della formula (23.8) non è in nessun modo legata alla distanza che separa l'occhio dall'immagine data dal microscopio. La grandezza L figura nella formula (23.8) per una ragione del tutto differente come si vede dai nostri ragionamenti.

L'ingrandimento normale di un microscopio è una grandezza ancor più soggettiva che per il telescopio, poiché esso dipende da due parametri dell'occhio: il diametro d della pupilla e la distanza L della visione distinta. Per caratterizzare l'ingrandimento del microscopio si pone generalmente $d = 2$ mm, $L = 250$ mm. Nei microscopi ordinari ($n = 1$) il limite superiore dell'apertura numerica $n \sin \theta$ è uguale a 1, e per quelli a immersione a 1,5. Gli ingrandimenti normali corrispondenti sono $N = 250$ e $N = 375$. Per le stesse ragioni che sono state invocate per l'ingrandimento di un telescopio, si possono utilizzare ingrandimenti di 2-4 volte maggiori. Nei migliori microscopi ordinari (a secco) il limite superiore d'ingrandimento può essere uguale a 1000 ed in quelli ad immersione a 1500. Ingrandimenti maggiori sono non solo inutili, ma anche nocivi. Ritorneremo su questa questione dell'ingrandimento nel § 56, studiandolo da un nuovo punto di vista, e cioè collegando il potere risolutivo di questi strumenti con la natura ondulatoria della luce.

7. Per concludere esaminiamo il caso in cui le dimensioni dell'oggetto sono inferiori al limite risolutivo del sistema ottico. Questo caso si presenta spesso durante l'osservazione delle stelle ad occhio nudo e nel telescopio. In questo caso l'immagine ottica non è simile alla forma dell'oggetto e si presenta sotto forma di una macchia di diffrazione circondata da anelli chiari e scuri (si veda fig. 180), ed inoltre quasi tutta la luce è concentrata nel centro. Il telescopio non ha lo scopo di discernere i dettagli delle stelle osservate (al di fuori del suo potere risolutivo) ma di *aumentare il flusso luminoso* percepito dall'occhio dell'osservatore, il che permette di scoprire stelle poco visibili.

È inutile adoperare ingrandimenti inferiori all'ingrandimento normale poiché in questo caso si utilizza l'obiettivo solo in parte. Perciò nel seguito sarà sempre sottinteso che il diametro D' della pupilla d'uscita di telescopio è inferiore o uguale ad diametro d della pupilla dell'occhio ($D' \leqslant d$). Allora la dimensione del cerchio di diffrazione è determinata dal valore di D'. Come sarà dimostrato nella teoria della diffrazione (si veda § 55), il diametro del cerchio di diffrazione è inversamente proporzionale a D', e la sua area inversamente proporzionale a D'^2. Il flusso luminoso percepito dall'occhio, $\Phi \sim D^2$, dove D è il diametro dell'obiettivo, e l'illuminamento del cerchio di diffrazione sulla retina è

$$E \sim \frac{D^2}{1/D'^2} = D^2 D'^2.$$

Introducendo l'ingrandimento $N = D/D'$ del telescopio, otteniamo

$$E \sim D^4/N^2.$$

La visibilità di una stella dipende non solo dall'illuminamento del cerchio di diffrazione sulla retina ma anche dall'illuminamento del fondo del cielo. L'illuminamento del fondo del cielo E_{fondo} dipende dalla brillanza B

del cielo e può essere stimato con la formula (23.6) dove θ' indica l'angolo sotto il quale si vede il diametro D' della pupilla d'uscita del telescopio dal fuoco posteriore (immagine). Dunque, $E_{\text{fondo}} \sim BD'^2 = BD^2/N^2$, e quindi

$$E/E_{\text{fondo}} \sim BD^2. \tag{23.9}$$

Questa formula spiega perché nel telescopio si possono vedere le stelle anche di giorno.

Problema

Con l'aiuto di una lente convergente si può accendere una sigaretta mettendola nel fuoco dove si raccolgono i raggi solari diretti. Dire se si può fare lo stesso, utilizzando la luce della Luna con l'aiuto di una lente di dimensioni sufficientemente grandi (per esempio, l'obiettivo di un grande telescopio astronomico).

Soluzione. Poniamo per semplicità che l'irraggiamento solare verifichi la legge di Lambert. I raggi solari diretti incidenti sulla Terra perpendicolarmente creano su essa un illuminamento $E_S = \pi B \sin^2 \vartheta_S$, dove B è la brillanza superficiale del Sole e ϑ_S la sua dimensione angolare. L'esperienza quotidiana dimostra che questo illuminamento non è sufficiente per accendere una sigaretta. L'illuminamento medio della superficie terrestre è π volte più piccolo, cioè $\bar{E}_S = B \sin^2 \vartheta_S$. Se trascuriamo l'assorbimento e la dispersione della luce, l'azione della lente si riduce semplicemente all'ingrandimento delle dimensioni angolari visibili del Sole; ma l'illuminamento massimo non può essere superiore a πB.

Visto che il diametro dell'orbita lunare è trascurabile in confronto con la distanza dal Sole, l'illuminamento medio della superficie lunare può essere posto uguale a quello della Terra, cioè $\bar{E}_S = B \sin^2 \vartheta_S$. Se la Luna considerata come sorgente luminosa verifica la legge di Lambert, la sua brillanza superficiale è uguale a $B \sin^2 \vartheta_S$. I raggi inviati dalla Luna perpendicolarmente alla superficie terrestre producono un illuminamento $B \sin^2 \vartheta_S \sin^2 \vartheta_L$, dove ϑ_L è il raggio apparente della Luna. Quest'illuminamento è molto più piccolo di $B \sin^2 \vartheta_S$. Pertanto, quali che siano le dimensioni della lente, non si può accendere una sigaretta con l'aiuto della luce lunare.

§ 24. *Strumenti ottici*

1. Lente. La lente, come il microscopio, dà le immagini ingrandite di oggetti che si trovano a piccole distanze dall'occhio. *L'ingrandimento N della lente (e del microscopio) è il rapporto dell'angolo sotto il quale si vede un piccolo oggetto attraverso la lente all'angolo sotto il quale quest'oggetto si vedrebbe ad occhio nudo alla distanza L della visione distinta* (si veda § 23, punto 6). Si può anche dire che l'ingrandimento della lente (e quello del microscopio) è il rapporto tra le dimensioni lineari dell'immagine dell'oggetto formata sulla retina con l'aiuto della lente e le dimensioni dell'immagine dello stesso oggetto formata sulla retina quando quest'oggetto è osservato ad occhio nudo alla distanza L della visione distinta. Per ingrandimenti non superiori a 5, si può usare una lente semplice convergente, per ingrandimenti maggiori occorre un sistema di lenti associate.

Per avere maggior generalità nei calcoli considereremo la lente come un sistema centrato complesso e le applicheremo le equazioni di Newton (11.16) e (11.17). L'oggetto si mette tra il fuoco oggetto principale ed il piano oggetto principale della lente. La lente forma una sua immagine diritta virtuale. Siano X, Y le coordinate di un punto dell'oggetto rapportate al fuoco oggetto principale, $X'Y'$ le coordinate del corrispondente punto dell'immagine rispetto al fuoco immagine principale, a la coordinata dell'occhio (più esattamente, del suo punto nodale oggetto) rispetto allo stesso fuoco immagine principale. La distanza dell'occhio dall'immagine risulta uguale ad $a - X'$. Attraverso la lente l'occhio vede un segmento Y' sotto l'angolo $\varphi' = Y'/(a - X')$. Il corrispondente segmento dell'oggetto Y sarebbe visto ad occhio nudo alla distanza della visione distinta sotto l'angolo $\varphi = Y/L$. Ne segue che

$$N = \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{Y'}{Y} \cdot \frac{L}{a - X'},$$

o, in base alla (11.17),

$$N = \frac{f}{X} \frac{L}{a - X'} = \frac{X'}{f'} \frac{L}{a - X'}.$$

Per la lente d'ingrandimento $n = n'$, e quindi $f' = -f$. Di conseguenza, tenendo conto della (11.16), abbiamo

$$N = \frac{L}{f + aX/f}. \tag{24.1}$$

Se l'occhio si trova nel fuoco immagine principale della lente ($a = 0$), si ha $N = L/f$. Lo stesso ingrandimento si ottiene se l'oggetto è messo nel fuoco oggetto principale della lente. In questo caso l'occhio deve essere accomodato all'infinito, cioè per un occhio normale il muscolo anulare deve essere a riposo. Molti osservatori esaminano l'oggetto con il muscolo anulare contratto affinché l'immagine si formi alla distanza della visione distinta abituale a loro. In questo caso $a - X' = L$, cosicché

$$N = \frac{X'}{f'} = \frac{a - L}{f'} = \frac{L - a}{f}.$$

Se la lente sottile è messa molto vicino all'occhio, si ha $a = -f$, e $N = (L/f) + 1$. L'oggetto osservato è sempre messo vicino al fuoco oggetto principale, cioè $a/f \ll 1$. La quantità aX/f è anch'essa inferiore all'unità e pertanto, indipendentemente dal procedimento d'osservazione, l'ingrandimento della lente è praticamente sempre dato dalla formula

$$N = L/f. \tag{24.2}$$

Sostituendo qui $N = \varphi'/\varphi = (\varphi'/Y)L$, otteniamo $\varphi' = Y/f$. La di-

mensione dell'immagine formata sulla retina dell'occhio è uguale a $f_0\varphi' = (f_0/f)Y$, dove f_0 è la distanza focale anteriore dell'occhio (si veda § 21, punto 5). Questa dimensione dipende praticamente soltanto dalla distanza focale f della lente poiché f_0 per differenti individui varia poco. Quindi l'azione della lente consiste nel diminuire la distanza della visione distinta da L a f; la lente avvicina per così dire l'oggetto all'occhio fino alla sua distanza focale f.

In teoria l'ingrandimento di una lente è illimitato. Così, una lente di distanza focale $f = 0{,}25$ mm avrebbe un ingrandimento $N = 1000$. La fabbricazione di lenti d'ingrandimento a distanze focali f tanto piccole, e di conseguenza con piccoli diametri, è molto laboriosa e la loro utilizzazione è poco comoda. Inoltre, per queste lenti sono molto grandi le aberrazioni geometriche e cromatiche. Per questa ragione l'ingrandimento delle lenti non è superiore a 40. Gli ingrandimenti maggiori sono ottenuti con l'aiuto di microscopi.

L'immagine data dalla lente d'ingrandimento è formata mediante fasci di raggi relativamente sottili determinati dalla pupilla dell'occhio; pertanto la correzione delle aberrazioni non ha molta importanza. Un'aberrazione cromatica di posizione per piccoli ingrandimenti non viene corretta. Se ingrandimenti sono notevoli e se è necessario avere un grande campo visivo si deve correggere il coma e l'astigmatismo, nonché la differenza di ingrandimento cromatico. L'astigmatismo viene corretto per i raggi principali che passano attraverso il centro di rotazione dell'occhio.

Una lente piano-convessa semplice dà buone immagini fino ad un ingrandimento uguale a 8 (cioè quando la sua distanza focale non è inferiore a 3 cm). La faccia piana della lente deve essere rivolta verso l'occhio. In questo caso, visto che l'oggetto è messo vicino al fuoco della lente, la rifrazione dei raggi ha praticamente luogo soltanto sulla sua faccia convessa e non è ripartita tra entrambe le sue facce. Questo aumenta un po' l'aberrazione sferica, ma nel caso contrario, in cui la faccia convessa della lente è rivolta verso l'occhio, aumentano sostanzialmente le aberrazioni delle immagini delle regioni periferiche dell'oggetto.

2. Microscopio. Il microscopio è composto di due sistemi di lenti, l'*obiettivo* e l'*oculare,* disposti ad una grande distanza l'uno dall'altro, alle due estremità di un *tubo* il quale è di solito fissato verticalmente su un supporto fisso. L'obiettivo è avvitato alla parte inferiore del tubo e l'oculare viene introdotto nella parte superiore. L'oggetto è messo ad una piccola distanza dal fuoco oggetto dell'obiettivo. L'obiettivo dà un'immagine reale capovolta ed ingrandita che costituisce l'oggetto osservato attraverso l'oculare, usato come lente d'ingrandimento. Siano f_1 e f_1' le distanze focali principali dell'obiettivo e f_2 e f_2' le distanze focali principali dell'oculare. Allora le distanze focali f e f' di tutto il sistema ottico sono date dalle formule (12.3), cioè

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}, \tag{24.3}$$

dove Δ è l'intervallo ottico tra l'obiettivo e l'oculare. Δ è detta *lunghezza ottica del tubo microscopico*; è necessario distinguere questa lunghezza dalla *lunghezza meccanica T del tubo* che è generalmente 160 o 190 mm; il valore di Δ dipende dall'obiettivo e dall'oculare ed è in generale più grande di T.

Per un microscopio ordinario, l'ingrandimento, secondo la formula (24.2), è

$$N = \frac{L}{f} = -\frac{L}{f_1}\frac{\Delta}{f_2} \tag{24.4}$$

(nel caso di un microscopio a immersione che utilizza un liquido d'indice di rifrazione n, quest'espressione deve essere moltiplicata per n). L'ingrandimento totale N può essere rappresentato da $N = N_1 N_2$ dove $N_1 = L/f_1$ è l'ingrandimento dell'obiettivo assimilato ad una lente, $N_2 = \Delta/f_2$ l'ingrandimento supplementare dovuto all'oculare. Per un ingrandimento totale dato N, al fine di evitare errori di rappresentazione dei punti assiali è conveniente rendere grande N_1, mentre per ridurre gli errori sul campo visivo conviene rendere grande N_2. Per questa ragione, nonché per le considerazioni menzionate al punto 1, l'ingrandimento totale richiesto N non è realizzato con soli obiettivi forti o soli oculari forti ma combinando i loro poteri risolutivi.

Nel microscopio l'intervallo Δ e le distanze focali f_1 e f_2 sono positivi. La distanza focale di tutto il sistema, e con essa anche l'ingrandimento N, sono negativi. Ciò significa che l'immagine fornita dal microscopio è rovesciata. L'ingrandimento di un microscopio, di cui parleremo ancora è il *valore assoluto dell'ingrandimento N.*

L'intervallo ottico Δ è generalmente compreso tra 150 e 200 mm. La distanza focale f_1 dell'obiettivo corrispondente ai più forti ingrandimenti (100-120) non è inferiore a 1,5 mm e quella dell'oculare non è inferiore a 8-10 mm. Per un grande valore di Δ si possono ottenere ingrandimenti fino a 2500-3000 senza che f_1 e f_2 diventino troppo piccole (gli ingrandimenti tanto grandi sono inutili come mostreremo nel § 56).

Il corpo del microscopio ha generalmente un dispositivo a revolver per consentire una rapida sostituzione dell'obiettivo. Lo stesso dispositivo può essere utilizzato per la sostituzione degli oculari, il che permette di variare l'ingrandimento di un microscopio entro limiti molto ampi.

Nello spazio oggetto del microscopio l'apertura del fascio è larga mentre dal lato immagine sono grandi gli angoli d'inclinazione dei raggi. In conseguenza di ciò l'obiettivo presenta grandi aberrazioni sferiche e di coma, mentre l'oculare presenta un grande astigmatismo. L'obiettivo e l'oculare debbono dunque soddisfare a condizioni differenti.

3. L'obiettivo di un microscopio deve generalmente soddisfare le seguenti condizioni: 1) grande apertura numerica; 2) correzione delle aberrazioni sferiche per tutti i fasci di grande apertura; 3) verifica della condizio-

ne dei seni per lo stesso fascio; 4) acromatismo. L'acromatismo impone che sia verificata la condizione dei seni almeno per due colori, ed inoltre che l'obiettivo formi immagini reali acromatiche dell'oggetto osservato.

Per soddisfare queste diverse condizioni in misura sufficiente occorre costruire obiettivi piuttosto complicati, in particolare se si vuol ottenere un forte ingrandimento. Gli obiettivi più perfetti sono attualmente gli obiettivi *apocromatici* messi a punto da Abbe. Il primo obiettivo apocromatico di Abbe è stato fabbricato dalla ditta Zeiss nel 1886. Questo è un obiettivo a immersione composto di 10 lenti, rappresentato nella fig. 90 al doppio della sua grandezza naturale. Abbiamo già descritto nel § 18, punto 4, le funzioni della lente inferiore (semisferica). La sua faccia piana è immersa in un
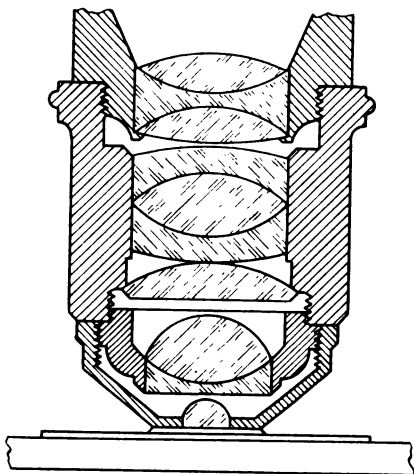
Fig. 90

olio con indice di rifrazione appropriato e questo olio circonda anche l'oggetto. Questa lente possiede un'aberrazione cromatica molto forte, che viene corretta dalle altre lenti. Le lenti divergenti dell'obiettivo sono fabbricate con specie diverse di flint e quelle convergenti in crown. Abbe ha scoperto che spostando leggermente certe lenti rispetto alle altre, si può eliminare quasi completamente l'aberrazione cromatica. L'obiettivo apocromatico è acromatizzato per tre colori e verifica la condizione dei seni per due colori. La distanza focale dell'apocromatico di Abbe è $f = 2$ mm, la sua apertura numerica è $n \sin \theta = 1{,}4$ e le sue qualità d'ottica geometrica sono tali che si può considerare di aver raggiunto il limite del potere risolutivo dei microscopi, determinato dalla natura ondulatoria della luce (si veda il § 56). Gli apocromatici sono utilizzati per le più fini osservazioni visuali o in microfotografia.

Gli obiettivi *acromatici* sono meno perfetti, ma più usati; essi sono acromatizzati per due soli colori dello spettro. Se ci si accontenta di un'acromatizzazione parziale dell'obiettivo, è necessario far coincidere i punti focali oggetto per due colori (*acromatizzazione di posizione*). Altrimenti la posizione dell'immagine di un oggetto, messo vicino al punto focale oggetto dell'obiettivo, cambierebbe molto fortemente cambiando colore. Le distanze focali rimarrebbero in questo caso non acromatizzate, cioè inuguali, e perciò vi sarebbe una evidente aberrazione cromatica degli ingrandimenti. Questa differenza viene corretta utilizzando particolari oculari detti *oculari compensatori.* Questi oculari sono sempre utilizzati insieme ad obiettivi apocromatici poiché questi ultimi non sono mai totalmente corretti per aberrazioni cromatiche prodotte da radiazioni di colore diverso.

In generale, l'acromatizzazione di posizione, cioè la coincidenza dei fuochi o dei punti di convergenza dei raggi di differente colore, deve essere realizzata in tutti i sistemi ottici costruiti per ottenere immagini reali di piccole dimensioni angolari. Per esempio, gli obiettivi dei cannocchiali debbono essere acromatizzati facendo coincidere i punti focali immagine corrispondenti a diversi colori.

La luce proveniente dall'oggetto penetra nell'obiettivo attraverso un *vetrino coprioggetto.* Negli obiettivi a secco lo spessore del vetrino coprioggetto ha una influenza sull'aberrazione sferica. Pertanto tutti i calcoli degli obiettivi sono fatti supponendo che lo spessore del vetrino sia uguale a 0,17 mm (0,15-0,20 mm). Attualmente tutti gli obiettivi a secco potenti sono muniti di una *montatura di correzione* mediante la quale si può leggermente variare la distanza tra le lenti inferiore e superiore dell'obiettivo ed eliminare quindi l'aberrazione sferica dovuta ad un vetrino coprioggetto di spessore non standard. Negli obiettivi a immersione omogenea, quando il vetrino coprioggetto, il liquido d'immersione e la lente frontale dell'obiettivo hanno tutti lo stesso indice di rifrazione, lo spessore del vetrino non è importante poiché può essere compensato dallo strato di liquido d'immersione.

4. Gli oculari debbono soddisfare le seguenti condizioni principali: 1) eliminazione dell'astigmatismo nei raggi obliqui; 2) eliminazione della distorsione; 3) acromatizzazione.

La curvatura di campo dell'immagine è generalmente piccola e non ostacola sostanzialmente le osservazioni visuali. Se l'immagine formata dall'obiettivo non presenta aberrazioni cromatiche, è sufficiente un'acromatizzazione parziale dell'oculare. Ma in questo caso non occorre l'acromatizzazione di posizione, bensì un'*acromatizzazione d'ingrandimento,* cioè l'uguaglianza delle distanze focali per raggi di colori differenti. Infatti, grazie alla grande lunghezza del tubo del microscopio i raggi cadono sull'oculare formando piccoli angoli rispetto all'asse ottico principale del microscopio. In questo caso l'ingrandimento angolare fornito dall'oculare

è dato dalla formula (24.2), indipendentemente da come è accomodato l'occhio: all'infinito o alla distanza della visione distinta. Se le distanze focali dell'oculare sono acromatizzate, l'ingrandimento angolare è lo stesso per tutti i colori. Perciò le immagini dell'oggetto sulla retina dell'occhio coincideranno tra loro per ogni colore, cioè l'immagine definitiva non è colorata anche quando le posizioni dei fuochi principali e dei piani principali dell'oculare non siano acromatizzate. Se, invece, l'immagine formata dall'obiettivo comporta aberrazioni cromatiche, queste possono essere compensate dalle aberrazioni cromatiche di segno contrario dovute all'oculare. Ad esempio, gli obiettivi apocromatici presentano una differenza cromatica di ingrandimento: l'immagine blu è più grande di quella rossa. Abbe associa questi obiettivi ad oculari per i quali la distanza focale è più grande per i raggi blu, e quindi l'ingrandimento è più piccolo di quello per raggi rossi.

Al § 16 (punto 5) è stato mostrato che la distanza focale di un sistema di due lenti sottili fabbricate con lo stesso vetro sarà la stessa per tutti i colori dello spettro se la distanza l tra le lenti è uguale alla semisomma delle sue distanze focali: $l = 1/2(f_1 + f_2)$. Realizzando l'oculare come associazione di due lenti, si può eliminare l'astigmatismo dei raggi obliqui e perciò gli oculari sono costruiti basandosi su questo principio. La lente rivolta verso l'obiettivo è detta *collettore,* quella rivolta verso l'occhio, si dice *lente dell'occhio.* Il collettore assume le stesse funzioni del condensatore di un apparecchio di proiezione: esso raccoglie tutti i raggi che partecipano alla formazione dell'immagine, inviandoli nella pupilla dell'occhio dell'osservatore. Se non vi è diaframma di campo il suo ruolo è assunto dalla montatura del collettore: questo spiega perché il collettore è spesso detto *lente di campo.* L'ingrandimento dell'oculare dipende prima di tutto dalla lente dell'occhio. I più semplici oculari di questo tipo utilizzati nei microscopi e nei telescopi, sono gli *oculari di Huygens* e *di Ramsden* (1735-1800).

5. L'oculare di Huygens è composto da due lenti piano-convesse o biconvesse rivolte con le facce più convesse verso i raggi incidenti (fig. 91). Per diminuire le aberrazioni sferiche Huygens ha scelto le distanze focali e la posizione relativa delle lenti in modo che la deviazione di un raggio incidente diretto parallelamente all'asse ottico principale si ripartisse dopo la rifrazione ugualmente tra le due lenti. È facile calcolare (raccomandiamo di farlo al lettore) che nell'approssimazione dei raggi parassiali questo risultato viene realizzato se $l = f_1 - f_2$, dove f_1 è la distanza focale della lente di campo, e f_2 quella della lente dell'occhio. Combinando questa condizione con la condizione $l = 1/2(f_1 + f_2)$, troviamo $f_1 = 3f_2$, $l = 2f_2$. Quindi, nell'oculare originale di Huygens $f_2 : l : f_1 = 1 : 2 : 3$ (nelle costruzioni moderne dell'oculare di Huygens è più spesso utilizzato il rapporto 2 : 3 : 4). L'intervallo ottico tra le lenti dell'oculare è $\Delta = -2f_2$. Le formule (12.2), (12.3), (12.4) permettono di determinare le posizioni dei fuochi principali, dei piani principali e le distanze focali dell'oculare di

Huygens. I risultati di questi calcoli sono riportati nella fig. 91 (la posizione del fuoco oggetto F_1 non è indicata).

La figura 92 illustra il cammino dei raggi nell'oculare di Huygens. Supponiamo che l'occhio sia accomodato all'infinito e quindi l'immagine definitiva formata dal microscopio debba trovarsi all'infinito. Ciò implica che l'obiettivo debba dare un'immagine rovesciata AB dell'oggetto osservato nel piano focale oggetto dell'oculare. Ciò può essere ottenuto spostando tutto lo strumento rispetto all'oggetto. L'immagine AB per il collettore O_1 funge da *oggetto virtuale* ed il collettore fornisce un'immagine reale rimpicciolita $A'B'$ nel piano focale anteriore della lente dell'occhio O_2, e quindi l'immagine definitiva può essere formata all'infinito (ciò può anche essere dimostrato mediante calcoli diretti). L'immagine $A'B'$ è ingrandita dalla lente dell'occhio O_2 che si comporta come una lente d'ingrandimento.
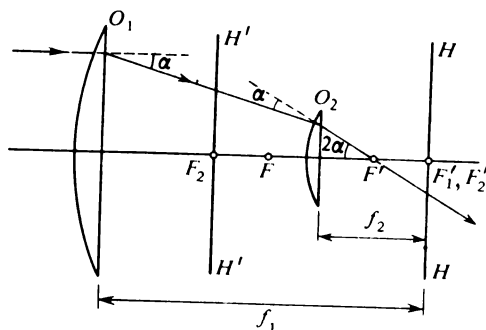
Fig. 91

L'angolo $A'CB'$ definisce il campo visivo; si può modificarlo mettendo nel piano focale F_2 della lente dell'occhio un diaframma.

L'oculare di Huygens è poco adatto a misure precise. Infatti, in questo oculare si dovrebbe disporre la scala del micrometro tra le lenti dell'oculare. Ma in questo caso la scala sarebbe confrontata con l'immagine dell'oggetto formata dall'obiettivo del microscopio e deformata dalla prima lente dell'oculare. Le aberrazioni di questa lente, soprattutto la sua distorsione, provocherebbero imporanti errori nelle misure che non si possono stimare. L'oculare di Huygens non può essere utilizzato come una lente d'ingrandimento per un'osservazione diretta di piccoli oggetti, poiché l'oggetto osservato dovrebbe essere posto tra le lenti dell'oculare. Questo oculare è utilizzato come oculare di compensazione in combinazione con obiettivi acromatici, ma in questo caso la lente dell'occhio è composta da due lenti sferiche in vetri differenti.

6. L'oculare di Ramsden è composto di due lenti piano-convesse aventi uguali distanze focali ($f_1 = f_2$) rivolte con le loro facce piane verso l'ester-

no (fig. 93). Nell'oculare originale di Ramsden la distanza tra le lenti era $l = f_1 = f_2$, il che assicura l'acromatizzazione della distanza focale f di tutto l'oculare. Ma in questo caso la lente di campo si trova nel piano focale oggetto della lente dell'occhio. Pertanto la lente dell'occhio dà immagini nette di ogni grano di polvere, di sporcizia e di tutte le graffiature sulla superficie della lente di campo, il che danneggia l'immagine dell'oggetto. Per
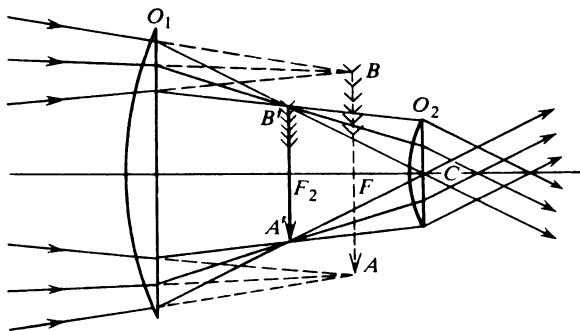
Fig. 92

eliminare questo inconveniente, viene diminuita la distanza di separazione tra le lenti, scegliendo di solito $l = 2/3f_1$. L'acromatismo dell'oculare ne soffre, ma le aberrazioni cromatiche risultanti sono poco importanti e possono essere eliminate, fabbricando una lente dell'occhio acromatica composta da una lente convergente in crown e da una lente divergente in flint.
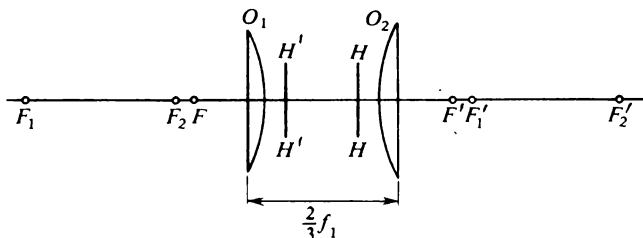
Fig. 93

Questa è la soluzione adottata nell'*oculare di Kellner*; la lente divergente deve essere rivolta verso l'occhio. Sarebbe desiderabile di acromatizzare anche il collettore dell'oculare, ma ciò non viene quasi mai fatto.

La figura 93 rappresenta le posizioni dei punti focali e dei piani principali nell'oculare di Ramsden, e la figura 94 dà il cammino dei raggi in questo oculare. Confrontando queste figure con le figure 91 e 92, si può constatare che l'oculare di Ramsden è meno vantaggioso di quello di Huygens:

l'oculare di Ramsden allunga tutto il sistema ottico del microscopio poiché il suo piano focale oggetto, nel quale deve formarsi l'immagine reale *AB* data dall'obiettivo, si trova davanti alla lente anteriore dell'oculare ad una distanza $1/4 f_1$ (e non tra le lenti dell'oculare come lo è nel caso dell'oculare di Huygens).

Ma questa particolarità dell'oculare di Ramsden permette di disporre nel piano focale *F* un micrometro (una scala su una piastra di vetro o dei fili spostati da una vite micrometrica) e di misurare le dimensioni dell'immagine reale data dall'obiettivo del microscopio. In questo caso sia il micrometro, sia l'immagine reale data dall'obiettivo si trovano tutti e due davanti all'oculare e sono ugualmente deformati dalle aberrazioni della lente di
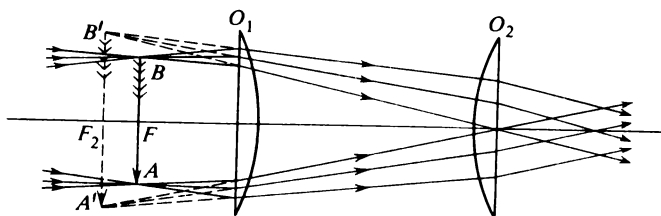
Fig. 94

campo dell'oculare. Con ciò l'oculare di Ramsden elimina il principale inconveniente dell'oculare di Huygens per le misure. Conoscendo l'ingrandimento lineare dell'obiettivo del microscopio è facile calcolare le dimensioni dell'oggetto. Per questa ragione nei microscopi destinati a misure di lunghezza e di angoli, sono utilizzati oculari di Ramsden muniti di micrometri oculari.

In alcuni casi sono utilizzati oculari più complicati composti da più lenti.

7. Nella figura 95 è rappresentato il cammino dei raggi in un microscopio munito di un oculare di Huygens. I raggi principali inviati dai punti estremi dell'oggetto *AB* sono tracciati in grassetto ed i raggi marginali emessi dagli stessi punti sono rappresentati con linee sottili. Se l'ingrandimento è inferiore a quello normale, la pupilla dell'occhio dell'osservatore funge da diaframma d'apertura e la sua immagine data dal microscopio da pupilla d'entrata del microscopio. Se, invece, l'ingrandimento è più grande di quello normale, il diaframma d'apertura e la pupilla d'entrata sono costituiti da un eventuale diaframma o dai bordi della lente semisferica *CD*. L'immagine *C'D'* della lente *CD* funziona da pupilla d'uscita del microscopio. Il diaframma di campo deve trovarsi dove si forma l'immagine *A'B'* data dall'obiettivo e dalla lente di campo dell'oculare. L'immagine *A''B''*, che vede l'osservatore, può essere formata a qualsiasi distanza, spostando il corpo del microscopio. Generalmente si opera in modo che

quest'immagine sia alla distanza della visione distinta (25 cm per l'occhio normale) o all'infinito. Spostando l'oculare si può variare la lunghezza ottica del tubo e con essa anche l'ingrandimento del microscopio.

Dalla figura si vede il vantaggio principale del microscopio rispetto alla lente d'ingrandimento. Nel microscopio il problema di ottenere un'immagine si divide in due parti delle quali una viene risolta con l'aiuto dell'obiettivo e l'altra con l'aiuto dell'oculare. L'obiettivo forma un'immagine dell'oggetto con un'apertura numerica massima possibile. Avendo un campo visivo largo l'oculare, come la lente d'ingrandimento, forma un'immagine dei punti dell'oggetto con stretti pennelli luminosi poiché questi fasci sono limitati dalla pupilla d'uscita del microscopio.
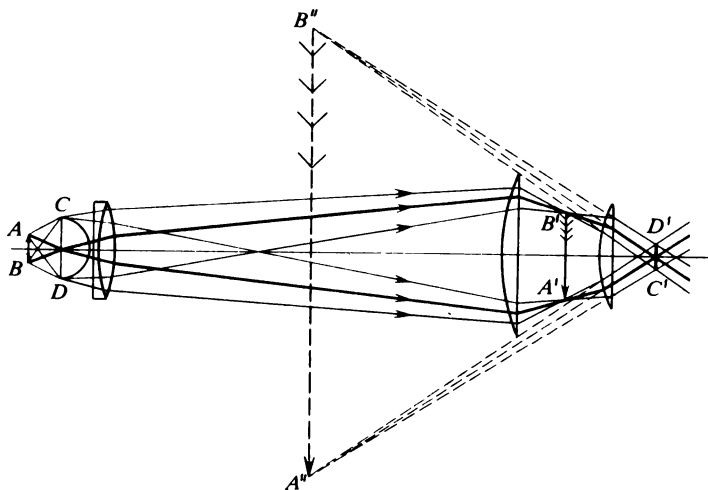
Fig. 95

In generale gli oggetti osservati al microscopio non emettono la luce propria ma sono illuminati da una sorgente di luce. A questo scopo si utilizza un *condensatore* composto di una o più lenti di piccole distanze focali posto sotto il piatto del microscopio. Per utilizzare al massimo la grande apertura numerica dell'obiettivo del microscopio, l'inclinazione dei raggi illuminanti l'oggetto deve essere molto grande rispetto all'asse ottico; proprio questo determina l'impiego di lenti di piccola distanza focale. Il condensatore non può aumentare la brillanza della sorgente di luce, la sua azione è equivalente all'avvicinamento della sorgente all'oggetto da illuminare.

8. Cannocchiali e telescopi. Le parti principali di un cannocchiale sono l'*obiettivo* e l'*oculare*. L'obiettivo forma nel piano focale posteriore l'immagine rovesciata e rimpicciolita AB di un oggetto lontano e quest'imma-

gine è esaminata nell'oculare come in una lente d'ingrandimento (fig. 96). Per un occhio normale accomodato all'infinito il fuoco immagine dell'obiettivo deve coincidere con il fuoco oggetto dell'oculare. Questa coincidenza è compromessa per un occhio miope o presbite, ma in un modo moderato. Dunque, un fascio di raggi paralleli dopo aver attraversato lo strumento puntato all'infinito resta parallelo, il che significa che il cannocchiale è un *sistema ottico telescopico.* L'ingrandimento angolare di questi sistemi è uguale al rapporto della larghezza del fascio incidente alla larghezza del fascio emergente o anche al rapporto della distanza focale f_1 dell'obiettivo alla distanza focale f_2 dell'oculare (cfr. il § 11, punto 10). L'ingrandimento normale è stato definito nel § 23, punto 4.
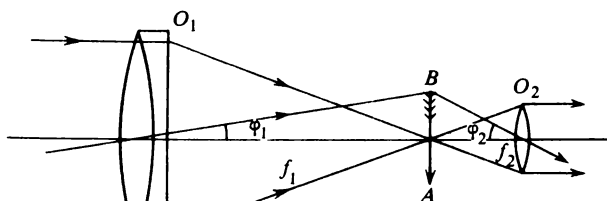
Fig. 96

Poiché i raggi che arrivano sull'obiettivo dello strumento sono poco inclinati rispetto all'asse ottico principale, non sono necessarie correzioni molto scrupolose delle aberrazioni dependenti da questi angoli. L'obiettivo è costituito da una lente doppia acromatica corretta per le aberrazioni sferiche. Il coma, cioè lo scarto dalla condizione dei seni, non ha bisogno di essere corretto molto scrupolosamente. L'acromatizzazione dell'oculare deve soddisfare le stesse condizioni a cui è soggetto un microscopio: poiché il raggio principale cade sull'oculare formando un piccolo angolo con l'asse
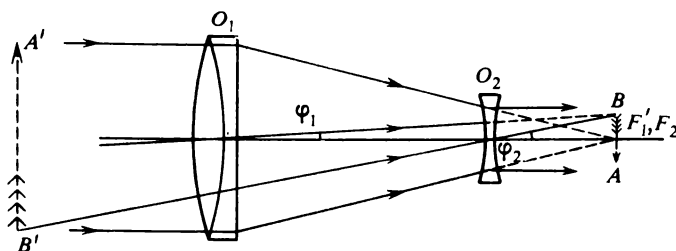
Fig. 97

ottico principale, ci si può limitare all'acromatizzazione della distanza focale. Perciò per i microscopi ed i cannocchiali si possono utilizzare gli stessi oculari. Se sono necessarie misure micrometriche (come nei cannocchiali astronomici) è preferibile utilizzare l'oculare di Ramsden.

La figura 96 rappresenta il percorso dei raggi nel cannocchiale di Keplero (per semplicità l'oculare composto è sostituito con una lente convergente semplice). Questo cannocchiale dà un'immagine rovesciata dell'oggetto. Per eliminare questo difetto dietro l'immagine AB ad una distanza focale doppia viene messa una lente convergente acromatizzata supplementare che raddrizza l'immagine AB senza modificare la sua grandezza. Quest'immagine è esaminata nell'oculare e l'immagine definitiva registrata dall'occhio è dunque diritta.

Nel cannocchiale di Galileo l'immagine è diritta senza la lente interposta. Ciò è dovuto al fatto che l'oculare è una lente biconcava semplice il cui fuoco oggetto F_2 coincide con il fuoco immagine F_1' dell'obiettivo (fig. 97).
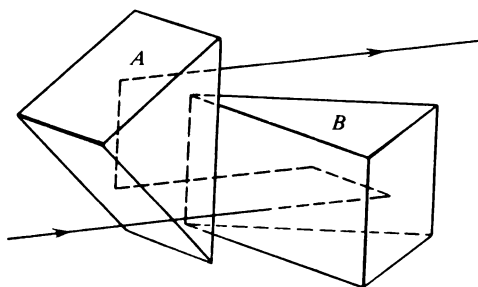
Fig. 98

Il campo visivo del cannocchiale di Galileo è piccolo, ma per uno stesso obiettivo, questo è molto più corto del cannocchiale di Keplero. Per questa ragione il cannocchiale ad oculare negativo è utilizzato soltanto nei binocoli da teatro.

In un binocolo ordinario, composto di due cannocchiali, il raddrizzamento dell'immagine data dall'obiettivo è ottenuto in ogni cannocchiale mediante riflessione totale sulle facce di un insieme di due prismi rettangolari A e B disposti come rappresentato nella figura 98. I raggi luminosi emergono dal prisma B parallelamente alla direzione dei raggi incidenti ma spostati rispetto a questa direzione. Per il resto il sistema ottico assomiglia a quello del cannocchiale di Keplero. Visto che il raggio percorre tre volte la distanza tra i prismi, si può ridurre notevolmente la lunghezza del cannocchiale allontanando i prismi A e B l'uno dall'altro. Modificando la costruzione si può ottenere un cannocchiale binoculare, in cui la distanza tra gli obiettivi è molte volte più grande di quella tra gli occhi dell'osservatore. Questi cannocchiali danno una sensazione di rilievo grazie alla visione binoculare (*effetto stereoscopico*).

9. I *cannocchiali astronomici* ed i *telescopi* sono di due tipi: rifrangenti (*rifrattori*) e riflettenti (*riflettori*); i primi hanno per obiettivi le lenti ed i secondi specchi concavi (*specchio principale*).

La fabbricazione degli obiettivi per i telescopi riffrattori è legata a numerose difficoltà che crescono rapidamente con l'aumento delle dimensioni dell'obiettivo. La principale difficoltà consiste nel costruire un grande disco di vetro avente un indice di rifrazione uniforme e privo di tensioni interne. Queste ultime sono eliminate mediante una lente *ricottura del vetro* che dura alcuni mesi. È necessaria una grande precisione nel taglio delle superfici sferiche, nella centratura e nella montatura delle lenti. L'influenza di piccoli scarti casuali nell'omogeneità perfetta dell'indice di rifrazione è corretta per deformazione delle superfici sferiche esatte dell'obiettivo mediante *levigatura locale* (*ritocco*). La fabbricazione degli obiettivi dei telescopi rifrattori destinati ai grandi osservatori richiede molti anni. Il più grande rifrattore del mondo è quello dell'osservatorio di Yerkes negli Stati Uniti. Il diametro del suo obiettivo è di 1 metro. Il diametro dell'obiettivo del rifrattore dell'osservatorio di Pulkovo (URSS) è di 75 cm.

La fabbricazione dello specchio principale dei telescopi riflettori è molto più facile poiché la luce non passa attraverso il vetro e quest'ultimo può essere di qualità meno buona, tuttavia deve sempre essere ben ricotto. Questi vetri possono essere fusi in dischi di dimensioni molto grandi. Per questa ragione i più grandi telescopi sono quelli riflettenti (riflettori). Attualmente il più grande telescopio, avente lo specchio principale di 6 m di diametro, è stato installato da poco sul versante nord dei monti del Caucaso. Prima il più grande telescopio era quello di Mont-Palomar (California, USA) il cui specchio principale ha 5 m di diametro.

La superficie riflettente degli specchi principali dei telescopi riflettori è levigata otticamente e presenta una forma parabolica affinché i raggi paralleli all'asse ottico principale convergano nel fuoco del paraboloide. Per ottenere lo specchio si costruisce una superficie sferica il cui raggio R è quasi esattamente uguale al doppio della distanza focale F del paraboloide. Poi, per rendere parabolica questa superficie si asporta per usura un sottile strato di vetro dalla parte centrale dello specchio. Nella parte più spessa dello specchio lo spessore deve essere $1/8\ (r/R)^4 R$, dove r è il raggio di curvatura. Per $r = 50$ cm, $F = 5$ m otteniamo per questo spessore $7{,}8 \cdot 10^{-4}$ cm, il che rappresenta all'incirca 15 lunghezze d'onda della radiazione giallo-verde. La superficie riflettente viene ricoperta con un sottile strato d'argento, d'alluminio o di rodio. Con il passar del tempo, sotto l'azione dell'aria, il potere riflettente del rivestimento metallico diminuisce. Il rivestimento d'argento deve essere rinnovato all'incirca ogni sei mesi, quello d'alluminio è più stabile e resta utilizzabile per molti anni. Il rivestimento di rodio è di gran lunga il migliore.

I telescopi a specchio presentano il vantaggio di sopprimere le aberrazioni cromatiche, il che permette di lavorare non solo con luce di qualsiasi colore, ma di aumentare anche notevolmente la luminosità dei telescopi con una riduzione corrispondente della lunghezza.

La luce deve percorrere due volte il tubo del riflettore prima di concen-

trarsi nel fuoco e perciò si richiede un piccolo specchio (o un prisma) ausiliario per spostare il piano focale in una posizione più conveniente per le osservazioni visuali o per la fotografia. Nel telescopio a specchio di Newton uno specchio ausiliare piano *s* sposta su un lato il fuoco *F* come è indicato nella figura 99 (in questa figura ed in quelle successive l'oculare è omesso ed è indicata la sola posizione finale del fuoco *F* del sistema ottico).

Nel telescopio di William Herschel (fig. 100) non c'è lo specchio ausiliario e lo spostamento laterale del fuoco principale *F* è assicurato da una piccola inclinazione dello specchio principale *S*. Qualche anno prima di Her-
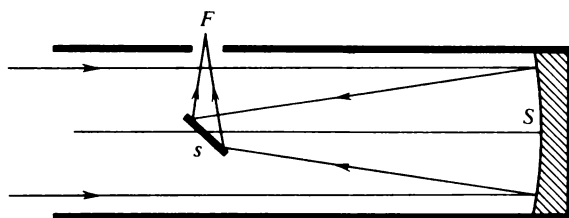
Fig. 99

schel un telescopio analogo è stato inventato da Lomonosov, ma la sua invenzione fu conosciuta solo all'inizio del XX secolo. Il difetto di questo tipo di telescopio è che l'immagine non si forma sull'asse ottico principale e ciò deteriora la qualità delle immagini. Del resto, lo stesso Herschel utiliz-
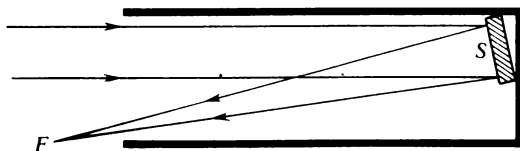
Fig. 100

zava specchi a distanze focali tanto grandi da richiedere soltanto piccoli angoli d'inclinazione e il deterioramento delle immagini era trascurabile.

Nel telescopio di Cassegrain (fig. 101) viene utilizzato uno specchio
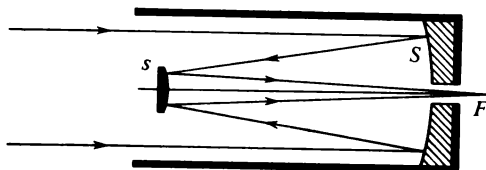
Fig. 101

iperbolico convesso s disposto sull'asse ottico principale un po'più vicino del fuoco F dello specchio principale S. Il fuoco della superficie iperbolica dello specchio ausiliario s coincide con il fuoco dello specchio principale S. Dopo che i raggi sono stati riflessi dallo specchio s, appare un nuovo fuoco F coincidente con il secondo fuoco della superficie iperbolica dello specchio s. I raggi escono dal sistema attraverso un orifizio praticato al centro dello specchio principale S e penetrano nell'oculare o cadono su una lastra fotografica.

Il telescopio di Gregory (fig. 102) è dello stesso tipo di quello di Cassegrain, ma utilizza uno specchio ausiliario ellittico concavo s disposto sull'asse ottico principale un po'più lontano del fuoco dello specchio prin-
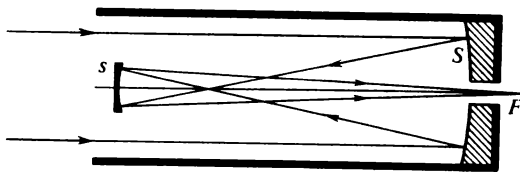
Fig. 102

cipale S. Il fuoco dello specchio S coincide con il primo fuoco dello specchio ellittico s. Il fuoco spostato F di tutto il sistema ottico si trova nel secondo fuoco della superficie ellittica dello specchio s. Anche in questo caso i raggi escono dal sistema attraverso un orifizio al centro dello specchio principale S ed arrivano all'oculare o su una lastra fotografica. La qualità delle immagini è un po' migliore che quella data dal telescopio di Cassegrain, ma siccome il tubo del telescopio di Gregory è molto più lungo, questo sistema non si usa quasi mai.

10. Camera di Schmidt e sistemi a menischi di Maksutov. L'utilizzazione di riflettori di forma parabolica e di specchi ausiliari di forma iperbolica o ellittica elimina l'aberrazione sferica conservando però tutte le altre aberrazioni geometriche, poiché i fuochi geometrici del paraboloide, dell'ellissoide e dell'iperboloide *sono punti stigmatici ma non aplanatici.* Gli obiettivi dei telescopi a specchio presentano sempre notevoli aberrazioni di coma e d'astigmatismo ed in conseguenza di ciò il campo visivo nel quale si ottengono immagini nette è molto limitato, dell'ordine di qualche minuto e nei casi migliori di una decina di minuti d'arco. Nel 1930 B. Schmidt, collaboratore dell'osservatorio di Hamburg, ha elaborato un nuovo tipo di telescopio che fu chiamato camera di Schmidt. Il telescopio Schmidt presenta un fuoco corto con un'apertura relativa $D/f = 1$ e permette di ottenere immagini nette in un campo visivo di $\approx 25°$. Il campo visivo utile di uno specchio parabolico della stessa apertura relativa è di qualche minuto d'arco.

La figura 103 illustra il principio del telescopio Schmidt. In questa figu-

ra $S_1 S_2$ è uno specchio sferico concavo con il centro nel punto C, e $D_1 D_2$ è l'apertura di un diaframma centrato nello stesso punto, qui introdotto solo per fissare le idee. Il fascio di raggi A, paralleli all'asse ottico principale, dopo la riflessione viene focalizzato in un punto F di un cerchio il cui centro coincide con il fuoco principale F. Le dimensioni di questo cerchio dipendono dalle aberrazioni sferiche. Un fascio di raggi paralleli A_1 inclinato rispetto all'asse viene focalizzato in un punto F_1 dello stesso cerchio. Il luogo geometrico di tutti i fuochi è una sfera il cui raggio è la metà del raggio dello specchio $S_1 S_2$. Questa sfera è rappresentata in tratteggio. Dunque, i punti oggetto all'infinito dopo la riflessione della luce sullo specchio sferico $S_1 S_2$ sono rappresentati da piccoli cerchi disposti su questa sfera tratteggiata.
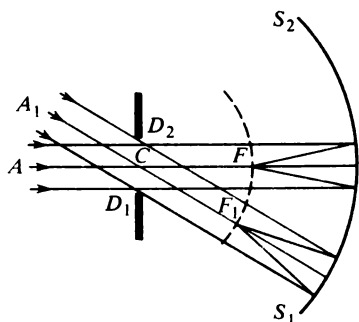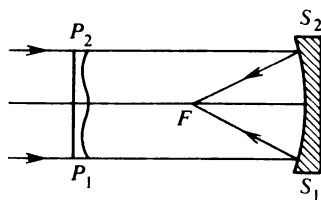
Fig. 103 Fig. 104

I cerchi hanno quasi le stesse dimensioni poiché essi sono delimitati da fasci di raggi paralleli di sezioni trasversali praticamente uguali. L'inclinazione dei fasci influisce soltanto sulla posizione dei cerchi sulla sfera tratteggiata ma non sulle loro dimensioni. Del resto, l'identità dei cerchi non è essenziale. È essenziale che le uniche aberrazioni geometriche presenti siano aberrazioni sferiche e di curvatura del piano dell'immagine. Non ci sono né coma, né astigmatismo, né distorsione.

Nei telescopi riflettori ordinari le aberrazioni sferiche sono corrette rendendo parabolica la superficie riflettente dello specchio, ma questo procedimento può servire soltanto per punti che si trovano sull'asse ottico principale dello specchio. Schmidt ha suggerito di eliminare le aberrazioni sferiche con l'aiuto di una lastra correttrice in vetro posta davanti allo specchio sferico $S_1 S_2$. Una superficie della lastra è piana e l'altra è una superficie di rivoluzione di una forma conveniente poco differente da una superficie piana. Questa differenza è tanto piccola che è assolutamente impercettibile ad occhio nudo.

La figura 104 dà una rappresentazione schematica ed esagerata della lastra di correzione $P_1 P_2$. La sua parte centrale è più spessa e si comporta co-

me una lente convergente avvicinando il fuoco dei raggi centrali dello specchio. I bordi della lastra sono più sottili e, comportandosi come una lente divergente, allontanano dallo specchio i fuochi dei fasci obliqui.

Se la lastra di correzione è messa vicino allo specchio obiettivo, non si ottiene alcun nuovo risultato rispetto alla parabolizzazione dello specchio. Ma una lastra di correzione di forma adeguata disposta ad una distanza conveniente dallo specchio, permette di correggere le aberrazioni sferiche non soltanto per i fasci di raggi paralleli all'asse ottico principale, ma anche per quelli obliqui. Di solito la lastra di correzione viene posta al centro di curvatura dello specchio sferico e per questa posizione viene calcolata la
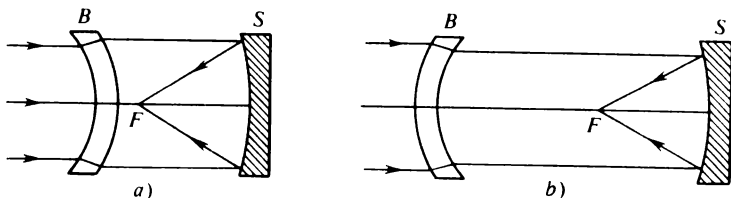
Fig. 105

sua forma. L'impiego della lastra di correzione non introduce altre aberrazioni. La fabbricazione delle lastre di correzione di Schmidt è un compito molto arduo.

Nel 1941 D.D. Maksutov (1896-1964) propose di correggere le aberrazioni dello specchio sferico con l'aiuto di *menischi* la cui fabbricazione è più facile di quella delle lastre di correzione a superfici non sferiche di Schmidt. I sistemi di menischi di Maksutov sono largamente utilizzati. Per un certo rapporto tra i raggi di curvatura delle superfici sferiche di un menisco e il suo spessore il menisco è acromatizzato per due colori dati.

La figura 105,*a* rappresenta un sistema semplice di Maksutov, composto di uno specchio sferico S ed un menisco B con la faccia convessa rivolta verso lo specchio. Se il menisco è acromatico le immagini formate nel fuoco F saranno acromatiche. Le aberrazioni sferiche del menisco debbono compensare quelle dello specchio S. Se la distanza l tra il menisco e lo specchio è conveniente, anche il coma risulta corretto ed il sistema è allora aplanatico. Ma se, conservando la stessa distanza l, il menisco viene rivolto dalla sua faccia concava, il sistema cessa di essere aplanatico. L'aplanatismo può essere ristabilito aumentando la distanza l (fig. 105,*b*). La prima di queste posizioni del menisco è preferibile, poiché il telescopio è allora due volte più corto che nel caso di menisco occupante la seconda posizione. Ma quest'ultima posizione in certi casi conviene meglio.

L'astigmatismo dei sistemi a menischi si può rendere trascurabile ed in casi particolari eliminarlo assolutamente, ma la curvatura di campo sussiste. Tuttavia, tra tutte le aberrazioni, la curvatura di campo è la meno noci-

va ed esistono metodi per correggerla. L'associazione del telescopio Schmidt o dei sistemi a menischi di Maksutov con l'oculare si fa come nei telescopi di Newton, di Cassegrain e di Gregory.

§ 25. *Lenti elettriche e magnetiche*

1. Supponiamo che l'indice di rifrazione *n* di un mezzo varii *in modo continuo* in funzione delle coordinate. Tracciamo le superfici di ugual indice di rifrazione a distanze assai piccole per poter considerare che gli indici delle superfici adiacenti sono costanti. In questo caso la variazione continua dell'indice *n* sarà sostituita da una variazione a salti che si manifesta alle frontiere degli strati. Se il mezzo possiede una simmetria assiale, le frontiere tra gli strati saranno superfici di rivoluzione le cui sommità si trovano sull'asse di simmetria del sistema. In vicinanza dell'asse di simmetria queste superfici possono essere assimilate a sfere centrate sullo stesso asse. In tal modo arriviamo ad un sistema centrato di lenti sferiche sottili aventi per asse di simmetria l'asse ottico principale; questo sistema soddisfa tutte le condizioni dell'ottica dei raggi parassiali. Facendo crescere indefinitamente il numero di strati e facendo simultaneamente tendere i loro spessori verso zero, ristabiliamo al limite la ripartizione continua iniziale dell'indice di rifrazione. Ne segue che *un sistema a simmetria assiale il cui indice di rifrazione varia con continuità in funzione delle coordinate può essere considerato come il caso limite di un sistema centrato di lenti al quale si applicano le leggi ed i metodi dell'ottica dei raggi parassiali. Tale mezzo può dare immagini ottiche.*

I sistemi ottici ad indice di rifrazione continuamente variabile sono in linea di principio realizzabili, ma per ragioni di difficoltà di realizzazione pratica non s'incontrano in ottica. (Un'eccezione è il cristallino dell'occhio il cui indice di rifrazione cresce dal bordo al centro.) Gli analoghi di questi sistemi sono alcuni dispositivi elettronici ed ionici (microscopio elettronico, oscillografo elettronico, tubo catodico di televisione, ecc.) dove il ruolo di raggi è assunto da elettroni o ioni che si muovono in campi elettrostatici o magnetici eccitati da elettrodi carichi o da bobine percorse da correnti elettriche. Questi elettrodi sono detti *lenti elettriche* e le bobine *lenti magnetiche.* Le condizioni di formazione delle immagini in questi sistemi sono studiate in *ottica elettronica ed ionica.*

2. Abbiamo già notato nel § 4, punto 1 l'esistenza di una analogia formale tra l'ottica geometrica e la meccanica classica; da quest'analogia risulta direttamente che si possono focalizzare le particelle cariche ed ottenere immagini in sistemi di lenti elettrostatiche a simmetria assiale. Infatti, secondo quest'analogia, la traiettoria di una particella che si sposta in un campo di forze conservative coincide con un raggio luminoso in un mezzo continuo il cui indice di rifrazione è proporzionale alla velocità di una par-

ticella, essendo questa velocità una funzione univoca della posizione della particella (in meccanica relativistica si deve sostituire la velocità con l'impulso della particella). Ad esempio, si può porre

$$n = \sqrt{2(W - eV)}, \tag{25.1}$$

dove W è l'energia totale della particella, e la sua carica elettrica e V il potenziale del campo elettrostatico.

3. È meno facile spiegare il principio d'azione delle lenti magnetiche e dei sistemi misti composti di lenti elettrostatiche e magnetiche. Per studiare la questione consideriamo un campo elettromagnetico statico con una simmetria di rivoluzione attorno ad un asse. Prendiamo questo asse come asse X di un sistema di coordinate cilindriche. Indichiamo con r la distanza dall'asse X e con φ l'angolo azimutale. Per ragioni di simmetria i campi elettrico e magnetico non possono dipendere da φ. Supponiamo inoltre che ogni piano passante per l'asse X sia piano di simmetria del campo. In queste condizioni le componenti φ dei campi elettrico e magnetico saranno nulle ($E_\varphi = B_\varphi = 0$). Le componenti x e r restanti saranno funzioni soltanto delle coordinate x e r. Moltiplicando per r l'equazione div $\boldsymbol{B} = 0$ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x}(rB_x) + \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = 0. \tag{25.2}$$

Introduciamo la funzione potenziale $A(x, r)$ definita dalla condizione $rB_x = -\partial A/\partial r$. Allora si può scrivere l'equazione (25.2) come segue:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right),$$

da cui $rB_r = \partial A/\partial x$, ed inoltre per ragioni di comodità poniamo uguale a zero la « costante d'integrazione » (più esattamente si tratta della funzione x). Dunque, si ha

$$rB_x = -\frac{\partial A}{\partial r}, \quad rB_r = \frac{\partial A}{\partial x}, \tag{25.3}$$

da cui

$$A(x, r) = \int r(B_r\,dx - B_x\,dr). \tag{25.4}$$

In virtù della (25.2) l'integrale non dipende dal cammino d'integrazione, essendo definito dai suoi punti iniziale e finale. Conveniamo di mettere il punto iniziale sull'asse del sistema, dove per ragioni di simmetria $B_r = 0$. Perciò non importa in quale posizione sull'asse si sceglie il punto iniziale. Quindi il valore dell'integrale (25.4) non dipende dal suo punto iniziale e può essere presentato nella forma

$$A(x, r) = -\int_0^r B_x r\,dr. \tag{25.5}$$

Studiamo ora il moto di una particella di massa m e di carica e limitandoci per semplicità all'approssimazione non relativistica. La velocità angolare $\dot{\varphi}$ della particella si deduce dall'equazione dei momenti

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = M_x,$$

dove M_x è il momento delle forze applicate alla particella rispetto all'asse X. Il campo elettrico non esercita alcuna azione sul momento M_x il quale è dovuto soltanto alla forza $\boldsymbol{F} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{vB}]$ esercitata dal campo magnetico. Calcolando questo momento, troviamo

$$M_x = \frac{er}{c}(B_r v_x - B_x v_r) = \frac{e}{c}\left(v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_r \frac{\partial A}{\partial r}\right).$$

Se x, r, φ sono le coordinate della particella in moto, $A(x, r)$ è una funzione del tempo t. La derivata di questa funzione è uguale a

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial r}\frac{dr}{dt} = v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_r \frac{\partial A}{\partial r}.$$

Quindi,

$$M_x = \frac{e}{c}\frac{dA}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = \frac{e}{c}\frac{dA}{dt},$$

da cui

$$\dot{\varphi} = \frac{e}{mcr^2}A + \frac{C}{mr^2}.$$

La costante C deve annullarsi, altrimenti (visto che sull'asse del sistema la funzione A è nulla) per $r = 0$ otterremmo $r\dot{\varphi} = \infty$. Ma ciò è impossibile poiche $r\dot{\varphi}$ è la velocità lineare di una particella che ruota attorno all'asse X, quindi abbiamo

$$\dot{\varphi} = \frac{eA}{mcr^2}. \tag{25.6}$$

Consideriamo ora l'equazione di moto della particella

$$m\boldsymbol{a} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}]\right), \tag{25.7}$$

dove $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione. Proiettando $\boldsymbol{a}$ sull'asse X e sulla direzione del raggio r otteniamo rispettivamente $ma_x = m\ddot{x}$ e ma_r. L'accelerazione radiale in un sistema di coordinate cilindriche è $a_r = \ddot{r} - \omega^2 r$ (cfr. vol. I, § 46). Introduciamo anche il potenziale elettrico V e teniamo conto delle (25.3) e

(25.6). Allora dopo qualche trasformazione l'equazione (25.7) diventa

$$m\ddot{x} = -e\frac{\partial}{\partial x}\left(V + \frac{eA^2}{2mc^2r^2}\right), \quad m\ddot{r} = -e\frac{\partial}{\partial r}\left(V + \frac{eA^2}{2mc^2r^2}\right). \quad (25.8)$$

Il problema concernente il moto di una particella si divide in *due problemi indipendenti,* e cioè il calcolo della coordinata angolare φ ed il calcolo delle coordinate x e r. Per risolvere il primo problema usiamo l'equazione (25.6) ed il secondo viene risolto con l'aiuto dell'equazione (25.8). Dal punto di vista formale il secondo problema è identico al problema del calcolo della traiettoria di una particella carica che si muove in un campo elettrostatico piano di potenziale

$$U = V + \frac{eA^2}{2mc^2r^2}. \quad (25.9)$$

In ottica il suo equivalente formale sarebbe il calcolo della propagazione di un raggio luminoso in un mezzo isotropo non omogeneo di indice di rifrazione

$$n = \sqrt{2m(W - eV) - \frac{e^2A^2}{c^2r^2}} = \sqrt{n_0^2 - \frac{e^2A^2}{c^2r^2}}, \quad (25.10)$$

dove $n_0 = \sqrt{2m(W - eV)}$ è « l'indice di rifrazione » in assenza di campo magnetico. Per trovare la forma reale della traiettoria della particella è necessario sovrapporre a questo raggio una rotazione definita dalla formula (25.6).

Teniamo ora conto della condizione che tutti i raggi siano parassiali. A questo scopo sviluppiamo $B_x(x, r)$ in serie di potenze di r. Data la simmetria assiale questo sviluppo può contenere soltanto termini di potenze pari di r. Arrestiamo lo sviluppo al termine di potenza zero; in quest'approssimazione il campo B_x non dipende da r. Portando B_x al di fuori del segno d'integrazione (25.5) ed eseguendo l'integrazione, otteniamo

$$A = -\frac{1}{2}B_xr^2 \quad (25.11)$$

e dopo sostituzione nella formula (25.6) abbiamo

$$\dot{\varphi} = -eB_x/2mc \quad (25.12)$$

da cui

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v_x}\frac{eB_x}{2mc}. \quad (25.13)$$

Nell'approssimazione parassiale anche la velocità v_x non dipende dalla distanza r dall'asse X ed è uguale alla velocità di una particella in moto lungo quest'asse. Perciò le derivate $d\varphi/dx$ hanno gli stessi valori per tutte le

particelle, indipendentemente dall'inclinazione delle loro traiettorie sull'asse X. Se l è la distanza del piano oggetto dal piano immagine, nell'approssimazione parassiale tutte le particelle ruotano, per questa lunghezza, attorno all'asse di simmetria del sistema, di uno stesso angolo uguale a

$$\varphi = -\frac{e}{2mc}\int_0^l \frac{B_x}{v_x}\,dx. \qquad (25.14)$$

Quindi, *rispetto alla formazione delle immagini, il sistema si comporta come se non ci fosse campo magnetico e quello elettrostatico fosse definito dal potenziale (25.9). Il campo magnetico fa ruotare tutta l'immagine attorno all'asse di simmetria del sistema di un piccolo angolo definito dalla formula (25.14).* Nelle approssimazioni superiori l'angolo di rotazione dipende dall'inclinazione della traiettoria sull'asse del sistema, il che implica l'apparizione di aberrazioni supplementari dovute all'esistenza del campo magnetico.

4. Notiamo ancora una particolarità del sistema: se il campo elettrico non esiste e quello magnetico è omogeneo, la particella descrive un'elica con una frequenza di ciclotrone $\omega = -eB/mc$ (cfr. il vol. III, § 86). Tuttavia la formula (25.12) dà per questo caso una velocità angolare uguale alla metà di ω. Questa contraddizione è facile da spiegare, se osserviamo che ω è la velocità angolare di rotazione della particella *attorno all'asse dell'elica,* mentre la formula (25.12) concerne la rotazione della particella *attorno a una delle generatrici di questa stessa elica.* Supponiamo, per esempio, che il campo magnetico sia perpendicolare al piano della figura 106 e che la particella ruoti lungo la circonferenza contenuta in questo piano. Come asse X si può prendere una retta qualsiasi diretta lungo il campo $\boldsymbol{B}$, di modo che si
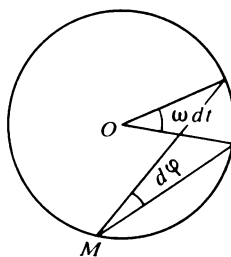
Fig. 106

può ammettere che la particella parta da un punto M di quest'asse, e dopo aver descritto la circonferenza, ritorni al punto di partenza. La sua rotazione è descritta dalla formula (25.12), mentre la rotazione attorno al centro O della circonferenza avviene alla frequenza di ciclotrone ω. Durante un tem-

po dt la particella ruota attorno ad O di un angolo ωdt ed attorno al punto M di un angolo $d\varphi = 1/2\omega dt$, da cui $\dot{\varphi} = 1/2\omega$.

5. Abbiamo spiegato la focalizzazione delle particelle nelle lenti elettriche in analogia con l'ottica. Utilizziamo questa stessa analogia per mettere in evidenza le forze che agiscono sulle particelle. La figura 107 dà una rappresentazione schematica di una lente costituita da tre cilindri metallici allineati dello stesso diametro. I cilindri estremi sono messi a terra ed il cilindro di mezzo è portato ad un potenziale positivo o negativo. Le lenti di questo tipo sono utilizzate nei tubi catodici ed in certi microscopi elettronici. Nella figura sono rappresentate le linee di forza elettriche con l'indicazione dei sensi delle forze agenti sulla particella.
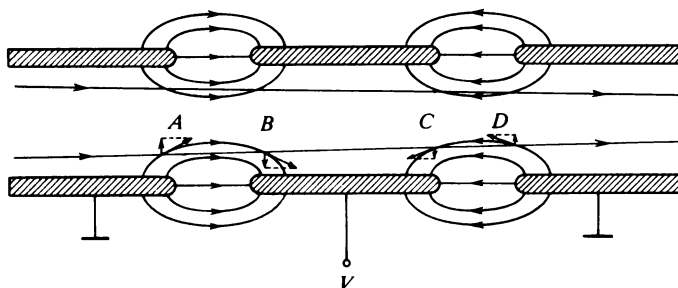
Fig. 107

Supponiamo che una particella penetri nella lente parallelamente al suo asse. Nella regione A la forza che agisce sulla particella ha una componente diretta dal basso in alto. Questa forza sposta la particella verso l'alto. Nella regione B la direzione della componente verticale cambia segno. Ma, visto che sotto l'azione del campo elettrostatico la velocità della particella cresce continuamente, per percorrere la regione B la particella impiega un tempo inferiore a quello necessario per percorrere la regione A. Perciò la velocità trasversale acquistata dalla particella nella regione A non può essere completamente compensata dalla velocità di direzione opposta che la particella acquista nella regione B. Quindi, nelle regioni A e B e dopo l'uscita da queste regioni la particella si sposta verso l'alto avvicinandosi all'asse della lente. Analogamente, nella regione C sulla particella agisce una forza che tende ad allontanarla dall'asse della lente e nella regione D essa è sottoposta ad una forza che l'avvicina all'asse. Ma siccome in queste regioni la velocità della particella diminuisce, essa passa nella regione D più tempo che nella regione C. Perciò durante il percorso di entrambe le regioni C e D la velocità verso l'alto della particella cresce.

Questi ragionamenti spiegano perché le particelle s'avvicinano all'asse della lente, tuttavia da essi non segue il fatto che tutte le particelle si raccolgono nello stesso punto dell'asse della lente. Per dimostrarlo occorrono calcoli quantitativi fondati sull'analogia con l'ottica.

Problemi

1. Calcolare la distanza focale di una lente ottica sottile il cui indice di rifrazione varia con continuità nello spazio.

Soluzione. Senza introdurre la condizione di lente sottile, consideriamo un mezzo avente simmetria di rivoluzione attorno all'asse X. L'equazione del raggio nel piano meridiano è della forma $r = r(x)$. Indichiamo con u l'angolo formato dalla tangente al raggio con l'asse X (fig. 108). Nell'approssimazione parassiale il quadrato di quest'angolo è una quantità trascurabile e la curvatura del raggio è determinata dall'espressione $1/R = -du/dx$. Il raggio di curvatura R viene definito positivo se il raggio rivolge la sua concavità verso l'asse ottico principale X e negativo nel caso contrario. Utilizziamo la formula (4.1). Nei limiti di precisione
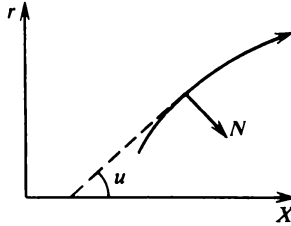
Fig. 108

dell'ottica parassiale $\partial r/\partial N = -\cos u \approx -1$, $\partial x/\partial N = \sin u \approx u$, e quindi si ha

$$\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{\partial n}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial N} + \frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial N} \approx -\frac{\partial n}{\partial r} + u\frac{\partial n}{\partial x}.$$

Visto che in tutti i punti del raggio $r = r(x)$, la funzione $n(x, r)$ può essere considerata come una funzione composta di x, cioè $n(x) = n[x, r(x)]$. La sua derivata in x è

$$\frac{dn}{dx} = \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x} + u\frac{\partial n}{\partial r},$$

cioè differisce dalla derivata parziale $\partial n/\partial x$ per un infinitesimo del primo ordine in u. Perciò la sostituzione di $\partial n/\partial x$ con dn/dx nell'espressione precedente introduce un errore del secondo ordine che è trascurabile. Eseguendo questa sostituzione ed utilizzando la formula (4.1), otteniamo

$$-\frac{1}{R} = \frac{du}{dx} = -\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial r} = -u\frac{dn}{dx},$$

ossia

$$\frac{d}{dx}(nu) = \frac{\partial n}{\partial r}. \tag{25.15}$$

Sviluppiamo $n = n(x, r)$ in serie di potenze di r ed arrestiamo lo sviluppo al termine in r^2. Il termine di primo grado deve mancare in conseguenza della simmetria assiale del sistema. Si ha quindi

$$n = n_0(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right)_0 r^2,$$

e di qui

$$\frac{\partial n}{\partial r} = r\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right)_0.$$

L'indice zero significa che la grandezza con questo indice è calcolata per $r = 0$, cioè sull'asse ottico principale del sistema. L'equazione (25.15) si riduce quindi a

$$\frac{d}{dx}(nu) = r\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right)_0. \qquad (25.16)$$

Supponiamo ora che la lente sia sottile. Siano P e P' punti coniugati del suo asse (fig. 109). I segmenti di raggio che uniscono questi punti e che sono esterni rispetto alla lente sono rettilinei. Integriamo l'equazione (25.16) rispetto a x da $-\infty$ a $+\infty$. In realtà ciò vuol dire un'integrazione sul segmento AB, poiché all'infuori di questo segmento $\partial^2 n/\partial r^2 = 0$. All'interno di una lente sottile si può porre che il raggio r sia costante e portarlo fuori dal se-
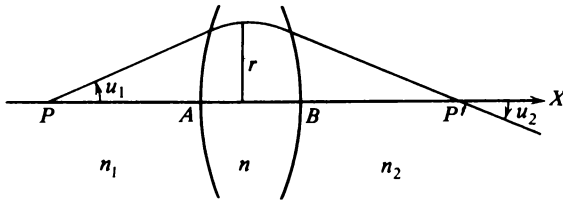
Fig. 109

gno d'integrazione

$$n_2 u_2 - n_1 u_1 = r \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right) dx,$$

dove n_1 è l'indice di rifrazione dello spazio oggetto e n_2 quello dello spazio immagine. Come prima, indichiamo con ξ e ξ' le distanze del punto oggetto P e del punto immagine P' dal centro della lente. Tenendo conto della regola dei segni $u_1 = -r/\xi$, $u_2 = -r/\xi'$ e l'equazione precedente diventa

$$\frac{f}{\xi} + \frac{f'}{\xi'} = -1, \qquad (25.17)$$

dove

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{n_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right)_0 dx, \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{n_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right)_0 dx. \qquad (25.18)$$

2. Calcolare le distanze focali di una lente elettrostatica sottile (per esempio, della « lente semplice » rappresentata nella fig. 110).

Soluzione. Definiamo il potenziale V del campo con la formula $1/2mv^2 = |e|\,V$; il potenziale così definito è una quantità sostanzialmente positiva. Nelle formule (25.18) effettuiamo

la sostituzione $n \to \sqrt{V}$, tenendo conto del fatto che sull'asse del sistema $\dfrac{\partial V}{\partial r} = 0$; otteniamo

$$\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right)_0 \to \frac{\partial^2 \sqrt{V}}{\partial r^2} = \frac{1}{2\sqrt{V}}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}.$$

Se mancano le cariche libere, $\nabla^2 V = 0$. Sull'asse $\partial^2 V/\partial y^2 = \partial^2 V/\partial z^2 = \partial^2 V/\partial r^2$, di modo che $\nabla^2 V = (\partial^2 V/\partial x^2) + 2(\partial^2 V/\partial r^2) = 0$. Quindi, dalla (25.18) troviamo

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{4\sqrt{V_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx. \tag{25.19}$$

Integrando per parti e tenendo conto del fatto che ai limiti dell'integrale $\partial V/\partial x = 0$, otteniamo

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{8\sqrt{V_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} V^{-3/2} E_x^2 \, dx, \quad \frac{1}{f'} = -\frac{1}{8\sqrt{V_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} V^{-3/2} E_x^2 \, dx, \tag{25.20}$$

dove V_1 è il potenziale dello spazio oggetto, V_2 quello dello spazio immagine ed $E_x = -\partial V/\partial x$ l'intensità di campo elettrico sull'asse. Se $V_1 = V_2$, si ha $f = -f'$.

Essendo $V > 0$, per le lenti elettrostatiche sottili $f > 0, f' < 0$. Queste lenti sono sempre convergenti, mentre le lenti ottiche, persino quelle sottili, possono essere sia convergenti che divergenti. Questa differenza è dovuta al fatto che la funzione $n(r)$ può essere qualsiasi, mentre il potenziale $V(r)$ in assenza di cariche libere deve soddisfare l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$. Le lenti elettrostatiche spesse possono essere sia convergenti sia divergenti. È facile convincersene considerando un sistema costituito da due lenti elettrostatiche sottili. Le formule (12.3) mostrano che questo sistema sarà convergente se l'intervallo ottico Δ è negativo, e divergente se Δ è positivo.
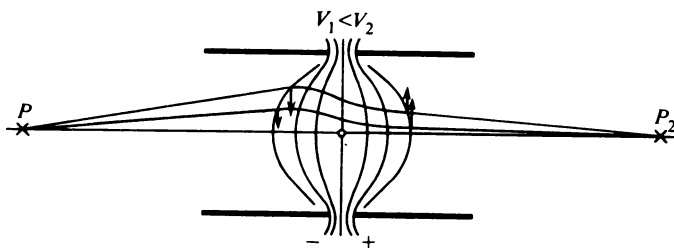
Fig. 110

3. Supponendo che $n_0 \gg \left|\dfrac{eA}{cr}\right|$, calcolare la distanza focale di una lente magnetica sottile.

Soluzione. Sviluppando la (25.10) in serie di potenze e trascurando i termini di ordine superiore, otteniamo

$$n = n_0 - \frac{e^2 A^2}{2 n_0 c^2 r^2} = n_0 - \frac{e^2 r^2}{8 n_0 c^2} B_x^2,$$

da cui

$$\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} = -\frac{e^2}{4n_0c^2}B_x^2.$$

Di conseguenza, si ha

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = \frac{e^2}{4n_0^2c^2}\int_{-\infty}^{+\infty} B_x^2\,dx = \frac{e^2}{8mc^2W}\int_{-\infty}^{+\infty} B_x^2\,dx. \tag{25.21}$$

Le lenti magnetiche sottili, come le lenti elettrostatiche sottili, sono sempre convergenti.

4. Calcolare la distanza focale di una spira circolare di raggio a di filo sottile percorso dalla corrente I.

Risposta. Nel sistema gaussiano d'unità di misura

$$\frac{1}{f} = \frac{e^2\pi^2a^4I^2}{8mc^4W}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{3\pi^3e^2}{16mc^4W}\frac{I^2}{a}. \tag{25.22}$$

Esprimendo l'energia W in elettronvolt, poniamo $W = |e|\,V_0$; questo ci consente di passare alle unità pratiche (centimetro, volt, ampere). Allora otteniamo per gli elettroni

$$f = -f' = 98\,\frac{V_0a}{I^2}. \tag{25.23}$$

Per una bobina piana di N spire

$$f = -f' = 98\,\frac{V_0a}{N^2I^2}. \tag{25.24}$$

5. Dimostrare che la formula (25.18), nel caso limite di una lente sottile a bordi ben delimitati, diventa la formula (10.9). Si pone che gli indici di rifrazione n_1 e n_2 ai due lati della lente siano uguali.

Suggerimento. Poiché l'indice di rifrazione n varia soltanto in strati infinitamente sottili adiacenti ad ogni frontiera della lente, su ogni superficie sferica tracciata all'interno di questi strati parallelamente alla più vicina superficie della lente, la funzione n è costante. Utilizzando questo fatto, la derivazione rispetto a r può essere sostituita con una derivazione rispetto a x e poi si può calcolare l'integrale nelle formule (25.18).

III. INTERFERENZA DELLA LUCE

§ 26. *Nozioni generali sull'interferenza*

1. I fenomeni d'*interferenza* e di *diffrazione* della luce rivelano le sue *proprietà ondulatorie*. Dopo la loro scoperta l'interesse per questi fenomeni risiedeva soltanto nel fatto che permettevano una dimostrazione considerata definitiva della *natura ondulatoria della luce*. Questo punto di vista risultò insufficiente. Nel XX secolo sono state scoperte le *proprietà corpuscolari della luce* e poi le *proprietà ondulatorie delle particelle ordinarie*: elettroni, protoni, neutroni, atomi, molecole, ecc. Malgrado il carattere apparentemente paradossale di questo fenomeno, la natura della luce e quella della materia manifesta una *dualità onda-corpuscolo*. La scoperta di questa dualità ha imposto una revisione delle concezioni fisiche che ha portato all'elaborazione della *meccanica quantistica*. L'importanza dei fenomeni d'interferenza e di diffrazione della luce non ne fu però influenzata e questi fenomeni oggi hanno numerose applicazioni pratiche, in particolare nella metrologia e nella spettroscopia.

2. Con l'aiuto di differenti dispositivi che consentono di realizzare riflessioni o rifrazioni della luce si possono sovrapporre due o più fasci luminosi. Se è verificato il principio di sovrapposizione (e ciò è supposto dappertutto in questo capitolo), ogni fascio passa nella regione di sovrapposizione come se non esistesse nessun altro fascio. Sia $\boldsymbol{E}_1$ l'intensità del campo elettrico creata dal primo fascio in un punto arbitrario A della regione di sovrapposizione, ed $\boldsymbol{E}_2$ l'intensità dovuta al secondo fascio. Secondo il principio di sovrapposizione l'intensità del campo risultante creata nello stesso punto A da entrambi i fasci è uguale alla somma vettoriale $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$. Tutte le onde scalari o vettoriali, quale che sia la loro natura fisica, si comportano alla stessa maniera, a condizione di soddisfare il *principio di sovrapposizione*. Ma siccome la frequenza delle onde luminose è di un ordine di grandezza molto diversa da quella delle onde sonore, ad esempio, le possibilità dei ricevitori di luce sono limitate.

Tutti i ricevitori di luce manifestano una certa *inerzia* che può essere caratterizzata dal *tempo di risposta* τ del ricevitore. Per esempio, per l'occhio $\tau \approx 0,1$ s; questa è la durata della persistenza delle sensazioni luminose, in

altre parole questo è il tempo durante il quale l'occhio segnala la presenza di luce, anche quando la radiazione ha già cessato di penetrare in esso. Per esempio, l'occhio non rivela i rapidi scintillii della luce se essi si susseguono in intervalli di tempo piccoli rispetto a τ (cinema, televisione). Le sostanze fotosensibili hanno un τ (tempo d'esposizione) dell'ordine di 10^{-2}-10^{-4} s. Esistono ricevitori per i quali il tempo di risposta può essere molto più piccolo. Nelle cellule di Kerr questo tempo può essere ridotto fino a 10^{-8}-10^{-9} s. I più rapidi ricevitori fotoelettrici moderni hanno un tempo di risposta dell'ordine di 10^{-10} s, ma esso può essere diminuito ancora.

Tuttavia persino questi tempi di risposta sono molto grandi in confronto con il periodo delle vibrazioni ottiche. Il periodo medio T delle vibrazioni del campo elettromagnetico della gamma visibile è all'incirca di 10^{-15} s. Perciò nessun ricevitore di luce permette di misurare il valore istantaneo dell'intensità di campo elettrico o magnetico di un'onda luminosa: per farlo il tempo di risposta del ricevitore dovrebbe essere piccolo in confronto con il periodo T delle vibrazioni luminose. Tutti i ricevitori noti possono misurare soltanto grandezze che sono *quadratiche nel campo* e che sono medie su intervalli di tempo superiori ai tempi di risposta del ricevitore. In questo caso si tratta di grandezze energetiche e fotometriche: flusso energetico e flusso luminoso, brillanza, illuminamento, ecc.

Nei fenomeni d'interferenza, di diffrazione, ecc. non interessano i valori assoluti, ma soltanto i *valori relativi* di queste grandezze. Per esempio, ci può interessare la ripartizione relativa dell'illuminamento di uno schermo che riceve la luce emessa da una sorgente. In questo caso è inutile indicare esattamente di quale grandezza energetica o fotometrica si tratta in ogni caso concreto, poiché i risultati dello studio saranno espressi in termini di valore medio sul tempo di una grandezza quadratica nell'intensità di campo elettrico. Questa grandezza mal definita è generalmente detta *intensità luminosa* o *intensità delle vibrazioni*. Nel seguito la indicheremo con I; questo simbolo rappresenta il valore medio nel tempo del quadrato dell'intensità di campo elettrico, cioè $I = \overline{E^2}$.

3. Calcoliamo ora l'intensità luminosa in un punto dello spazio dove si sovrappongono due fasci luminosi (campo d'interferenza). Elevando al quadrato l'uguaglianza $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ e prendendo la media sul tempo, otteniamo

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \tag{26.1}$$

dove I_1 è l'intensità luminosa del primo fascio ed I_2 quella del secondo fascio. Il terzo termine

$$I_{12} = 2\overline{(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2)} \tag{26.2}$$

che tiene conto dell'interazione dei fasci, si chiama *termine interferenziale*. Se prendiamo sorgenti di luce indipendenti, per esempio due lampade elettriche, l'esperienza quotidiana mostra che $I = I_1 + I_2$, cioè l'intensità risul-

tante è uguale alla somma delle intensità dei fasci che si sovrappongono; in questo caso il termine interferenziale è nullo. Si dice allora che i fasci *non sono correlati* o meglio non sono *coerenti* tra loro. Se i fasci che si sovrappongono non sono indipendenti, per esempio uno dei fasci risulta dalla riflessione dell'altro in uno specchio, in alcuni casi il termine interferenziale I_{12} non è nullo, cioè $I \neq I_1 + I_2$. In certi punti dello spazio l'intensità risultante I è più grande della somma $I_1 + I_2$, ed in altri punti essa è più piccola. Questo fenomeno si dice *interferenza delle onde* o *interferenza delle vibrazioni*. Si dice che le sorgenti luminose ed i fasci corrispondenti che interferiscono sono *correlate* o *coerenti* tra loro, cioè i processi vibratori ed ondulatori sono legati tra loro e si producono simultaneamente. Si dice anche che fasci coerenti *interferiscono* tra loro e quelli non coerenti *non interferiscono*.

Tutto quanto detto per due fasci è valido anche per la sovrapposizione di più fasci. L'interferenza di due fasci si chiama *interferenza a due onde* e quella a più fasci si dice *interferenza a onde multiple*.

4. Consideriamo dapprima il caso ideale di due onde rigorosamente *monocromatiche* della stessa frequenza. Un'*onda monocromatica* è un'onda perfettamente sinusoidale la cui frequenza ω, ampiezza a e fase iniziale φ non variano col passar del tempo. L'ampiezza a e la fase φ possono avere valori differenti in differenti punti dello spazio, ma la frequenza del processo vibratorio è la stessa *in tutti i punti dello spazio*. La vibrazione monocromatica esistente in ogni punto dello spazio *dura indefinitamente* e non ha né inizio né fine. Perciò è impossibile realizzare in pratica vibrazioni ed onde rigorosamente monocromatiche. Queste idealizzazioni hanno però una grandissima importanza nella teoria delle vibrazioni, come abbiamo potuto constatare nel capitolo X del III volume ed avremo occasione di vedere in seguito.

Supponiamo dapprima che in un punto dato dello spazio i vettori E_1 ed E_2 siano paralleli o antiparalleli. Allora si può astrarre dalla natura vettoriale delle vibrazioni ed assimilarle a quantità scalari. Rappresentiamo queste vibrazioni in forma reale

$$E_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \qquad E_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \tag{26.3}$$

dove a_1 ed a_2, φ_1 e φ_2 sono le ampiezze e le fasi iniziali delle due vibrazioni. Introducendo le ampiezze complesse $A_1 = a_1 e^{i\varphi_1}$ ed $A_2 = a_2 e^{i\varphi_2}$, le stesse vibrazioni possono essere rappresentate come segue:

$$E_1 = A_1 e^{i\omega t}, \qquad E_2 = A_2 e^{i\omega t}. \tag{26.4}$$

La vibrazione risultante è

$$E = E_1 + E_2 = (A_1 + A_2) e^{i\omega t}.$$

Questa è una vibrazione monocromatica della stessa frequenza ω ed ampiezza complessa $A = A_1 + A_2$. Per determinare l'ampiezza reale a e la fa-

se iniziale φ della vibrazione risultante, scriviamo l'ultima espressione come segue:

$$ae^{i\varphi} = a_1 e^{i\varphi_1} + a_2 e^{i\varphi_2}.$$

Moltiplicandola per le quantità complesse coniugate, otteniamo

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (26.5)$$

e separando le parti reale ed immaginaria abbiamo

$$a \cos \varphi = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2,$$
$$a \sin \varphi = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2,$$

da cui

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}. \qquad (26.6)$$

Nella figura 111 è riportato il *diagramma vettoriale* d'addizione delle vibrazioni sinusoidali considerate, mediante il quale è facile ottenere i risultati (26.5) e (26.6).
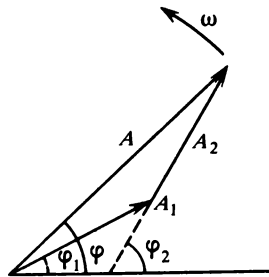
Fig. 111

Introducendo le intensità delle vibrazioni, il risultato (26.5) può essere scritto nella forma

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (26.7)$$

Se le vibrazioni sono in fase, cioè le fasi φ_1 e φ_2 sono uguali o differiscono l'una dall'altra di un multiplo pari di π, l'intensità I è massima ed uguale a

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2. \qquad (26.8)$$

Se le vibrazioni sono in opposizione di fase, cioè le fasi φ_1 e φ_2 differiscono di un multiplo dispari di π, l'intensità risultante è minima

$$I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2. \qquad (26.9)$$

Se le vibrazioni sono in quadratura, cioè la differenza di fase è uguale a

$m\pi \pm \pi/2$ (m è un numero intero), si ha $I = I_1 + I_2$. In questo caso l'intensità della vibrazione risultante è uguale alla somma delle intensità addizionate.

5. È facile scrivere il termine interferenziale anche per il caso generale in cui vengono sommate vibrazioni *vettoriali*, tra le cui componenti cartesiane possono esistere differenze di fase arbitrarie. Lasciamo al lettore la cura di fare questi calcoli ed osserviamo che Fresnel ed Arago hanno scoperto sperimentalmente che *due fasci luminosi che si propagano nello stesso senso non interferiscono mai se sono linearmente polarizzati in piani reciprocamente perpendicolari.* Fresnel ne deduce che *le onde luminose sono costituite da vibrazioni trasversali.*

Dimostriamolo senza fare alcun'ipotesi sulla natura fisica del « vettore di luce » $\boldsymbol{E}$ che compie vibrazioni nell'onda luminosa. Supponiamo che lungo l'asse Z si propaghino due onde i cui piani di vibrazioni siano reciprocamente perpendicolari. In una delle onde le vibrazioni hanno luogo nel piano coordinato XZ e nell'altra nel piano YZ. Rappresentiamo i vettori di queste onde nella forma $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{1x} + \boldsymbol{E}_{1z}$ ed $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{2y} + \boldsymbol{E}_{2z}$, dove i simboli delle coordinate indicano a quale asse coordinato è parallelo il corrispondente vettore. Moltiplicando scalarmente membro a membro e prendendo la media temporale, troviamo il termine interferenziale

$$I_{12} = 2\overline{(\boldsymbol{E}_{1z}\boldsymbol{E}_{2z})} = 2a_{1z}a_{2z}\cos(\varphi_{2z} - \varphi_{1z}),$$

dove a_{1z}, a_{2z} sono le ampiezze e φ_{1z}, φ_{2z} le fasi delle corrispondenti vibrazioni longitudinali. Gli esperimenti di Fresnel ed Arago hanno mostrato che il termine interferenziale è nullo quali che siano le fasi delle vibrazioni. Ne segue che almeno una delle ampiezze, per esempio a_{1z}, deve essere nulla, cioè la prima onda è trasversale. Ma in questo caso anche la seconda onda deve essere trasversale poiché non ci sono ragioni di preferire la prima onda e non la seconda.

6. Ammettiamo ora che si sovrappongano due onde piane

$$E_1 = a_1\cos(\omega t - \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r} + \delta_1), \qquad E_2 = a_2\cos(\omega t - \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r} + \delta_2). \tag{26.10}$$

Supponendo che i vettori $\boldsymbol{E}_1$ ed $\boldsymbol{E}_2$ siano paralleli o antiparalleli, si può non tener conto del carattere vettoriale delle vibrazioni. Confrontando queste espressioni con la (26.3), vediamo che nel caso considerato si ha

$$\varphi_2 - \varphi_1 \doteq \boldsymbol{K}\boldsymbol{r} + (\delta_2 - \delta_1), \tag{26.11}$$

in cui è stato introdotto il nuovo vettore $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$. Questo vettore è parallelo alla bisettrice dell'angolo complementare dell'angolo α formato dai vettori d'onda $\boldsymbol{k}_1$ e $\boldsymbol{k}_2$ (fig. 112). Le superfici di uguale differenza di fase $\varphi_2 - \varphi_1 =$ costante sono piani paralleli tra loro e perpendicolari al vettore $\boldsymbol{K}$. Nella fig. 112 le tracce di questi piani sono rappresentati con rette tratteggiate. Su ciascuno di questi piani l'intensità della vibrazione risultante è dunque una costante. Quest'intensità è massima se la differenza di fase

$\varphi_2 - \varphi_1$ è uguale ad un multiplo pari di π, ed essa è minima se $\varphi_2 - \varphi_1$ è uguale ad un multiplo dispari di π. In particolare, se vengono sommate onde di uguale intensità I, l'intensità massima risultante è uguale a $4I$ e quella minima è nulla. La distanza Δx tra due piani vicini su cui l'intensità è massima o minima viene dedotta dalla condizione $K\Delta x = 2\pi$. Essendo le lunghezze di entrambi i vettori d'onda $\boldsymbol{k}_1$ e $\boldsymbol{k}_2$ uguali a $k = 2\pi/\lambda$, si ha $K = 2k \sin(\alpha/2)$, e quindi

$$\Delta x = \frac{2\pi}{K} = \frac{\pi}{k \sin(\alpha/2)} = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)}. \tag{26.12}$$

Per piccoli angoli abbiamo

$$\Delta x \approx \lambda/\alpha. \tag{26.13}$$
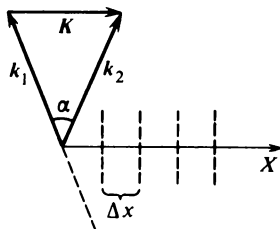
Fig. 112

Se mettiamo uno schermo piano, esso taglia i piani di uguale intensità lungo rette parallele; sullo schermo si vedono apparire « frange d'interferenza » alternativamente chiare e scure. La distanza tra i centri di due frange chiare o scure consecutive si chiama *interfrangia*. Se il piano dello schermo è parallelo al piano $(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)$ contenente i vettori d'onda $\boldsymbol{k}_1$ e $\boldsymbol{k}_2$, l'interfrangia è uguale a Δx, cioè è definita dall'espressione (26.12). Si ottiene lo stesso risultato se lo schermo è disposto in un piano perpendicolare e perpendicolarmente alla bisettrice dell'angolo tra i vettori d'onda $\boldsymbol{k}_1$ e $\boldsymbol{k}_2$. Se, invece, lasciando lo schermo perpendicolare al piano $(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)$, lo ruotiamo di un angolo φ, l'interfrangia diventa uguale a $\Delta_\varphi x = \Delta x / \cos\varphi$.

7. Studiamo ora l'interferenza prodotta dalla sovrapposizione di *onde monocromatiche sferiche* emesse da due sorgenti puntiformi S_1 e S_2 (fig. 113). In questo caso le ampiezze a_1 e a_2 delle vibrazioni che si sovrappongono sono inversamente proporzionali alle distanze r_1 e r_2 del punto d'osservazione dalle sorgenti S_1 e S_2. Perciò l'intensità luminosa varia lungo ogni frangia d'interferenza; ma siccome questa variazione è lenta, si può non tenerne conto. L'intensità risultante dipende soprattutto dalla differenza di fase delle vibrazioni componenti. Le superficie di uguale differenza di fase $r_1 - r_2 =$ costante sono iperboloidi di rivoluzione a due falde i

cui fuochi si trovano in S_1 e S_2. Su uno schermo, perpendicolare alla retta che congiunge le sorgenti S_1 e S_2, si osservano frange d'interferenza nella forma di anelli concentrici con il centro nel punto d'intersezione dello schermo con la retta S_1S_2. Se, invece, lo schermo è parallelo alla retta S_1S_2 le frange d'interferenza sono iperboli di fuochi S_1 e S_2; nella parte centrale della zona di osservazione si vedono frange praticamente rettilinee, parallele ed equidistanti, alternativamente chiare e scure.

Se le fasi delle vibrazioni emesse dalle due sorgenti luminose sono uguali la differenza di fase delle vibrazioni componenti è

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = (2\pi/\lambda)(r_2 - r_1).$$

Quando $\Delta\varphi = 2m\pi$ (m è un numero intero positivo o negativo) si ottiene l'intensità massima della vibrazione risultante (frangia d'interferenza chiara). Se, invece, $\Delta\varphi = 2\pi(m + 1/2)$, la frangia d'interferenza è scura. Le
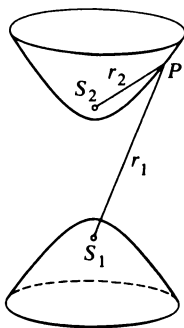
Fig. 113

condizioni di massimo e di minimo possono essere scritte nella forma

$$\Delta r \equiv r_2 - r_1 = \begin{cases} m\lambda & \text{(frangia chiara),} \\ (m + 1/2)\lambda & \text{(frangia scura).} \end{cases} \tag{26.14}$$

La quantità $r_2 - r_1$ si chiama *differenza di cammino* dei raggi che interferiscono. Se i raggi che interferiscono attraversano mezzi ad indice di rifrazione differenti la quantità $r_2 - r_1$ deve essere sostituita con la *differenza di cammino ottico*

$$\Delta = \int n_2 dl - \int n_1 dl.$$

Alle frange d'interferenza chiare corrisponde una differenza di cammino ottico che è un multiplo intero della lunghezza d'onda e per quelle scure un numero semintero di lunghezze d'onda (nel vuoto). Il numero intero m si dice *ordine d'interferenza*. L'ordine d'interferenza è la differenza di cammino ottico tra i raggi che interferiscono, espressa in lunghezze d'onda (nel vuoto).

8. I risultati principali stabiliti sopra si possono anche ottenere considerando il seguente semplice esempio. Siano S_1 e S_2 sorgenti monocromatiche puntiformi, situate l'una vicino all'altra (fig. 114). Per aumentare l'intensità delle frange d'interferenza si possono sostituire le sorgenti puntiformi con due fenditure strette intensamente illuminate. Il piano dello schermo è supposto parallelo al piano contenente le sorgenti lineari S_1 e S_2. Siano CO la perpendicolare allo schermo, abbassata dal punto medio della distanza S_1S_2, D la lunghezza di questa perpendicolare, d la distanza tra le sorgenti S_1 e S_2. Si suppone che la distanza d, le lunghezze delle sorgenti e le dimensioni lineari dello schermo siano piccole in confronto con la distanza D. In questo caso le frange d'interferenza sullo schermo sono rettilinee e perpendicolari alla retta congiungente le sorgenti S_1 e S_2. Fissiamo l'origine delle
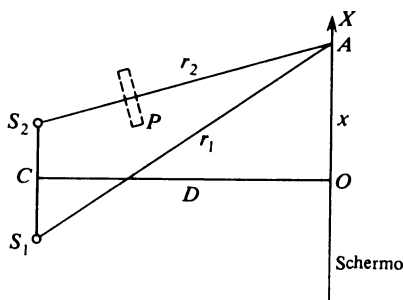
Fig. 114

coordinate nel punto O sullo schermo ed orientiamo l'asse X parallelamente alla retta S_1S_2. Se x è l'ascissa del punto d'osservazione A si avrà

$$r_1^2 = D^2 + (x + d/2)^2, \qquad r_2^2 = D^2 + (x - d/2)^2,$$

di modo che $r_1^2 - r_2^2 = 2xd$, e quindi $r_1 - r_2 = 2xd/(r_1 + r_2)$. Essendo $x \ll D$ si può sostituire il denominatore $r_1 + r_2$ con $2D$ senza commettere un errore notevole. Si ottiene allora

$$r_1 - r_2 = \frac{xd}{D} = \alpha x \,^{1)}, \tag{26.15}$$

dove $\alpha \approx d/D$ è l'angolo di convergenza dei raggi, cioè l'angolo sotto il quale dal punto O (o, nell'approssimazione considerata, da un punto qualsiasi dello schermo) si vede la distanza d tra le sorgenti luminose S_1 e S_2. L'intensità luminosa è calcolata mediante le formule (26.7) e (26.11). Se le

---

[1] Se si trascurano i termini di terzo grado in d si ha $r_1 - r_2 = xd/\sqrt{D^2 + x^2}$. Trascurando soltanto i termini di quinto grado in x/D, otteniamo

$$r_1 - r_2 = \frac{xd}{D}\left(1 - \frac{x^2}{2D^2}\right) \approx \alpha x\left(1 - \frac{x^2}{2D^2}\right). \tag{26.15a}$$

sorgenti S_1 e S_2 sono identiche e sincrone l'applicazione di queste formule dà

$$I = 2I_1\left(1 + \cos\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}\right). \tag{26.16}$$

L'intensità I varia periodicamente lungo l'asse X da zero al valore massimo $I_{max} = 4I_1$. Il passo della variazione spaziale dell'intensità $\Delta x = \lambda/\alpha$ è l'interfrangia.

Se sul cammino di uno dei raggi, per esempio S_2A, viene interposta una lastra trasparente a facce piane e parallele P di spessore l e di indice di rifrazione n, la lunghezza ottica di questo raggio aumenta di $(n - 1)l$, e la differenza di cammino tra i raggi S_1A e S_2A diminuisce della stessa quantità. Il valore precedente della differenza di cammino si otterrà per un altro punto A' distante da S_1 e S_2 di r_1' e r_2'. La posizione del punto A' si ottiene dalla seguente condizione:

$$r_1' - [r_2' + (n - 1)l] = r_1 - r_2 \quad \text{o} \quad (r_1' - r_2') = (r_1 - r_2) + (n - 1)l.$$

Ciò vuol dire che abbiamo ottenuto uno spostamento di tutto l'insieme delle frange d'interferenza di $N = (n - 1)l/\Delta x$ frange d'interferenza verso il lato dal quale è stata introdotta la lastra P. Questo è il principio dei metodi interferenziali di misura delle piccole variazioni di indice di rifrazione, che sono molto precisi. Per queste misure deve essere utilizzata luce bianca (cfr. il § 30), poiché in luce monocromatica tutte le frange d'interferenza sono identiche ed è difficile misurare il loro spostamento: a questo scopo si dovrebbe aumentare ininterrottamente lo spessore l della lastra da zero fino ad un valore dato.

9. L'esistenza nel campo d'onda di massimi e di minimi d'intensità luminosa dovuti all'interferenza non contraddice il principio di conservazione dell'energia. Discutiamo questa questione per il caso appena studiato di due sorgenti luminose monocromatiche identiche ed in fase S_1 e S_2.

Il luogo geometrico dei massimi d'intensità è costituito dalle iperboli $r_1 - r_2 = m\lambda$, quello dei minimi dalle iperboli $r_1 - r_2 = (m + 1/2)\lambda$. Il valore massimo che può assumere la differenza $r_1 - r_2$ è uguale alla distanza d tra le sorgenti luminose ed il massimo valore che può prendere m è il numero intero contenuto nel valore del rapporto d/λ. Se $d \gg \lambda$ il numero di frange d'interferenza nel campo d'onda è molto grande. In questo caso l'interferenza implica soltanto una *ridistribuzione spaziale* dell'energia irradiata, il che porta ad un aumento di densità d'energia in certe regioni dello spazio (massimi) ed alla diminuzione in altre (minimi), mentre l'energia totale contenuta nello spazio resta costante.

Il flusso luminoso totale dell'energia irradiante attraverso una superficie chiusa qualsiasi che circonda le sorgenti S_1 e S_2 è uguale alla somma dei flussi, attraverso la stessa superficie, emessi da ciascuna sorgente in assenza dell'altra. Questa uguaglianza *non è rigorosa ma soltanto approssimata* ed

in media è verificata in modo tanto più preciso quanto più grande è il rapporto d/λ. Se $d < \lambda$ nel campo d'onda non esistono linee d'intensità nulla e se, invece, $d \ll \lambda$ in tutti i punti dello spazio le vibrazioni luminose le cui fasi sono praticamente le stesse si sommano. In questo caso l'intensità della vibrazione risultante e con essa anche il flusso della radiazione risultante emesso da entrambe le sorgenti luminose è quattro volte più grande delle corrispondenti grandezze per una delle sorgenti in assenza dell'altra. Quindi se la distanza d tra le sorgenti S_1 e S_2 è più piccola della lunghezza d'onda λ il flusso dell'energia irradiata attraverso una superficie chiusa che circonda queste sorgenti *è più grande della somma dei flussi* emessi singolarmente dalle stesse sorgenti.

Il principio di conservazione dell'energia non richiede l'uguaglianza di queste grandezze. Effettivamente le sorgenti emettono più energia quando irraggiano insieme, contrariamente al caso in cui esse siano situate lontano l'una dall'altra. Ma questo aumento del flusso di radiazione non è dovuto ad una violazione del principio di conservazione dell'energia, ma avviene *a spese del lavoro fornito da un generatore* che deve mantenere costanti le ampiezze di vibrazione nelle sorgenti. Se le vibrazioni nelle sorgenti sono libere l'aumento della radiazione implica semplicemente un più rapido smorzamento di queste vibrazioni.

Il caso considerato è difficile da realizzare nella gamma ottica dello spettro a causa della piccolezza delle lunghezze d'onda, ma nella gamma delle onde radio questo non è soltanto possibile, ma è praticamente utilizzato per produrre *irraggiamenti direzionali* e *per aumentare la potenza irradiata*. È certamente possibile il caso in cui l'azione congiunta di due sorgenti implica una *diminuzione* e non una crescita dell'irradiamento totale. Per esempio, si osserva una diminuzione nel caso in cui le vibrazioni prodotte dalle due sorgenti sono in opposizione di fase.

10. Onde rigorosamente monocromatiche di uguale frequenza, emesse da due sorgenti puntiformi distinte, *interferiscono sempre*, cioè sono coerenti. Il sistema di frange d'interferenza prodotto da queste sorgenti è *stabile* nel senso che la distribuzione spaziale dell'intensità di un campo d'onda *resta invariata nel tempo*. L'interferenza di radiazioni emesse da *sorgenti luminose indipendenti*, ad esempio da lampade elettriche, non è direttamente osservabile dall'occhio. L'occhio non riesce ad osservare l'interferenza risultante dalla sovrapposizione di radiazioni corrispondenti alle righe spettrali indipendenti più strette emesse da gas rarefatti. Questo risultato negativo dimostra che le radiazioni emesse da sorgenti luminose reali non sono mai rigorosamente monocromatiche.

L'impossibilità dell'osservazione visuale delle frange d'interferenza emesse da sorgenti luminose indipendenti può essere spiegata con l'esempio di sorgenti idealizzate che emettono luce *quasi-monocromatica*. Questa luce è composta da vibrazioni della forma (26.3) le cui ampiezze a_1, a_2 e le fasi φ_1, φ_2 variano lentamente ed in modo disordinato nel tempo, cioè subi-

scono variazioni notevoli in tempi molto grandi rispetto al periodo T delle vibrazioni luminose. A titolo d'esempio consideriamo la radiazione emessa da un atomo « isolato ». Un atomo eccitato emette un *treno d'onda* durante un tempo τ_{rad} che è dell'ordine di 10^{-8} s (si veda il § 89). Tale treno d'onda contiene 10^6-10^8 onde. Durante il tempo τ_{rad} l'atomo emette una radiazione caratteristica e poi ritorna allo stato non eccitato. In conseguenza di processi diversi, per esempio a causa di collisioni con altri atomi o urti con elettroni, l'atomo può di nuovo ritornare allo stato eccitato e quindi emettere un nuovo treno d'onda. Dunque, si ottiene una successione di treni d'onda emessi dall'atomo ad intervalli di tempo corti ed irregolari. Supponiamo che su uno schermo cadano le radiazioni emesse da due atomi indipendenti. Per sovrapposizione dei due treni d'onda sullo schermo si forma un sistema di frange d'interferenza. Le posizioni delle frange dipendono dalla differenza di fase tra le vibrazioni dei due treni d'onda. Ma questa differenza di fase cambia rapidamente ed in modo disordinato da una coppia di treni d'onda alla successiva. I sistemi di frange si susseguono gli uni agli altri decine e centinaie di milioni di volte al secondo. Né l'occhio, né alcun altro ricevitore di luce possono registrare una successione tanto rapida di figure d'interferenza e possono soltanto percepire un illuminamento uniforme dello schermo.

Gli spostamenti del sistema di frange d'interferenza legati alla successione delle coppie di treni d'onda non si manifestano più quando le variazioni temporali delle fasi iniziali δ_1 e δ_2 dei treni d'onda sono *identiche*, benché irregolari. Infatti, se $\delta_2 - \delta_1 = 0$, secondo la (26.11), la differenza di fase delle vibrazioni componenti $\varphi_2 - \varphi_1$ contiene soltanto il termine ***Kr*** che varia *regolarmente* nello spazio. Per realizzare questo caso, è necessario decomporre la radiazione *emessa da una sola sorgente* in due o più fasci e farli arrivare su uno schermo seguendo *percorsi diversi*. Se si sovrappongono fasci ottenuti a partire *da uno stesso treno d'onda* le frange d'interferenza che si osservano conservano le loro posizioni e l'occhio vede una figura d'interferenza stabile. Descriveremo nel seguente paragrafo alcuni esperimenti che utilizzano questo principio.

11. È importante notare che, *in linea di principio, non è impossibile* produrre interferenze tra fasci emessi da due sorgenti luminose *indipendenti*. Tale eventualità dipende dal *livello tecnico dell'emissione e della ricezione delle radiazioni*. Fin dal 1947 G.S. Gorelik (1906-1957) propose di realizzare la *demodulazione*, applicando il principio dell'eterodina a luce visibile. Nella gamma delle radiazioni visibili si possono isolare doppietti o multipletti, cioè righe spettrali costituite da due o più righe spettrali semplici la cui differenza di frequenza $\nu_1 - \nu_2$ è dell'ordine di 10^9-10^{10} Hz. Secondo il progetto di Gorelik questa luce deve cadere sul catodo di un fotoelemento (ed ancor meglio di un fotomoltiplicatore). Se è giusta l'ipotesi secondo la quale la corrente fotoelettrica istantanea è proporzionale al quadrato dell'intensità di campo elettrico risultante, questa corrente può essere

rappresentata nella forma

$$\mathscr{I} = A(E_1 + E_2)^2 = A(E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2),$$

dove E_1 ed E_2 sono le intensità dei campi elettrici di frequenze ν_1 e ν_2 ed A è la costante dell'apparecchio. In quest'espressione il termine $2A(E_1E_2)$ contiene la componente corrispondente alla differenza delle frequenze $\nu_1 - \nu_2$. Alla frequenza $\nu_1 - \nu_2 \sim 10^{10}$ Hz corrisponde la lunghezza d'onda $\lambda \sim$ ~ 3 cm appartenente al dominio delle microonde radio. Quest'onda si può amplificare con procedimenti radiotecnici per renderla osservabile. In conseguenza di ciò i battimenti d'intensità che appaiono per sovrapposizione dei fasci emessi dalle due sorgenti luminose si trasformano in oscillazioni di corrente elettrica.

Per realizzare quest'esperimento, in linea di principio, non è importante che le onde di frequenze ν_1 e ν_2 siano emesse da una sola o da due sorgenti di luce indipendenti. La difficoltà di realizzazione dell'esperimento sta nel fatto che sul segnale utile di frequenza $\nu_1 - \nu_2$ si sovrappone il « rumore » la cui intensità è all'incirca 10^4 volte più grande di quella del segnale utile. Questa difficoltà è stata superata nel 1955 da Forrester e collaboratori. Essi usavano come sorgente luminosa la riga verde semplice del mercurio $\lambda = 546{,}1$ nm che ottenevano applicando un campo magnetico (effetto Zeeman). Come ricevitore usavano una cellula fotoelettrica a catodo in cesio-antimonio. Il risultato positivo ottenuto dimostra che anche se l'estrazione degli elettroni dal catodo presenta un ritardo rispetto all'istante dell'impatto dei fotoni, questo ritardo è notevolmente inferiore a 10^{-10} s.

Con l'invenzione dei laser la tecnica sperimentale dispone di sorgenti di luce monocromatiche che consentono di osservare senza difficoltà i massimi ed i minimi d'interferenza prodotti da due sorgenti indipendenti con l'aiuto di ricevitori convenienti (per esempio cellule fotoelettriche).

§ 27. *Esperimenti d'interferenza classici*

1. Esperimento di Young. Young produceva frange d'interferenza mediante il metodo da lui descritto nel 1807 in corsi pubblici. Un fascio di luce solare cade su uno schermo che presenta un piccolo buco o una stretta fenditura S (fig. 115). La luce diffratta emessa da S arriva su un secondo schermo munito di due buchi o due fenditure strette S_1 e S_2. In seguito ad una nuova diffrazione della luce, dalle fenditure S_1 e S_2 si ottengono due fasci divergenti con vertici in S_1 e S_2 che si ricoprono parzialmente. Data la loro origine comune, questi fasci sono coerenti. Sulla parte dello schermo dove i fasci si sovrappongono si osservano frange d'interferenza parallele (si veda il paragrafo precedente, punto 8). La distanza tra le fenditure S_1 e S_2 deve essere grande rispetto alla larghezza di ogni fenditura. Rayleigh ela-

borò un procedimento comodo di preparazione delle fenditure adatte per esperimenti d'interferenza. Due lastre di vetro vengono ricoperte con un sottile strato d'argento per renderle opache. Sullo strato d'argento di una delle lastre si traccia una linea e sull'altra due tracce parallele per mezzo di una lama di rasoio; si ottengono dunque fenditure strette.

Valutiamo mediante la formula (26.13) la larghezza Δx di una frangia d'interferenza. Supponiamo che la distanza d tra le fenditure S_1 e S_2 sia uguale a 1 mm e che la distanza D tra le fenditure e lo schermo sia uguale a 1 metro. Si ha allora $\alpha = d/D = 0{,}001$ rad. Per la luce rossa ($\lambda = 600$ nm) si ottiene $\Delta x = \lambda/\alpha = 6 \cdot 10^5$ nm $= 0{,}6$ mm. In luce blu la larghezza delle frange è all'incirca di 0,4 mm. Con questo procedimento Young per la prima volta misurò la lunghezza d'onda della luce, benché queste misure non potessero essere molto precise. Negli esperimenti di Young la luce diffratta
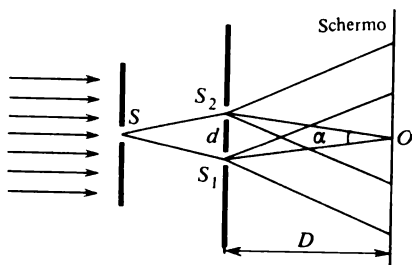
Fig. 115

si propaga dalle fenditure S_1 e S_2 in diverse direzioni in modo non uniforme. L'influenza di questa circostanza sarà discussa nel capitolo IV.

Ben prima di Young, nel 1665 un esperimento analogo fu realizzato da Grimaldi, ma con la seguente differenza: la luce solare cadeva direttamente sulle fenditure S_1 e S_2 e non esisteva la fenditura intermedia S. In conseguenza del grande diametro apparente del Sole (si veda il § 28, punto 7) Grimaldi non poteva ottenere frange d'interferenza.

Se come sorgenti sono utilizzati laser, che producono fasci praticamente paralleli, la fenditura S diventa inutile nell'esperimento di Young.

2. Specchi di Fresnel. Nel 1816 Fresnel realizzò il seguente esperimento d'interferenza. La luce emessa da una fenditura S fortemente illuminata cadeva su due specchi piani CD e CE inclinati l'uno rispetto all'altro di un angolo vicino a 180° (fig. 116). La fenditura S era disposta parallelamente alla retta C d'intersezione dei piani degli specchi. Riflettendosi sugli specchi, il fascio si divideva in due fasci coerenti aventi come vertici S_1 e S_2, cioè le immagini virtuali della fenditura S negli specchi. La luce diretta emessa dalla sorgente S era sbarrata da uno schermo MN e sullo schermo cadevano soltanto i fasci riflessi. Nella regione AB dove i fasci si ricoprivano, si os-

servavano frange d'interferenza rettilinee e parallele. Par calcolare la larghezza Δx di una frangia introduciamo le seguenti notazioni: $CO = a$, $CS = b$, $\angle HCD = \varphi$. Visto che i punti S, S_1 e S_2 si trovano su una stessa circonferenza di raggio b, supponendo piccolo l'angolo φ, possiamo scrivere $d = S_1 S_2 = 2b\varphi$. L'angolo α sotto il quale dal punto O si vede la distanza $S_1 S_2$ è uguale a $\alpha = d/(a + b) = 2b\varphi/(a + b)$, e di conseguenza

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{a + b}{2b\varphi} \lambda. \qquad (27.1)$$

L'angolo α può essere semplicemente misurato mediante un micrometro montato in un cannocchiale. A questo scopo il cannocchiale deve essere disposto nel punto O e messo a fuoco sulle immagini S_1 e S_2 della fenditura
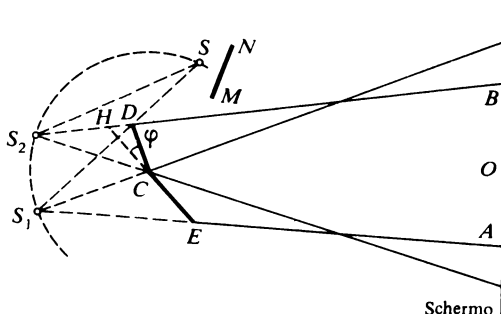
Fig. 116

S. Allora mediante la formula $\lambda = \alpha \Delta x$ si può trovare λ. La larghezza della regione di ricoprimento $AB = 2a\varphi$, e quindi il numero delle frange che possono essere osservate sullo schermo è uguale a

$$N = \frac{2a\varphi}{\Delta x} = \frac{2a\varphi\alpha}{\lambda} = \frac{4ab}{\lambda(a + b)} \varphi^2. \qquad (27.2)$$

Nell'esperimento di Fresnel il sistema di frange d'interferenza è perturbato dalla diffrazione sullo spigolo C lungo il quale s'intersecano i piani degli specchi.

3. Il biprisma di Fresnel. Il biprisma di Fresnel è formato da due prismi in vetro con angoli rifrangenti molto piccoli e con le basi a contatto (fig. 117). In pratica un biprisma viene ricavato da un unico blocco di vetro. La sorgente di luce è una fenditura S fortemente illuminata posta parallelamente allo spigolo del biprisma. Rifrangendosi nel biprisma, il fascio incidente si scinde in due fasci coerenti aventi per vertici le immagini virtuali S_1 e S_2 della fenditura S. Nella regione AB dello schermo i fasci si sovrappongono e formano un sistema di frange d'interferenza parallele. Siano β l'angolo rifrangente del biprisma, n il suo indice di rifrazione, a e b le lunghezze dei segmenti CO e SC. Ogni metà del biprisma devia il raggio paras-

siale di un angolo $(n - 1)\beta$. La distanza d tra le immagini S_1 e S_2 è uguale a $d = S_1S_2 = 2b(n - 1)\beta$, e la distanza angolare tra esse è $\alpha = d/(a + b)$. L'interfrangia è

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda(a + b)}{2b(n - 1)\beta}. \tag{27.3}$$

Le distorsioni del sistema di frange dovute alla diffrazione sullo spigolo
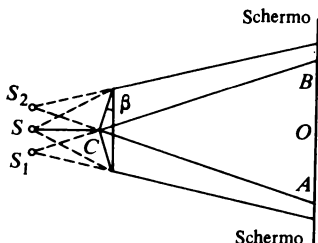
Fig. 117
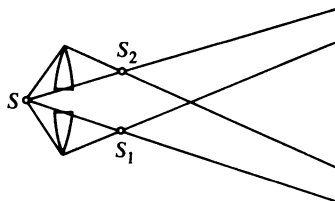
Fig. 118

C del biprisma sono più importanti di quelle con gli specchi di Fresnel, ma la realizzazione dell'esperimento con il biprisma è più facile.

4. Bilente di Billet. Una lente convergente viene tagliata in due e le sue metà scostate l'una dall'altra. Il sistema ottenuto si chiama *bilente*. Inviando sulla bilente la luce emessa da una fenditura S parallela al piano di taglio (fig. 118), si ottengono due immagini reali S_1 e S_2 della fenditura S. I fasci luminosi passanti attraverso S_1 e S_2 si sovrappongono e nei punti di sovrapposizione si ottiene l'interferenza. Se la fenditura S è disposta tra la bilente
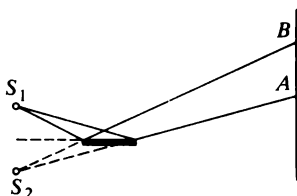
Fig. 119

ed il suo piano focale, le immagini S_1 e S_2 saranno virtuali. In questo caso l'interferenza è impossibile poiché i fasci luminosi non si sovrappongono. Per ottenere l'interferenza anche per questa posizione della fenditura S, è necessario tagliare dalla parte centrale della lente un pezzo pianoparallelo di vetro ed avvicinare entrambe le metà della lente. Allora i fasci si sovrapporranno e l'interferenza sarà possibile.

5. Specchio di Lloyd (1800-1881). La luce inviata da una fenditura stretta S_1 fortemente illuminata è riflessa dalla superficie piana levigata di un blocco di vetro nero (fig. 119). Sulla regione AB dello schermo dove si sovrappongono le luci diretta e riflessa si osservano frange d'interferenza.

6. In tutti gli esperimenti descritti le frange d'interferenza si possono osservare su uno schermo bianco opaco. Si può anche utilizzare un vetro smerigliato osservando le frange d'interferenza sul suo lato posteriore mediante una lente d'ingrandimento o un microscopio di piccolo ingrandimento. Questo procedimento d'osservazione *oggettivo* veniva utilizzato da Fresnel nei primi esperimenti. Fresnel ha notato che le frange d'interferenza non sparivano ma diventavano più nette quando il vetro smerigliato veniva tolto. Pertanto negli ulteriori studi Fresnel ha adottato il procedimento d'osservazione *soggettivo* delle frange d'interferenza (e di diffrazione). Il principio del procedimento d'osservazione soggettivo è molto semplice. Supponiamo che le frange d'interferenza siano raccolte sulla faccia posteriore Π di un vetro smerigliato. L'intensità luminosa in un punto P del piano Π è determinata dalla differenza di fase dei raggi che interferiscono in questo punto. Formiamo ora mediante una lente l'immagine del piano Π nel piano coniugato Π′. I raggi emessi dal punto P si riuniranno allora nel punto P'. Ma visto che le lunghezze ottiche di tutti i raggi compresi tra i punti coniugati sono uguali, i raggi che interferiscono arriveranno al punto P' *con la stessa differenza di fase* che possedevano nel punto P. Pertanto nel piano Π′ si otterrà non soltanto l'immagine del piano Π, ma anche tutto il sistema di frange d'interferenza che si formano su questo piano. Si può dire che la lente trasporta il sistema di frange dal piano Π sul piano Π′. Allo stesso modo funziona il sistema ottico dell'occhio mediante il quale le frange d'interferenza si ottengono sulla retina. Se si usa un cannocchiale puntato all'infinito, si osserva il sistema di frange d'interferenza a distanza infinita (cioè molto lontana) dall'occhio.

7. Esperimento d'interferenza di Pohl (1884-1976). Tutti i dispositivi descritti precedentemente presentano una luminosità troppo debole per essere utilizzati per la dimostrazione dell'interferenza in una grande aula.
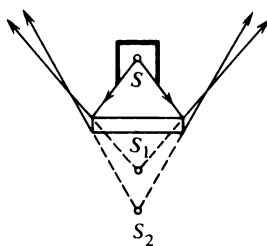
Fig. 120

L'esperimento di Pohl consente di evitare questo difetto. Una sorgente di luce S (fig. 120), una lampada a mercurio per esempio, viene messa davanti ad una lastra di mica di qualche centesimo di millimetro di spessore. La luce si riflette sulle facce anteriore e posteriore della lastra di mica formando

due immagini virtuali S_1 e S_2 della sorgente S. La luce diretta proveniente dalla sorgente è sbarrata da uno schermo opaco e così si ottengono due fasci di luce larghi coerenti con i vertici nei punti S_1 e S_2, i quali cadendo sullo schermo, sul soffitto o su un muro dell'aula formano frange d'interferenza in forma di anelli chiari e scuri (si veda il punto 6 del paragrafo precedente). Grazie alla forte intensità luminosa gli anelli sono perfettamente visibili. I vantaggi del metodo di Pohl saranno analizzati nel § 28.

8. Esperimento di Meslin. Quest'esperimento è una variante dell'esperimento di Billet, in cui le metà della lente tagliata non vengono allontanate l'una dall'altra perpendicolarmente all'asse ottico ma si spostano lungo quest'asse di una distanza notevole (fig. 121). Le due metà della bilente
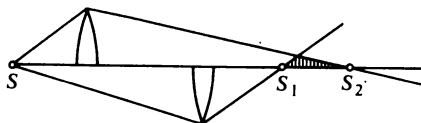
Fig. 121

formano due immagini reali della sorgente puntiforme S nei punti S_1 e S_2 dell'asse ottico principale. Le frange d'interferenza vengono osservate nella regione tratteggiata dove si sovrappongono i fasci di luce, cioè tra le immagini S_1 e S_2. In un piano perpendicolare all'asse ottico principale le frange d'interferenza hanno la forma di semianelli concentrici con il centro comune sull'asse ottico principale.

È interessante notare che il centro degli anelli è *scuro*, poiché il fascio che attraversa il fuoco S_1 è in anticipo sull'altro fascio che attraversa il suo fuoco S_2 più tardi. Questo fatto permette di concludere che il passaggio di un'onda attraverso il fuoco è accompagnato dal cambiamento della sua fase di π.

Questo è facile da comprendere considerando un'onda sferica scalare che converge verso il suo centro O ed occupa l'angolo solido totale 4π. Rappresentiamo il campo di questa onda nella forma $E_1 = \frac{1}{r} f_1\left(t + \frac{r}{v}\right)$, dove r è la distanza dal centro O e v la velocità di propagazione dell'onda. Quando l'onda passa attraverso il centro O, essa origina un'onda sferica divergente $E_2 = \frac{1}{r} f_2\left(t - \frac{r}{v}\right)$. Il campo d'onda è rappresentato nello spazio dall'espressione

$$E = \frac{1}{r} f_1\left(t + \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t - \frac{r}{v}\right).$$

Poiché l'intensità E del campo non può essere infinita in nessun punto, in

particolare per $r = 0$, è necessario che in ogni istante valga la relazione $f_2(t) = -f_1(t)$, cioè la funzione f_2 può essere distinta dalla funzione f_1 soltanto per il segno. Se le vibrazioni di f_1 e di f_2 sono sinusoidali, nel punto O le loro fasi saranno opposte, in altre parole quando un'onda passa per il fuoco la sua fase cambia di π.

Dal ragionamento riportato segue che sul fronte avanzato dell'onda la funzione f_1 deve essere continua. Se essa avesse una discontinuità, all'arrivo del fronte avanzato dell'onda nel centro O l'intensità E del campo crescerebbe infinitamente. Lo stesso vale anche per il fronte posteriore dell'onda, nonché per la funzione f_2.

Problemi

1. Dove si deve mettere la lente convergente in un esperimento di interferenza con il biprisma (si veda la fig. 117) affinché l'interfrangia Δx non dipenda dalla posizione dello schermo? Calcolare Δx ed il numero massimo N di frange che può essere osservato in questo dispositivo quando lo schermo si trova alla distanza L dal biprisma.

Risposta. $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2(n - 1)\beta}$; $N = \dfrac{4L(n - 1)^2\beta^2}{\lambda}$.

2. A quale distanza L dello schermo dal biprisma (dispositivo del problema precedente) il numero N di frange d'interferenza sarà massimo se la distanza tra i vertici del biprisma è uguale a l? Calcolare N e determinare la posizione dello schermo per la quale le frange debbono sparire.

Risposta. $N = l(n - 1)\beta/\lambda$; $L = \dfrac{l}{4(n - 1)\beta}$. Se lo schermo è posto ad una distanza maggiore o uguale a L dal biprisma le frange spariscono.

3. Calcolare il numero N di frange d'interferenza che possono essere formate nel dispositivo della figura 117.

Risposta. $N = \dfrac{4ab}{a + b} \dfrac{(n - 1)^2\beta^2}{\lambda}$.

4. Nell'esperimento con il biprisma di Fresnel lo schermo utilizzato per l'osservazione delle frange d'interferenza è disposto perpendicolarmente all'asse del dispositivo. La frangia
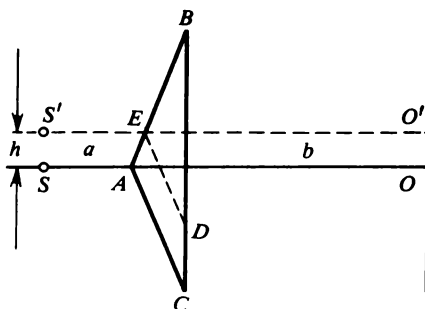
Fig. 122

di ordine zero si osserva al centro dello schermo in un piano verticale passante per lo spigolo del biprisma e per l'asse del dispositivo. In qual senso ed a quale distanza x si sposterà la frangia zero se si sposta la fenditura illuminante di una distanza h perpendicolarmente all'asse del dispositivo?

Soluzione. Se la sorgente di luce è spostata da S a S' (fig. 122) l'azione del biprisma CAB sarà ridotta all'azione della sua parte DEB e di una lastra a facce piane e parallele $CAED$. Sommando gli spostamenti dovuti all'azione di queste parti individualmente, troviamo che il centro del sistema di frange si sposta dalla posizione iniziale O verso l'alto ad una distanza $x = hb/a$.

§ 28. *Influenza delle dimensioni della sorgente luminosa. Coerenza spaziale*

1. L'aumento delle dimensioni di una sorgente luminosa porta dapprima al deterioramento della *nettezza* delle frange d'interferenza ed infine alla loro totale scomparsa. Supponiamo che la sorgente sia costituita da due punti luminosi non coerenti identici A e B che si trovano ad una piccola distanza l uno dall'altro (fig. 123). Come abbiamo visto nel § 26 (punto 10),
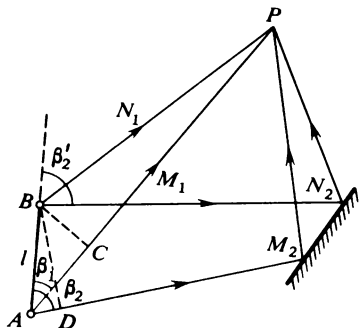
Fig. 123

per ottenere interferenza da una sorgente A è necessario scindere la luce emessa da questa sorgente in due fasci che arrivano allo schermo *per vie differenti.* Occorre applicare lo stesso trattamento alla luce proveniente dalla sorgente B. Il procedimento che abbiamo adoperato di scissione di un fascio in due è poco importante per le considerazioni che seguono. Nella figura 123 un fascio luminoso arriva al punto d'interferenza P direttamente dalle sorgenti A e B e l'altro dopo riflessione dallo specchio M_2N_2. I ragionamenti che seguono sono validi anche per raggi curvilinei, ma per semplificare le formule supponiamo che gli indici di rifrazione dei mezzi in cui si trovano i punti A e B ed anche lo schermo sul quale si raccolgono le frange d'interferenza siano uguali all'unità.

Siano AM_1P ed AM_2P due raggi, emessi dal punto A, che formano gli

angoli β_1 e β_2 con la retta AB e che convergono al punto P dove interferiscono. I raggi analoghi provenienti dal punto B vengono indicati con BN_1P e BN_2P. Se la distanza $l = AB$ è sufficientemente piccola la differenza dei cammini ottici dei raggi AM_1P e BN_1P si può scrivere: $(AM_1P) - (BN_1P) = (AC) = l \cos \beta_1$. Analogamente per AM_2P e BN_2P: $(AM_2P) - (BN_2P) = (AD) = l \cos \beta_2$. Di conseguenza,

$$[(AM_1P) - (AM_2P)] - [(BN_1P) - (BN_2P)] = l(\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

La prima espressione tra parentesi quadre rappresenta la differenza di cammino dei raggi emessi dal punto A che caratterizza la loro interferenza al punto P: massimo, minimo o valore intermedio d'illuminamento. Analogamente, la seconda espressione tra parentesi quadre rappresenta la differenza di cammino dei raggi emessi dal punto B che caratterizza le loro interferenze. La differenza di queste due quantità

$$\Delta = l \, |\cos \beta_1 - \cos \beta_2|$$

caratterizza lo spostamento di fase tra il sistema di frange prodotto dalla luce emessa dalla sorgente puntiforme A ed il sistema di frange prodotto dalla luce emessa da B. Da questa quantità dipende il risultato della sovrapposizione di questi due sistemi di frange d'interferenza. Se la quantità Δ è uguale a zero o è piccola rispetto alla lunghezza d'onda λ, i massimi ed i minimi dei due sistemi di frange si sovrappongono: in questo caso ha luogo il rafforzamento reciproco dei sistemi e le frange d'interferenza diventano più nette, l'illuminamento intenso ai massimi diminuisce progressivamente fino all'oscurità completa ai minimi. Con il crescere di Δ la nettezza delle frange prima diminuisce. Quando $\Delta = \lambda/2$, cioè se

$$l \, |\cos \beta_1 - \cos \beta_2| = \lambda/2, \tag{28.1}$$

i massimi di uno dei sistemi si sovrappongono ai minimi dell'altro, il che implica la sparizione completa delle frange d'interferenza. Con l'ulteriore crescita di Δ le frange d'interferenza riappaiono ed inoltre il sistema di frange si ripete periodicamente dalla più grande nettezza delle frange fino alla loro sparizione completa. Per

$$\Delta \equiv l \, |\cos \beta_1 - \cos \beta_2| = m\lambda \tag{28.2}$$

(m è un numero intero) le frange sono tanto nette quanto lo sono per $\Delta = 0$. Per

$$\Delta \equiv l \, |\cos \beta_1 - \cos \beta_2| = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{28.3}$$

le frange spariscono e lo schermo è illuminato uniformemente. Se Δ è inferiore a circa $\lambda/4$ la nettezza delle frange è soltanto leggermente meno buona di quella per $\Delta = 0$. Lo stesso sarà per $\Delta = (m + \alpha)\lambda$, dove α è una frazione propria inferiore a $1/4$. Questa condizione convenzionale ci servirà in

seguito a caratterizzare la *buona nettezza delle frange d'interferenza.* Notiamo ancora che nei limiti della precisione adottata nei calcoli l'angolo β_2 può essere identificato con l'angolo β_2': lo faremo senza segnalarlo.

2. Supponiamo ora che una sorgente luminosa sia estesa ed abbia la forma di una linea AB uniformemente luminosa di lunghezza l, i cui punti emettano luce in modo non coerente (fig. 124). Dividiamola mentalmente
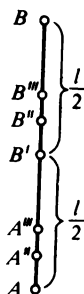
Fig. 124

in un'infinità di coppie di sorgenti puntiformi non coerenti (A, B'), (A'', B''), ..., separate le une dalle altre di una distanza $l/2$. Applichiamo a queste coppie di sorgenti puntiformi i risultati ottenuti sopra, sostituendo la distanza l con $l/2$. Se $\frac{\Delta}{2} = \frac{1}{2} |\cos\beta_1 - \cos\beta_2| = \frac{\lambda}{2}$, le coppie di sorgenti puntiformi non produrranno alcuna frangia d'interferenza e lo schermo sarà uniformemente illuminato. Il risultato sarà lo stesso se le dimensioni della sorgente $l = AB$ sono aumentate di 2, 3, ... volte. Dunque, se è verificata la condizione

$$\Delta \equiv l\,|\cos\beta_1 - \cos\beta_2| = m\lambda, \tag{28.4}$$

una sorgente luminosa estesa produce sullo schermo soltanto uno sfondo illuminato senza frange d'interferenza (nel caso di sorgenti puntiformi la situazione è esattamente contraria poiché la stessa condizione corrisponde alla più grande nettezza delle frange d'interferenza). Se $\Delta = (m + \alpha)\lambda$, dove α è una frazione propria, la sorgente estesa può essere mentalmente suddivisa in due parti le cui lunghezze stanno nel rapporto $m : \alpha$. La parte più corta della sorgente produce frange d'interferenza sullo sfondo uniformemente illuminato dall'altra parte della stessa sorgente. Questo fatto diminuisce la nettezza delle frange e quanto più grande è m tanto meno buona è la nettezza delle frange. Per m grandi le frange d'interferenza praticamente non si osserveranno. La condizione di buona visibilità delle frange d'interferenza prodotte da una sorgente estesa si può esprimere in modo approssimato nella forma

$$l\,|\cos\beta_1 - \cos\beta_2| \leqslant \lambda/2. \tag{28.5}$$

Se i raggi marginali che interferiscono, inviati da un punto qualsiasi della sorgente estesa, sono simmetrici rispetto alla perpendicolare alla linea AB abbassata dal punto considerato, cioè $\beta_2 = \pi - \beta_1$, si ha $\cos\beta_2 = -\cos\beta_1$ e la condizione precedente si scrive come segue

$$l \sin(\Omega/2) \leqslant \lambda/4, \qquad (28.6)$$

dove Ω è l'angolo tra i raggi marginali che è spesso detto *angolo d'interferenza*. È però necessario tener presente che la condizione (28.6) è verificata solo per la *simmetria* che era stata postulata per stabilire questa condizione. La condizione di buona visibilità delle frange d'interferenza non può fondarsi sulla sola conoscenza dell'angolo d'interferenza (malgrado un'affermazione contraria molto diffusa) poiché a questo scopo è necessario conoscere anche gli angoli β_1 e β_2.

I risultati che sono stati ottenuti per sorgenti puntiformi si applicano abbastanza bene alle sorgenti lunimose aventi la forma di segmenti rettilinei corti paralleli l'uno all'altro a distanza l e paralleli al piano dello schermo, nella parte centrale del quale si osservano le frange d'interferenza. (Per parte centrale s'intende una piccola regione contigua alla linea lungo la quale lo schermo interseca il piano passante per il centro delle sorgenti perpendicolarmente alla loro lunghezza.) Con questa stessa disposizione, sono validi i risultati (28.4) e (28.5) per sorgenti estese non coerenti aventi la forma di fenditure rettangolari, a condizione di intendere per l la larghezza delle fenditure. In ottica sono sovente utilizzate come sorgenti di luce fenditure rettangolari fortemente illuminate da fasci luminosi larghi. Se è verificata la condizione

$$l|\cos\beta_1 - \cos\beta_2| \ll \lambda,$$

la fenditura si comporta come una sorgente lineare infinitamente sottile.

3. Le considerazioni svolte mostrano che per ottenere frange d'interferenza da due sorgenti luminose non è sufficiente che queste sorgenti siano costituite da coppie di sorgenti puntiformi coerenti (per esempio, una sorgente luminosa e la sua immagine ottica o due immagini ottiche di una sola sorgente luminosa). Persino nel caso di luce rigorosamente monocromatica è ancora necessario che le dimensioni delle sorgenti non siano superiori ad un limite il cui valore dipende sia dalla disposizione relativa delle sorgenti e dalla loro distanza che dalla posizione dello schermo predisposto all'osservazione delle frange d'interferenza.

Due sorgenti le cui dimensioni e posizioni relative permettono di osservare le frange d'interferenza (per un grado sufficiente di monocromaticità della luce) si chiamano *spazialmente coerenti*. Se, invece, non si riesce a produrre frange d'interferenza (persino nel caso di luce perfettamente monocromatica) le sorgenti sono dette *spazialmente incoerenti* (si veda in seguito il punto 8).

4. Definiamo ora le condizioni che determinano la coerenza spaziale negli esperimenti classici d'interferenza descritti nel paragrafo precedente. In tutti gli esperimenti le sorgenti di luce sono lineari (eccetto l'esperimento di Meslin nel quale sono puntiformi, cosicché la questione della coerenza spaziale praticamente non si pone). Negli esperimenti con gli specchi e con il biprisma di Fresnel, come nei dispositivi di Billet e di Pohl, la disposizione relativa delle sorgenti coerenti AB e $A'B'$ è « diretta », cioè corrisponde alla figura 125, mentre nel caso dello specchio di Lloyd la disposizione relativa delle sorgenti è « inversa », cioè corrisponde allo schema della figura 126. In queste figure le coppie coerenti di sorgenti puntiformi sono indicate con (A, A'), (B, B'), ecc. Nei dispositivi di Fresnel, di Lloyd, di Billet, che utilizzano come sorgenti fenditure illuminate, si suppone che queste ultime siano perpendicolari al piano della figura, e $l = AB$ sia la larghezza della fenditura. Nel dispositivo di Pohl le sorgenti lineari AB e $A'B'$ (per esempio l'immagine di una lampada a mercurio avente la forma di un piccolo cilindro) sono orientate verticalmente, di modo che AB indica la lunghezza l della sorgente luminosa.

5. Consideriamo dapprima la disposizone « diretta » delle sorgenti (fig. 125). In questo
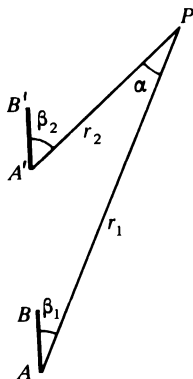
Fig. 125

caso $\beta_2 - \beta_1 = \alpha$. Data la piccolezza dell'angolo α di convergenza dei raggi che interferiscono si può scrivere

$$\cos \beta_1 - \cos \beta_2 = \sin \beta \, \Delta\beta = \alpha \sin \beta,$$

dove, con la precisione adottata, si può prendere per β sia β_1 che β_2, sia un valore intermedio. La condizione (28.5) di buona visibilità delle frange d'interferenza assume la forma

$$l \leqslant \lambda/(2\alpha \sin \beta), \tag{28.7}$$

o, tenendo conto della (26.13),

$$l \leqslant \Delta x/(2 \sin \beta). \tag{28.8}$$

Nei dispositivi di Fresnel e di Billet gli angoli β_1 e β_2 non differiscono praticamente da $\pi/2$, di modo che $l \leqslant \Delta x/2$, cioè la larghezza della fenditura non deve essere superiore all'incirca alla metà dell'interfrangia (si suppone che il piano dello sehermo sia perpendicolare all'asse CO del dispositivo, si veda la fig. 116).

Al contrario, nell'esperimento di Pohl l'angolo β varia da 20 a 50° e le frange d'interferenza, formate sul soffitto dell'aula, presentano una forma ad anello. Per semplificare i calcoli sostituiamo la lastra di mica con due piani paralleli riflettenti la cui distanza è uguale allo spessore h della lastra. Allora la distanza tra punti corrispondenti delle sorgenti (per esempio

tra A ed A' o B e B') è uguale a $2h$, di modo che $2h \sin\beta = r\alpha$, dove r nella nostra approssimazione è uguale a r_1 o r_2, o ad un valore intermedio qualsiasi. Sostituendo il valore di α nella (28.7), otteniamo la condizione di coerenza spaziale

$$l \leqslant r\lambda/(4h \sin^2 \beta). \tag{28.9}$$

Nell'esperimento di Pohl lo spessore h della lastra di mica deve essere molto piccolo, di modo che le sorgenti virtuali AB e $A'B'$ sono spostate l'una rispetto all'altra di una quantità $2h$, molto più piccola della lunghezza l della sorgente stessa. Supponiamo, per esempio, che $\lambda = 500$ nm $= 5 \cdot 10^{-5}$ cm, $h = 0{,}05$ mm, $r = 8$ m, $\beta = 30°$. Allora, secondo la formula (28.9), deve essere $l \leqslant 8$ cm. Dunque, per ottenere una buona nettezza delle frange la sorgente di luce può avere dimensioni relativamente grandi e quindi grande intensità luminosa. Questo è il vantaggio principale del dispositivo di Pohl per la dimostrazione dei fenomeni di interferenza. Un altro vantaggio è la grande apertura dei fasci che interferiscono e questo permette di ottenere frange d'interferenza su una grande estensione.

6. Consideriamo ora la disposizione « inversa » delle sorgenti coerenti AB e $A'B'$ (fig. 126) che è realizzata nell'esperimento di Lloyd. In questo caso al centro O dello schermo
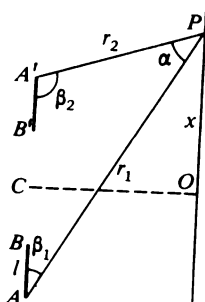
Fig. 126

la condizione (28.5) è verificata per una larghezza l qualsiasi della fenditura. Se scegliamo un altro punto d'osservazione P, si ha

$$\cos\beta_1 = (AC + OP)/r_1, \quad \cos\beta_2 = -(OP - A'C)/r_2.$$

Siccome $AC = A'C$, trascurando nei denominatori la differenza tra r_1 e r_2, otteniamo: $\cos\beta_1 - \cos\beta_2 = 2x/r$, dove $x = OP$ è la coordinata del punto P. Visto che i raggi che interferiscono sono quasi perpendicolari al piano dello schermo, la condizione di buona nettezza delle frange d'interferenza si scrive nella forma $2lx/r \leqslant \lambda/2$, cioè

$$x \leqslant r\lambda/(4l). \tag{28.10}$$

A una distanza due volte più grande le frange d'interferenza scompaiono. Il numero totale N di frange che si possono osservare da questa distanza, si ottiene dividendo $2x$ per l'interfrangia $\Delta x = \lambda/\alpha$. Ne risulta

$$N = \frac{r\alpha}{2l} = \frac{d}{l}, \tag{28.11}$$

dove $2d = r\alpha$ è la distanza tra le sorgenti di luce. Quest'espressione fornisce una stima del più grande ordine di interferenza prodotto in luce monocromatica nei dispositivi del tipo di quello di Lloyd.

7. Consideriamo infine l'esperimento d'interferenza di Young (fig. 127). La sorgente luminosa è una stretta fenditura rettangolare di larghezza l fortemente illuminata. Da ogni punto di questa fenditura, per esempio dal punto A, i raggi vanno verso le fenditure S_1 e S_2 prati-

cate nello schermo sotto gli angoli β_1 e β_2. Se di nuovo trascuriamo nei denominatori la differenza tra r_1 e r_2, si può scrivere: $\cos\beta_1 - \cos\beta_2 = d/r$, dove d è la distanza tra i centri delle fenditure S_1 e S_2. In questo caso la condizione (28.5) diventa $ld/r \leqslant \lambda/2$, o

$$\varphi \leqslant \lambda/(2d), \qquad (28.12)$$

dove $\varphi = l/r$ è la dimensione angolare della sorgente AB vista dalle fenditure S_1 e S_2 (dato che nell'esperimento di Young gli angoli β_1 e β_2 non differiscono quasi da $\pi/2$). Se $\varphi = \lambda/d$, le frange d'interferenza spariscono.

Supponiamo che le fenditure S_1 e S_2 siano illuminate dai raggi solari, come nell'esperimento di Grimaldi (si veda il § 27, punto 1; nell'esperimento di Grimaldi le sorgenti S_1 e S_2 erano costituite da due piccoli buchi disposti l'uno vicino all'altro). La dimensione angolare
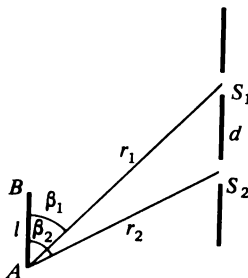
Fig. 127

del Sole è $\varphi \approx 30' = 0{,}0087$ rad; poniamo la lunghezza d'onda uguale a $\lambda = 550$ nm. Allora per ottenere frange d'interferenza è necessario che sia verificata la condizione $d < \lambda/\varphi \approx \approx 6 \cdot 10^4$ nm $= 0{,}06$ mm. Visto che questa condizione non poteva essere verificata nell'esperimento di Grimaldi, non si poteva osservare l'interferenza della luce.

8. Più importante è la seguente generalizzazione. Supponiamo che la luce che illumina le fenditure S_1 e S_2 sia monocromatica. L'eventualità d'interferenza tra i fasci emessi attraverso i piccoli orifizi S_1 e S_2, ad una data distanza d tra essi dipende dall'apertura dei fasci che illuminano questi orifizi. Supponiamo, per esempio, che la sorgente abbia la forma di un disco il cui piano è parallelo a quello dello schermo sul quale sono praticati gli orifizi S_1 e S_2. Se φ è il diametro angolare apparente del disco l'interferenza si osserverà quando gli orifizi S_1 e S_2 si trovano all'interno di un cerchio di diametro $d < \lambda/\varphi$. Se S_1 ed S_2 stanno al di fuori di questo cerchio, l'interferenza non si avrà. Nel primo caso si dice che i fasci luminosi passati attraverso S_1 e S_2 sono *spazialmente coerenti*, e nel secondo caso essi sono *spazialmente incoerenti*. L'area minima della sezione trasversale di un fascio spazialmente coerente

$$\sigma = \pi\lambda^2/(4\varphi^2) \qquad (28.13)$$

si dice *area di coerenza spaziale* della luce incidente. Se la luce è rigorosamente monocromatica, tutti gli scarti dalla coerenza sono d'origine spaziale, cioè sono dovuti alla differenza di direzione dei raggi luminosi. Per onde rigorosamente piane tutti i raggi hanno la stessa direzione ($\varphi = 0$), di modo che l'area di coerenza σ diventa infinita. A misura che ci si allontana dalla sorgente la divergenza angolare dei raggi che penetrano nello strumento diminuisce e la loro coerenza spaziale aumenta. A titolo d'esempio si possono citare le stelle. Malgrado le loro enormi dimensioni la luce che le stelle emettono presenta un alto grado di coerenza spaziale. I fasci luminosi generati dai laser sono caratterizzati da una grande direzionalità irraggiungibile per qualsiasi altra sorgente di luce. Si vuol sottolineare proprio questa particolarità della radiazione dei laser quando si dice che presentano una grande coerenza spaziale.

Problemi

1. Per caratterizzare la nettezza delle frange d'interferenza Michelson ha introdotto la funzione

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \tag{28.14}$$

detta *funzione di visibilità* delle frange. Calcolare la visibilità V nel caso d'interferenza di due fasci luminosi monocromatici ugualmente intensi, emessi da una stessa sorgente puntiforme e che arrivano allo schermo percorrendo cammini diversi.

Soluzione. Secondo la (26.7) l'intensità luminosa sullo schermo quando è illuminato dalle due sorgenti è $I = 2I_1(1 + \cos\delta)$, dove I_1 è l'intensità luminosa prodotta da una delle sorgenti. Quando il punto d'osservazione si sposta sullo schermo l'intensità I varia da $I_{max} = 4I_1$ fino a $I_{min} = 0$, il che è dovuto alla variazione della differenza di fase δ tra i fasci che interferiscono, e quindi si ha $V = 1$.

2. Risolvere lo stesso problema per una sorgente di luce costituita da due punti luminosi A e B, identici e incoerenti che si trovano ad una distanza l l'uno dall'altro (fig. 123). Le frange d'interferenza si osservano su uno schermo lontano dalla sorgente.

Soluzione. Le intensità della luce nei sistemi di frange d'interferenza creati sullo schermo da ogni punto luminoso A e B separatamente sono uguali rispettivamente a $I_A = 2I_1(1 + \cos\delta_1)$, $I_B = 2I_1(1 + \cos\delta_2)$, dove δ_1, δ_2 ed I hanno lo stesso significato del problema 1. L'intensità risultante della sovrapposizione dei due sistemi di frange è

$$I = I_A + I_B = 4I_1\left(1 + \cos\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right).$$

La quantità $\delta_1 - \delta_2$ è la differenza di fase tra i sistemi di frange. Secondo i calcoli riportati al punto 1 si ha

$$\delta \equiv |\delta_1 - \delta_2| = k\Delta = kl|\cos\beta_1 - \cos\beta_2|,$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda. Le variazioni di δ_1 e δ_2 in funzione della posizione del punto d'osservazione sullo schermo sono rapide e determinano l'interfrangia. Al contrario, la differenza di fase $\delta \equiv |\delta_1 - \delta_2|$ varia lentamente e resta praticamente costante su un gran numero di frange. Questa δ determina la visibilità, cioè la nettezza delle frange. I valori massimi e minimi dell'intensità luminosa sono

$$I_{max} = 4I_1\left(1 + \left|\cos\frac{\delta}{2}\right|\right), \quad I_{min} = 4I_1\left(1 + \left|\cos\frac{\delta}{2}\right|\right),$$

e di conseguenza

$$V = \left|\cos k\frac{\Delta}{2}\right| = \left|\cos\frac{\pi\Delta}{\lambda}\right|. \tag{28.15}$$

Quando varia Δ, cioè la distanza l tra i punti luminosi A e B, la visibilità V varia periodicamente da 1 a 0 (fig. 128).

3. Calcolare la visibilità delle frange d'interferenza se la sorgente di luce è un segmento rettilineo di lunghezza l, tutti i punti del quale emettono vibrazioni incoerenti (fig. 124).

Soluzione. Orientiamo l'asse Y lungo il segmento irradiante mettendo l'origine delle coordinate O nel suo centro. Sia φ la differenza di fase tra due raggi uscenti dal punto O che arrivano nel punto d'osservazione P per vie diverse. La differenza di fase tra gli stessi raggi emessi da un altro punto del segmento di coordinata y che arrivano nello stesso punto P è

$$\delta = ky(\cos\beta_1 - \cos\beta_2) + \varphi = (k\Delta/l)y + \varphi.$$

I raggi uscenti dal segmento dy arrivando per vie diverse sullo schermo dove interferiscono creano un'intensità luminosa

$$dI = (1 + \cos\delta)dy$$

(in unità convenzionali). Visto che i punti della sorgente di luce irradiano in modo non coerente, l'intensità totale è

$$I = \int_{-l/2}^{+l/2} \left[1 + \cos\left(\frac{k\Delta}{l} y + \varphi\right)\right] dy = l + \frac{l}{k\Delta}\left[\sin\left(\frac{k\Delta}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{k\Delta}{2} - \varphi\right)\right].$$

Spostandosi lungo lo schermo la fase φ varia ed i valori di φ per i quali l'intensità I prende valori estremi sono determinati dall'uguaglianza

$$\cos\left(\frac{k\Delta}{2} + \varphi\right) = \cos\left(\frac{k\Delta}{2} - \varphi\right),$$
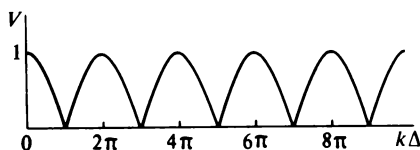
Fig. 128

da cui $\varphi = m\pi$, dove m è un numero intero;

$$I = l + l\,\frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2} \quad \text{per } m \text{ pari,}$$

$$I = l - l\,\frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2} \quad \text{per } m \text{ dispari.}$$

Quindi,

$$I_{max} = l + l\,\frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2}, \quad I_{min} = l - l\,\frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2},$$

$$V = \frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2}. \tag{28.16}$$

La curva di visibilità rappresentata nella figura 129 mostra il grado di diminuzione dell'altezza dei massimi con il crescere della lunghezza l della sorgente. La stessa curva caratterizza la visibilità delle frange d'interferenza negli esperimenti con gli specchi e con il biprisma
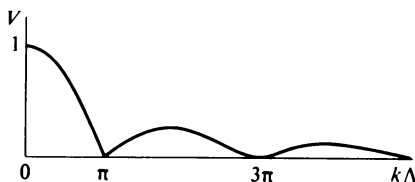
Fig. 129

di Fresnel (solo se la luce inviata da diversi punti della fenditura è incoerente). In questo caso l significa la larghezza della fenditura.

4. Risolvere lo stesso problema di prima supponendo che tutti i punti della sorgente inviino vibrazioni luminose coerenti ed aventi uguale fase.

Risposta.

$$V = \frac{2\left|\dfrac{\sin (k\Delta/2)}{k\Delta/2}\right|}{1 + \left(\dfrac{\sin (k\Delta/2)}{k\Delta/2}\right)^2}. \tag{28.17}$$

§ 29. *Decomposizione spettrale*

1. Finora l'interferenza è stata studiata soltanto nel caso ideale cioè con luce monocromatica. L'interferenza in luce non monocromatica può essere studiata scomponendo la luce nelle sue componenti monocromatiche applicando il teorema di Fourier. Se il campo d'onda nel punto d'osservazione è descritto dalla funzione periodica $E = E(t)$ di periodo fondamentale τ e di frequenza fondamentale $\Omega = 2\pi/\tau$, lo si può rappresentare per mezzo della parte reale della *serie di Fourier*

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\Omega t}, \tag{29.1}$$

i cui coefficienti sono definiti dall'espressione

$$a_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t) e^{-in\Omega t}\, dt \tag{29.2}$$

(si veda il vol. III, § 128; è evidente che per onde luminose non si ha il termine costante con coefficiente a_0). Il valore medio per periodo della densità di volume dell'energia delle vibrazioni (in unità convenzionali) è

$$\bar{w} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |E|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} w_n. \tag{29.3}$$

Essa è uguale alla somma delle densità medie dell'energia delle vibrazioni monocromatiche costituenti la vibrazione risultante. Questo risultato è valido anche per l'intensità delle vibrazioni, se per intensità si intende il valore medio per periodo τ di ogni grandezza energetica che caratterizza il campo di radiazione nel punto considerato.

Il risultato ottenuto resta approssimativamente valido anche per il caso in cui la funzione $E(t)$ non sia periodica e sia rappresentata dalla sovrapposizione di vibrazioni monocromatiche le cui frequenze sono distribuite a ca-

so nella regione di spettro considerata. In questo caso la media deve essere presa non per periodo τ (che non esiste), ma rispetto ad un tempo molto grande rispetto ai periodi di tutte le vibrazioni monocromatiche che partecipano alla sovrapposizione. Il risultato è approssimativamente valido anche nel caso di sovrapposizione di vibrazioni quasi armoniche di frequenze arbitrarie, per esempio per luce composta di righe spettrali strette.

2. Se la funzione $E(t)$ non è periodica essa è rappresentata non dalla serie ma dall'*integrale di Fourier.* Perché quest'ultima rappresentazione sia possibile alla funzione $E(t)$ si devono imporre diverse restrizioni (sufficienti); occorre esigere, per esempio, che essa sia *assolutamente integrabile* su tutto l'intervallo tra $+\infty$ e $-\infty$, cioè che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|\, dt.$$

sia convergente. In fisica queste restrizioni non creano grosse difficoltà persino nei casi in cui vengano introdotte funzioni che non si annullano all'infinito, cioè che non soddisfano la condizione d'integrabilità assoluta.

Infatti, sia $E(t)$ una tale funzione. Dividiamo t in intervalli di tempo sufficientemente lunghi rispetto al periodo delle vibrazioni luminose. Il campo di radiazione corrispondente a ciascuno di questi intervalli $(t_0, t_0 + \tau)$ e la sua azione su un ricevitore per qualsiasi valore di t_0 non dipendono praticamente dal valore del campo di radiazione negli intervalli adiacenti. Perciò quando la luce viene studiata soltanto nell'intervallo $(t_0, t_0 + \tau)$, la funzione $E(t)$ fuori dell'intervallo considerato può essere sostituita da un'altra funzione qualsiasi. In particolare, questa funzione può essere riprodotta periodicamente fuori dell'intervallo $(t_0, t_0 + \tau)$ con periodo τ. Ma allora per rappresentare la funzione $E(t)$ nell'intervallo $(t_0, t_0 + \tau)$ si può utilizzare la serie di Fourier (29.1). Facendolo, dato che la frequenza $\Omega = 2\pi/\tau$, è conveniente introdurre le notazioni $\Delta\omega = \Omega$, $\omega_n = n\Omega$. Si ha allora

$$E(t) = \sum a_n e^{i\omega_n t} = \sum \frac{a_n}{\Omega} e^{i\omega_n t}\, \Delta\omega.$$

Dopo aver sostituito la somma con l'integrale otteniamo

$$E(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{29.4}$$

dove $a(\omega) = a_n/\Omega$, o tenendo conto della (29.2)

$$a(\omega) = \frac{1}{\tau\Omega} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t) e^{-i\omega t}\, dt. \tag{29.5}$$

L'integrale di Fourier si deduce da queste formule se nella (29.5) i limiti vengono sostituiti con $-\infty$ e $+\infty$ (si veda il vol. III, § 128). Ma qui non lo faremo lasciando il tempo τ indeterminato. Nei problemi fisici si può sempre ottenere una precisione sufficiente scegliendo τ sufficientemente grande. In tal modo è assicurato il vantaggio di poter applicare la formula (29.4) ad ogni intervallo di durata τ, anche se la funzione $E(t)$ non è assolutamente integrabile, come per esempio nel caso di onde piane d'intensità costante e di durata indefinita.
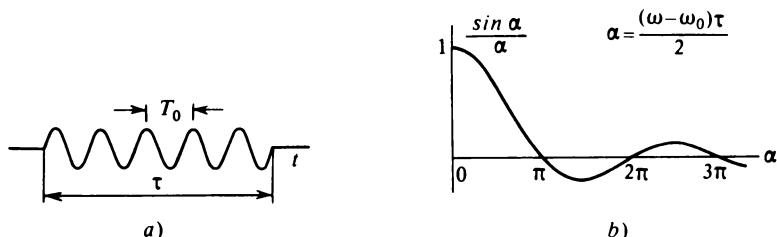
Fig. 130

Se si prendono diversi valori di τ (τ è supposto sufficientemente lungo) le espressioni (29.4) non saranno in generale coerenti. Se si utilizza l'integrale di Fourier, la formula (29.3) deve essere sostituita con l'espressione

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |E|^2 dt = \tau \sum |a(\omega_n)\Omega|^2.$$

Se la somma è approssimata dall'integrale e tenendo conto del fatto che $\tau\Omega = 2\pi$, si ottiene

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |E|^2 dt = 2\pi \int_0^{\infty} |a(\omega)|^2 d\omega. \tag{29.6}$$

In seguito, al punto 5, discuteremo il significato fisico di questa relazione.

3. Consideriamo un esempio di decomposizione spettrale che conduce a generalizzazioni importanti. Una vibrazione sinusoidale di durata infinita è l'idealizzazione di una successione limitata o di un treno di onde sinusoidali rappresentato nella figura 130,*a* sotto forma di una « sinusoide interrotta ». Siano T_0 il « periodo » e ω_0 la « frequenza » di questa « sinusoide ». In notazioni complesse

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{1}{i} e^{i(\omega_0-\omega)t} dt = \frac{2}{\pi i} \frac{\sin 1/2(\omega-\omega_0)\tau}{1/2(\omega-\omega_0)\tau},$$

e sotto forma reale

$$E(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin 1/2(\omega - \omega_0)\tau}{1/2(\omega - \omega_0)\tau} \sin \omega t \, d\omega. \tag{29.7}$$

La figura 130,*b* rappresenta il grafico della funzione $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, dove $\alpha =$ $= \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}$. Quindi il treno d'onda interrotto, disegnato nella figura 130,*a*, può essere rappresentato dalla sovrapposizione di un numero infinito di sinusoidi le cui frequenze occupano in modo continuo l'intervallo $0 <$ $< \omega < +\infty$. Gli intervalli più importanti sono $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$ o $\omega_0 -$ $- \frac{\pi}{\tau} < \omega < \omega_0 + \frac{\pi}{\tau}$, dove le ampiezze delle vibrazioni sono sufficientemente grandi. In tutti gli altri intervalli le ampiezze sono piccole. Se trascuriamo tutti gli intervalli eccetto quelli indicati, si può dire che tutto lo spettro delle frequenze è praticamente concentrato nei limiti di un intervallo di larghezza $\Delta\omega$ che verifica la condizione

$$\Delta\omega \cdot \tau \gtrsim 2\pi. \tag{29.8}$$

Introducendo la frequenza propriamente detta $\nu = \omega/(2\pi)$, si ha

$$\Delta\nu \cdot \tau \gtrsim 1. \tag{29.8a}$$

Questa è una relazione importante tra la larghezza dello spettro $\Delta\omega$ (o $\Delta\nu$) e la durata τ del treno d'onda che ha validità generale. Illustriamo questa relazione con un semplice esempio. Consideriamo una moltitudine di sinusoidi con la stessa ampiezza ma di frequenze differenti, che occupano in modo continuo e regolare l'intervallo $\Delta\omega$. Supponiamo che nel punto $t = 0$ le fasi di tutte le sinusoidi coincidano e, quindi, l'ampiezza delle vibrazioni sia massima. Per $t = \tau/2$ la differenza di fase tra le sinusoidi estreme sarà uguale a $\Delta\omega \cdot \tau/2$. Se questa differenza di fase è uguale a 2π, nel punto $t =$ $= \tau/2$ si sovrappongono tutte le sinusoidi di fasi differenti comprese in un intervallo di 2π. Nel caso di questa sovrapposizione, come è facile vedere mediante un diagramma vettoriale, le sinusoidi si annullano mutuamente. La distruzione mutua si produce nelle stesse condizioni nel punto $t =$ $= -\tau/2$. Quindi si può definire un intervallo di tempo $(-\tau/2, +\tau/2)$ ai limiti del quale il campo d'onda diventa nullo. In questo intervallo il tempo τ è legato alla larghezza $\Delta\omega$ dello spettro dalla relazione $\Delta\omega \cdot \tau = 4\pi$, la quale coincide in sostanza con la (29.8).

4. Una formula analoga alla (29.8) può essere stabilita quando si considera la ripartizione spaziale di un campo d'onda ad un istante dato. A titolo d'esempio si può prendere la « sinusoide interrotta » della figura 130,*a* in cui sull'asse delle ascisse poniamo la coordinata x nel senso di propaga-

zione dell'onda. Si può allora utilizzare la formula (29.4) sostituendo in essa il tempo t con la coordinata x e la frequenza ω con il numero d'onda $k = \omega/v$. Dopo averlo fatto, è facile dimostrare che la lunghezza Δx del treno d'onda è legata al corrispondente intervallo Δk di numeri d'onda dalla relazione

$$\Delta k \cdot \Delta x \gtrsim 2\pi. \tag{29.9}$$

Questo risultato sarà generalizzato nel § 44 ai problemi tridimensionali. Le relazioni (29.8) e (29.9) giocano un ruolo importante nella meccanica quantistica dove, in un'intrepretazione diversa, esprimono il *principio d'indeterminazione di Heisenberg* (1901-1976).

5. Quando la larghezza $\Delta\omega$ dello spettro è sufficientemente piccola ($\Delta\omega \ll \omega$) la luce corrispondente si chiama *quasi-monocromatica*. Spesso si utilizza anche il « *numero d'onda spettroscopico* » $\tilde{k} = k/(2\pi)$ ed in questo caso

$$\Delta \tilde{k} \cdot \Delta x \gtrsim 1. \tag{29.9a}$$

Questa relazione si applica, ad esemplio, alle righe spettrali emesse dai gas rarefatti. Una luce quasi-monocromatica può essere isolata dallo spettro d'emissione continua (per esempio quello del Sole) mediante un prisma, un reticolo di diffrazione o mediante altri strumenti ottici che realizzano la decomposizione spettrale della radiazione. Per indicare il grado di monocromaticità della luce si può utilizzare il rapporto $|\omega/\Delta\omega|$ o il rapporto $|\lambda/\Delta\lambda|$. La più elevata monocromaticità viene riscontrata nella luce generata dai laser a gas. Non si può però dimenticare che un treno di onda o un fascio luminoso che copre la gamma spettrale $\Delta\omega$ deve avere una durata finita non inferiore a $\tau \approx 2\pi/\Delta\omega$. In particolare non si deve parlare di valore istantaneo della densità di volume dell'energia di radiazione all'intervallo $d\omega$, cioè della grandezza $\sim |dE|^2 = |a(\omega)\,d\omega|^2$. Al posto dei valori istantanei si deve utilizzare la densità media dell'energia di radiazione in un tempo dell'ordine di $\tau \approx 2\pi/d\omega$. Ciò significa che l'intensità di radiazione nella gamma spettrale $(\omega, \omega + d\omega)$ deve dipendere da una grandezza proporzionale a $\tau|dE|^2$, cioè $|a(\omega)|^2 d\omega$. La grandezza $|a(\omega)|^2$ si dice *densità spettrale di radiazione.* Questa è la quantità che interessa quando si parla della ripartizione spettrale dell'intensità o dell'energia di radiazione. È evidente che al posto della frequenza si può utilizzare la lunghezza d'onda rappresentando la stessa grandezza nella forma $|a_\lambda(\lambda)|^2 d\lambda$. Si ha evidentemente $a(\omega) = 2\pi c a_\lambda(\lambda)/\omega^2$.

Problema

Calcolare l'integrale di Fourier e la densità spettrale di radiazione di un oscillatore smorzato il cui campo d'onda è dato dall'espressione

$$E(t) = e^{-t/\tau} \sin \omega_0 t \qquad (t \geqslant 0).$$

Risposta.

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{(\omega - \omega_0) - i/\tau},$$

$$|a(\omega)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (1/\tau)^2}. \tag{29.10}$$

Se $\omega - \omega_0 = 1/\tau$, cioè $\Delta\omega \cdot \tau = 1$, la densità spettrale di radiazione diminuisce di 2 volte.

Quest'esempio conferma di nuovo la giustezza della relazione generale (29.8). Nell'esempio citato nel testo (fig. 130,*b*) la densità spettrale di radiazione $|a(\omega)|^2$ diminuisce ai limiti dell'intervallo $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ di $(\pi/2)^2 \approx 2{,}5$ volte rispetto al suo valore per $\alpha = 0$.

§ 30. *Interferenza in luce non monocromatica*

1. Come per un aumento delle dimensioni delle sorgenti, così la non monocromaticità di una luce implica prima il *peggioramento della nettezza* (visibilità) delle frange d'interferenza e poi la loro scomparsa completa. Per non complicare lo studio, supponiamo di avere una sorgente luminosa S puntiforme. Siano S_1 e S_2 (fig. 113) le sorgenti coerenti, immagini reali o virtuali della sorgente S. Ammettiamo dapprima che la radiazione emessa dalla sorgente S sia composta di due righe spettrali vicine della stessa intensità e di lunghezza d'onda λ e $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$. Il punto o la linea sullo schermo dove la differenza ottica di cammino Δ dei raggi che interferiscono è nulla si dice *centro del sistema di frange d'interferenza.*

Se le fasi iniziali delle sorgenti S_1 e S_2 sono uguali, i raggi di lunghezza d'onda λ e λ' arrivano al centro del sistema di frange con *le stesse fasi.* Le due onde produrranno frange brillanti. In un altro punto A dello schermo dove $\Delta = N\lambda'$, con N numero intero (numero di frangia o ordine d'interferenza), per la lunghezza d'onda λ' si ottiene una frangia brillante. Se $\Delta = (N + 1/2)\lambda$, nello stesso punto A i raggi di lunghezza d'onda λ giungono con *fasi opposte* e la frangia d'interferenza è scura. In questa condizione nelle vicinanze del punto A le frange brillanti di lunghezza d'onda λ' si sovrappongono alle frange scure di lunghezza d'onda λ e si distruggono mutuamente. La condizione della prima sparizione delle frange è quindi $N\lambda' = (N + 1/2)\lambda$ ovvero

$$N = \frac{\lambda}{2(\lambda' - \lambda)} = \frac{\lambda}{2\delta\lambda}. \tag{30.1}$$

Quanto esposto sopra resta valido anche se le fasi dei raggi, che arrivano nel centro del sistema di frange, sono opposte; in questo caso la frangia centrale sarà scura.

Se l'ordine di una frangia è piccolo rispetto al valore di N definito dall'espressione (30.1), le frange d'interferenza saranno nette, quasi quan-

to nel caso di una luce monocromatica (di una sola lunghezza d'onda). Quando l'ordine di interferenza per la lunghezza d'onda λ' raggiunge il valore $2N$ l'ordine nella corrispondente frangia per la lunghezza d'onda λ è uguale a $(2N + 1)$. Le frange d'interferenza sono allora tanto nette quanto lo sono al centro. Se l'ordine d'interferenza cresce ancora si osserva una variazione periodica della nettezza delle frange, da una buona visibilità fino alla loro sparizione completa.

Per esempio, se la sorgente di luce è una fiamma al sodio, questa emette due righe spettrali strette di lunghezze d'onda $\lambda = 589$ nm e $\lambda' = 589{,}6$ nm. Per $N \approx \lambda/[2(\lambda' - \lambda)] = 490$ le frange d'interferenza diventano molto indistinte o completamente invisibili. Per N uguale a 980 o per un multiplo intero di 980 le frange ridiventano nette. Con l'ulteriore crescere dell'ordine d'interferenza le frange cambiano periodicamente la loro visibilità, diventando ora nette, ora confuse. E ciò continua fino a che in seguito alla larghezza finita di entrambe le righe spettrali non spariscono definitivamente.

2. Esaminiamo ora il caso in cui la luce emessa dalla sorgente S occupa in modo continuo e regolare un intervallo spettrale $(\lambda, \lambda + \delta\lambda)$. In questo caso si può utilizzare lo stesso procedimento che abbiamo utilizzato nel § 28 (punto 2) per studiare le frange d'interferenza prodotte da una sorgente estesa. Tutto l'intervallo spettrale $(\lambda, \lambda + \delta\lambda)$ viene diviso in un gran numero di coppie di righe spettrali estremamente sottili distanti le une dalle altre di $\delta\lambda/2$ (si utilizza la scala delle lunghezze d'onda). Ad ogni coppia di righe spettrali si può applicare la formula (30.1) se sostituiamo in essa $\delta\lambda$ con $\delta\lambda/2$. Perciò la prima scomparsa delle frange d'interferenza avrà luogo per un ordine d'interferenza

$$N = \lambda/\delta\lambda \tag{30.2}$$

che è due volte più grande che nel caso precedente. Facendo crescere l'ordine d'interferenza le frange d'interferenza riappaiono ma già su uno sfondo chiaro, come nel caso della sorgente monocromatica estesa (§ 28, punto 2, e il problema 3). La nettezza di queste frange sarà scarsa e con l'ulteriore aumento dell'ordine d'interferenza le frange scompaiono completamente. Praticamente l'osservazione delle frange d'interferenza sarà limitata a ordini d'interferenza non superiori alla (30.2).

La formula (30.2) come formula di valutazione resta valida anche nel caso di una ripartizione arbitraria dell'intensità luminosa tra tutte le lunghezze d'onda nell'intervallo $\delta\lambda$. Quindi questa formula dà una stima del massimo ordine d'interferenza per un grado di monocromaticità $\lambda/\delta\lambda$ della luce utilizzata. Due fasci di luce quasi-monocromatica che sono coerenti per piccoli ordini d'interferenza cessano di esserlo ad ordini d'interferenza superiori all'incirca al valore della (30.2).

3. Le considerazioni che seguono permettono di avere un'idea sul massimo ordine d'interferenza realizzabile. Si abbia una luce composta di treni

d'onda identici che susseguono ad intervalli di tempo casuali. Uno di questi treni d'onda è rappresentato nella figura 130,*a* (questa figura rappresenta le vibrazioni del campo d'onda nel tempo ed in un dato punto dello spazio; la rappresentazione di un treno d'onda ad un istante dato in funzione delle coordinate spaziali è assolutamente identica). L'apparecchio interferenziale divide un fascio luminoso in due fasci i quali procedono verso il punto di convergenza seguendo percorsi diversi, il che implica una differenza di cammino dei raggi. Perché i fasci siano coerenti è necessario che la differenza di cammino tra essi non sia superiore alla lunghezza $L = c\tau$ del treno d'onda. In caso contrario si ha una sovrapposizione di treni d'onda indipendenti emessi ad istanti differenti e non si ha interferenza. L'ordine d'interferenza massimo non può essere superiore a

$$N_{\max} = \frac{L}{\lambda} = \frac{\tau}{T}. \tag{30.3}$$

Si sottintende che questa condizione deve essere conforme alla (30.2), il che implica che

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{\tau}{T} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\omega}{\delta\omega}.$$

Tenendo conto del fatto che $\lambda = 2\pi/k$ e $T = 2\pi/\omega$, ne segue che

$$\tau \cdot \delta\omega = 2\pi \quad \text{e} \quad L \cdot \delta k = 2\pi.$$

Abbiamo già ottenuto queste stesse relazioni nel paragrafo precedente partendo da considerazioni diverse.

Dal punto di vista esposto la mancanza di coerenza è dovuta al *ritardo* di un treno d'onda rispetto ad un altro. Perciò, anziché di coerenza spaziale, si parla di *coerenza temporale* e la durata τ del treno d'onda è detta *tempo di coerenza*. La coerenza temporale è la stessa cosa che la coerenza legata alla *larghezza* $\Delta\omega$ *dell'intervallo spettrale* occupato dalla luce. In virtù della (29.8) il tempo di coerenza τ_{coer} è legato alla larghezza $\Delta\omega$ dell'intervallo spettrale dalla relazione

$$\tau_{\text{coer}} \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega} \approx \frac{1}{\Delta\nu}. \tag{30.4}$$

Più piccolo è $\Delta\nu$, più grande è il tempo di coerenza e più elevato è l'ordine d'interferenza che può essere osservato per un ν dato. La differenza di cammino massima per cui si ha ancora interferenza è data dalla relazione

$$L \approx c\tau_{\text{coer}} = \lambda \frac{\nu}{\delta\nu} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}.$$

Essa si chiama *lunghezza di coerenza*. Ad una data lunghezza di coerenza

corrisponde un ordine d'interferenza massimo

$$N_{max} = \frac{\nu}{\delta\nu} = \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

I valori numerici dei parametri $\delta\nu$, τ e L sono molto differenti per la luce emessa dai corpi incandescenti e per la luce generata dai laser a gas. La larghezza della riga spettrale $\delta\nu$ delle migliori sorgenti termiche « monocromatiche » che possono essere realizzate in laboratorio è dell'ordine 10^8 Hz, mentre con i laser si può ottenere $\delta\nu \sim 10^2$ Hz ed anche meno. I corrispondenti tempi di coerenza sono 10^{-8} e 10^{-2} s e le lunghezze di coerenza da 1 m a 10^6 m. L'utilizzazione dei laser in qualità di sorgenti di luce permette di osservare l'interferenza per una differenza di cammino dei raggi uguale ad alcuni chilometri. L'ordine d'interferenza massimo che si può osservare dipende in questo caso non dal grado di monocromaticità della luce generata dal laser, ma dalla non omogeneità dell'atmosfera terrestre e dalle possibilità di realizzazione di un grande dispositivo interferenziale che sia stabile.

4. Per la luce bianca $\delta\lambda \sim \lambda$, cioè $N \sim 1$. Sembrerebbe che in luce bianca non si debbano osservare frange d'interferenza. Infatti è così, se si utilizzano rivelatori di luce come cellule fotoelettriche, bolometri o pile termoelettriche, che possiedono press'a poco la stessa sensibilità nelle diverse regioni dello spettro. Ma l'occhio è un *rivelatore selettivo*, cioè la sua sensibilità a differenti lunghezze d'onda è differente (si veda la curva di visibilità dell'occhio umano nella figura 82). Per questa ragione l'occhio distingue in luce bianca circa una decina di frange d'interferenza. Le frange sono colorate, poiché per la differenza di lunghezza d'onda le frange di differenti colori sono di larghezza differente e sono spostate le une rispetto alle altre. Soltanto al centro del sistema, dove le onde emesse dalle due sorgenti arrivano con fasi identiche, è verificata la condizione di massimo d'intensità per tutte le lunghezze d'onda, e quindi vi è una frangia *acromatica*, cioè una frangia brillante non colorata. Nell'esperimento con lo specchio di Lloyd la frangia acromatica è scura, il che dimostra che la riflessione della luce su uno specchio è accompagnata dalla variazione della fase dell'onda di π (si veda i §§ 33, 65). È evidente che nelle condizioni sperimentali ordinarie (fig. 119) la frangia acromatica non è visibile, poiché il raggio riflesso da uno specchio percorre un cammino ottico più grande di quello del raggio diretto. Per rendere questa frangia visibile, è necessario interporre sul cammino del raggio diretto una lastra a facce piane e parallele che sposta verso l'alto tutto il sistema di frange d'interferenza.

§ 31. *Correlazione e coerenza della luce*

1. Per dare una definizione quantitativa della nozione di coerenza è necessario tener conto del fatto che le vibrazioni luminose reali *non sono sinusoidali*. L'intensità di campo in ogni punto dello spazio può essere rappresentata dall'integrale di Fourier (29.4), cioè da una sovrapposizione di vibrazioni sinusoidali di diverse frequenze. Se il dominio $\Delta\omega$ della regione occupata da queste frequenze è piccolo rispetto alle frequenze ω che concorrono alla sovrapposizione, la vibrazione risultante e la luce che essa rappresenta sono dette *quasi-monocromatiche*. Dopo aver scelto all'interno dell'intervallo $\Delta\omega$ una frequenza arbitraria ω_0, scriviamo la vibrazione quasi-monocromatica nella forma

$$E(t) = a(t)e^{i\omega_0 t}, \tag{31.1}$$

dove $a(t)$ è l'ampiezza complessa la cui variazione è lenta rispetto a quella della funzione $e^{i\omega_0 t}$. Essa non è definita in modo perfettamente univoco, poiché il suo valore dipende dalla scelta della frequenza ω_0. Una vibrazione definita dalla formula (31.1) è detta *modulata*.

La modulazione può provocare una lenta variazione dell'ampiezza (reale) di una vibrazione o della sua fase (iniziale). Nel primo caso si tratta di una *modulazione d'ampiezza* e nel secondo caso di una *modulazione di fase*. Possono anche variare simultaneamente sia l'ampiezza, sia la fase. Nel caso di luce quasi-monocromatica emessa da sorgenti di luce reali, l'ampiezza e la fase variano in modo disordinato in funzione del tempo e sono *funzioni aleatorie* del tempo. Pertanto nello studio della luce reale, ivi compresa anche la luce quasi-monocromatica, non si può fare a meno di utilizzare *metodi statistici*. Per semplicità trascuriamo il carattere vettoriale delle vibrazioni luminose considerandole vibrazioni scalari.

È importante notare che in conseguenza della elevata frequenza delle vibrazioni ottiche tutti i ricevitori di luce esistenti non permettono di registrare le variazioni dell'intensità dei campi luminosi in un tempo dell'ordine del periodo delle vibrazioni luminose. Questi ricevitori non permettono neppure di seguire le variazioni dei flussi luminosi dovuti alle variazioni aleatorie delle ampiezze e delle fasi delle vibrazioni. Si riesce soltanto a misurare i *quadrati delle intensità* mediate su intervalli di tempo che sono lunghi non soltanto rispetto al periodo delle vibrazioni luminose, ma anche rispetto ai tempi durante i quali variano aleatoriamente le ampiezze e le fasi di queste vibrazioni. Nel seguito supporremo che i flussi luminosi siano registrati da ricevitori con un tempo di risposta grande.

Supponiamo inoltre che i flussi luminosi siano in media *stazionari*, cioè il valore quadratico medio dell'intensità di campo in ogni punto dello spazio è lo stesso in ogni istante e non dipende dalla posizione, nella scala del tempo, dell'intervallo di tempo nel quale s'effettua la media. Il quadrato

dell'intensità di campo può essere rappresentato nella forma

$$(\mathrm{Re}\,E)^2 = \left(\frac{E + E^*}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(E^2 + E^{*2}) + \frac{1}{2}EE^*.$$

Ponendo $a = a_0(t)e^{i\delta(t)}$, dove $a_0(t)$ e $\delta(t)$ sono l'ampiezza reale e la fase, quantità *lentamente variabili*, si ha

$$E^2 + E^{*2} = a_0^2[e^{2i(\omega_0 t+\delta)} + e^{-2i(\omega_0 t+\delta)}] = 2a_0^2\cos 2(\omega_0 t + \delta).$$

Questa quantità oscilla nel tempo molto rapidamente e eseguendo la media sparisce. Il valor medio della quantità $(\mathrm{Re}\,E)^2$ è determinato soltanto dall'ultimo termine $1/2EE^*$. Pertanto come misura dell'intensità delle vibrazioni si può prendere la quantità $\overline{EE^*}$.

2. Supponiamo ora che nel punto d'osservazione P all'istante t arrivino due vibrazioni emesse dalle sorgenti di luce S_1 e S_2 (fig. 113). Per arrivare nel punto P all'istante t queste vibrazioni debbono essere emesse da S_1 e S_2 negli istanti precedenti $t - \theta_1$ e $t - \theta_2$, dove θ_1 e θ_2 sono i tempi necessari alle vibrazioni per percorrere le distanze tra S_1 e S_2 ed il punto P. Per segnalare questa circostanza, indichiamo le vibrazioni considerate nel punto P con $E_1(t - \theta_1)$ e $E_2(t - \theta_2)$ rispettivamente. Per addizione di queste vibrazioni si ottiene la vibrazione risultante

$$E \equiv E(P, t) = E_1(t - \theta_1) + E_2(t - \theta_2).$$

Per trovare la sua intensità nel punto P moltiplichiamo questa espressione per la quantità complessa coniugata ed eseguiamo la media sul tempo. Si ottiene dunque

$$I = \overline{E_1(t - \theta_1)E_1^*(t - \theta_1)} + \overline{E_2(t - \theta_2)E_2^*(t - \theta_2)} + \\ + \overline{E_1(t - \theta_1)E_2^*(t - \theta_2) + E_1^*(t - \theta_1)E_2(t - \theta_2)}.$$

In virtù dell'ipotesi sulla stazionarietà (in media) dei flussi luminosi il primo termine del secondo membro non dipende da θ_1 e da t. Questo termine rappresenta semplicemente l'intensità I_1 della prima vibrazione nel punto P

$$I_1 = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E_1(t - \theta_1)E_1^*(t - \theta_1)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E_1(t)E_1^*(t)\,dt,$$

dove τ è la larghezza dell'intervallo di tempo sul quale è effettuata la media. Analogamente, il secondo termine è l'intensità I_2 della seconda vibrazione. Per la stessa ragione l'ultimo termine (termine interferenziale) non dipende da t, né da θ_1 e θ_2 separatamente. Questo termine è soltanto funzione della differenza $\theta = \theta_2 - \theta_1$, cioè del tempo di ritardo della seconda vibrazione rispetto alla prima. Pertanto si può porre

$$\overline{E_1(t_1 - \theta_1)E_2^*(t - \theta_2)} = \overline{E_1(t)E_2^*(t - \theta)} = F_{12}(\theta), \tag{31.2}$$

dove $F_{12}(\theta)$ è una funzione complessa che caratterizza il *grado di correlazione* delle vibrazioni considerate nel punto P. Essa si chiama *funzione di correlazione* delle vibrazioni $E_1(t - \theta_1)$ e $E_2(t - \theta_2)$ o *funzione di correlazione mutua.*

In alcuni casi particolari le funzioni $E_1(t)$ e $E_2(t)$ possono diventare *identiche.* Questo succede, per esempio, se entrambe le vibrazioni sono inviate da una stessa sorgente ma arrivano nel punto P per vie diverse. In questo caso la funzione $F_{12}(\theta)$ si dice *funzione d'autocorrelazione*; la si può indicare con $F_{11}(\theta)$ ma noi utilizzeremo la notazione $F(\theta)$. Per $\theta = 0$ la funzione d'autocorrelazione diventa $\overline{|E_1(t - \theta_1)|^2}$, cioè si trasforma nell'intensità I_1 della vibrazione nel punto P.

La funzione $F_{12}(\theta)$ dipende da I_1 e da I_2, cioè dalle intensità delle vibrazioni che si combinano nel punto P. Se poniamo

$$F_{12}(\theta) = \sqrt{I_1 I_2} f_{12}(\theta), \tag{31.3}$$

si ottiene la *funzione di correlazione normalizzata* che dipende soltanto dal tempo di ritardo θ, ma non dipende più da I_1 e da I_2. In termini di questa funzione, l'intensità risultante nel punto P è rappresentata dall'espressione

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\,[f_{12}(\theta)]. \tag{31.4}$$

Per una luce quasi-monocromatica $E_1(t) = a_1(t)e^{i\omega_0 t}$, $E_2(t) = a_2(t)e^{i\omega_0 t}$, di modo che

$$\overline{a_1(t)a_2^*(t - \theta)}\, e^{i\omega_0\theta} = \sqrt{I_1 I_2} f_{12}(\theta). \tag{31.5}$$

Quest'ultima formula mostra che $f_{12}(\theta)$ è una funzione rapidamente variabile del tempo di ritardo θ. Dividendo questa funzione per la funzione $e^{i\omega_0\theta}$ che varia in modo ugualmente rapido, si ottiene una funzione lentamente variabile

$$\gamma_{12}(\theta) = f_{12}(\theta)e^{-i\omega_0\theta}, \tag{31.6}$$

che si chiama *grado complesso di coerenza delle vibrazioni*, ed il suo modulo $|\gamma_{12}(\theta)| = |f_{12}(\theta)|$ si dice semplicemente *grado di coerenza delle vibrazioni nel punto P*. Quindi,

$$\overline{a_1(t)a_2^*(t - \theta)} = \sqrt{I_1 I_2}\,\gamma_{12}(\theta), \tag{31.7}$$

cioè $\gamma_{12}(\theta)$ è la *funzione di correlazione mutua normalizzata per le ampiezze $a_1(t)$ ed $a_2(t)$*. D'altra parte,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\,[\gamma(\theta)e^{i\omega_0\theta}]. \tag{31.8}$$

Ponendo $\gamma_{12}(\theta) = |\gamma_{12}(\theta)|e^{i\delta}$, scriviamo l'ultimo risultato in forma reale

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}(\theta)|\cos(\omega_0\theta + \delta). \tag{31.9}$$

Questa formula differisce dalla formula (26.7) stabilita per le vibrazioni ri-

gorosamente sinusoidali per la presenza di un fattore supplementare $|\gamma_{12}(\theta)|$ che figura nel termine interferenziale e per il termine supplementare lentamente variabile $\delta(\theta)$ che compare nella differenza di fase. I valori delle ampiezze reali $|a_1|$ e $|a_2|$ e delle corrispondenti intensità I_1 ed I_2 non dipendono dalla scelta della frequenza intermedia ω_0 nell'intervallo di spettro $\Delta\omega$ della luce quasi-monocromatica. La scelta di ω_0 non può influenzare la fase totale $\omega_0\theta + \delta$ che figura nella (31.9), ma la fase supplementare δ evidentemente dipende dalla scelta di ω_0. La fase $\omega_0\theta + \delta$ determina le variazioni spaziali più rapide dell'intensità di campo luminoso, cioè le variazioni che appaiono nel passaggio da una frangia d'interferenza ad un'altra. Data la lentezza di variazione della funzione $|\gamma_{12}(\theta)|$ si possono trascurare le sue variazioni nel passaggio da una frangia ad un'altra. Allora ai massimi d'intensità $\cos(\omega_0\theta + \delta)$ sarà uguale a $+1$ ed ai minimi a -1. Pertanto si ha

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}(\theta)|, \qquad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}(\theta)|.$$

Il coefficiente di visibilità delle frange d'interferenza è quindi

$$V \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\,|\gamma_{12}(\theta)|. \qquad (31.10)$$

Se le intensità delle vibrazioni sommate sono uguali ($I_1 = I_2$), si ha $V = |\gamma_{12}(\theta)|$. Per definizione la visibilità V non può essere superiore all'unità e la funzione $\gamma_{12}(\theta)$ non dipende dalle intensità dei fasci incidenti. Di conseguenza si ha sempre $|\gamma_{12}(\theta)| \leq 1$. Quando $|\gamma_{12}(\theta)| = 0$, si ha $V = 0$, cioè non ci sono frange d'interferenza. In questo caso le vibrazioni sono dette *incoerenti*. Se inoltre la funzione $\gamma_{12}(\theta)$ s'annulla per tutti i valori di θ, la sua incoerenza è *totale*. Allora in tutti i punti dello spazio si ha $I = I_1 + I_2$, cioè la *legge d'addizione fotometrica* delle intensità luminose è verificata. Questo caso è realizzato se sono sovrapposti fasci luminosi provenienti da sorgenti di luce indipendenti.

Se, invece, $\gamma_{12}(\theta) \neq 0$, si manifesta l'interferenza e le vibrazioni sono dette *coerenti*. La coerenza è *completa* se $|\gamma_{12}(\theta)|$ assume dappertutto il suo valore limite 1. In questo caso le frange d'interferenza sono particolarmente nette, cioè per I_1 ed I_2 date la visibilità V è massima. Questo caso è realizzato se vengono sovrapposti fasci luminosi rigorosamente monocromatici, con ugual periodo. In tutti gli altri casi (quando $0 < |\gamma_{12}(\theta)| < 1$) la coerenza è *parziale*. Quando si sposta il punto d'osservazione, il grado di coerenza di $|\gamma_{12}(\theta)|$ varia lentamente e di conseguenza varia lentamente anche la visibilità delle frange d'interferenza.

3. Finora abbiamo trattato la coerenza di due vibrazioni in *uno stesso punto* dello spazio. Ma si può anche parlare della coerenza di *uno stesso campo* in due punti dello spazio-tempo, $R_1(Q_1, t_1)$ e $R_2(Q_2, t_2)$. Questa questione può essere ricondotta alla precedente.

Siano Q_1 e Q_2 due punti qualsiasi dello spazio che si trovano nel campo

di radiazione considerato (fig. 131). Siano essi i centri di due orifizi infinitamente piccoli, praticati in uno schermo opaco, posto sul cammino di propagazione della luce. Lo schermo ostacolerà dappertutto la luce incidente, ma la farà passare attraverso gli orifizi. Questi ultimi lasciano passare non soltanto la luce diretta ma anche quella *diffratta*. In virtù del principio di Huygens gli orifizi infinitamente piccoli possono essere considerati come *sorgenti secondarie* puntiformi che inviano luce in tutte le direzioni dietro lo schermo. Consideriamo un punto d'osservazione P dietro lo schermo. Supponiamo che le vibrazioni emesse dai punti Q_1 e Q_2 negli istanti t_1 e t_2 arrivino nel punto P *simultaneamente*. Allora si può parlare di coerenza di queste vibrazioni nel senso dato sopra.

Per definizione noi chiamiamo le vibrazioni nei punti Q_1 e Q_2 agli istanti t_1 e t_2 (cioè nei punti spazio-temporali R_1 e R_2) *coerenti* o *incoerenti*, se
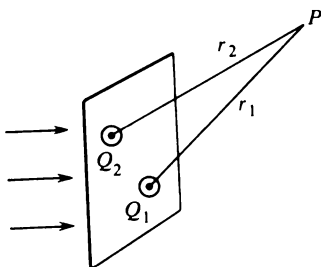
Fig. 131

sono coerenti o incoerenti le corrispondenti vibrazioni nel punto P. In questo caso noi definiamo il grado di coerenza $\gamma(\theta)$ con lo stesso valore che caratterizza le vibrazioni nel punto d'osservazione P.

In particolare, se i punti dello spazio Q_1 e Q_2 coincidono ma la luce arriva al punto P per vie diverse, i punti spazio-temporali $R_1(Q_1, t_1)$ e $R_2(Q_2, t_2)$ differiscono soltanto per gli istanti t_1 e t_2. In questo caso si tratta di *coerenza temporale*. Per $t_1 = t_2$ il grado di coerenza temporale è uguale a 1. Quando la differenza tra questi tempi aumenta il grado di coerenza diminuisce. Il valore massimo di $|t_1 - t_2|$ per il quale la coerenza sussiste ancora si dice *tempo di coerenza*. La distanza $v|t_1 - t_2|$ percorsa dalla luce in questo intervallo di tempo si chiama *lunghezza di coerenza*.

L'altro caso estremo si realizza quando i tempi t_1 e t_2 sono gli stessi ma i punti spaziali Q_1 e Q_2 non coincidono. Allora si tratta di *coerenza spaziale*. Mantenendo il punto Q_1 fisso, facciamo ruotare lo schermo insieme con il punto Q_2 attorno a Q_1. In questo caso il grado di coerenza $|\gamma_{12}|$ cambia. Il luogo geometrico dei punti dove γ_{12} s'annulla è una certa superficie che circonda il punto Q_1. Il volume limitato da questa superficie si dice *volume di coerenza* nelle vicinanze del punto Q_1.

I calcoli del grado di coerenza temporale possono essere sistematicamente utilizzati per determinare la larghezza ammissibile di una regione spettrale, mentre i calcoli del grado di coerenza spaziale servono per determinare le dimensioni ammissibili delle sorgenti di luce per poter osservare l'interferenza.

4. Consideriamo un esempio semplice che illustra la natura e le proprietà della funzione d'autocorrelazione e del grado di coerenza, l'esempio fornito da una « sinusoide limitata »: $E(t) = \sin \omega_0 t$ nell'intervallo $0 < t < \tau$ e $E(t) = 0$ fuori di questo intervallo. Utilizziamo la forma complessa $E(t) = \frac{1}{i} e^{i\omega_0 t}$ e prendiamo il valore τ come intervallo di tempo sul quale effettuare la media. Risulta allora che $I_1 = I_2 = 1$. Il prodotto $E(t)E^*(t - \theta)$ è diverso da zero soltanto entro i limiti $\theta < t < \tau$. Pertanto soltanto per $\theta < \tau$ la funzione $\gamma(\theta)$ può essere diversa da zero. Per $\theta > \tau$ essa s'annulla. Nel primo caso

$$\overline{E(t)E^*(t - \theta)} = \frac{1}{\tau} \int_{\theta}^{\tau} e^{i\omega_0 \theta} \, dt = \frac{\tau - \theta}{\tau} e^{i\omega_0 \theta} = F(\theta) = f(\theta).$$

Quindi,

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} 1 - \theta/\tau & \text{per} \quad \theta < \tau, \\ 0 & \text{per} \quad \theta > \tau. \end{cases} \tag{31.11}$$

Saremmo giunti allo stesso risultato se avessimo fatto l'ipotesi che la sorgente di luce emetta treni d'onda di uguale durata τ che si susseguono in modo disordinato, ed inoltre ogni treno d'onda venga diviso in due parti che arrivano nel punto d'osservazione per vie diverse. Ciò segue direttamente dal fatto che i differenti treni d'onda emessi dalla sorgente sono *statisticamente indipendenti* e quindi non interferiscono tra loro. Dalla formula (31.11) segue il risultato fisicamente evidente che le vibrazioni sono coerenti se il tempo di ritardo θ è inferiore alla durata τ del treno d'onda. Nel caso contrario esse sono incoerenti. Quindi τ è il tempo di coerenza delle vibrazioni.

5. Il modulo della funzione $|\gamma_{12}(\theta)|$ può essere facilmente calcolato mediante la formula (31.10), misurando preliminarmente la visibilità V delle frange e le intensità I_1 ed I_2 dei fasci che si sovrappongono nel punto d'osservazione. È molto più difficile misurare la fase supplementare δ che compare nella formula (31.9). È particolarmente difficile farlo se le sorgenti di luce sono righe spettrali strette, poiché per farlo è necessario confrontare, *in uno stesso* punto del sistema di frange, gli ordini d'interferenza delle frange prodotte dalla sorgente considerata con gli ordini d'interferenza delle frange prodotte da una sorgente di frequenza ω_0. L'ordine d'interferenza N di una frangia di intensità massima prodotta dalla prima sorgente si può

scrivere $\omega_0\theta + \delta = 2\pi N$. Nello stesso punto la seconda sorgente non presenta il massimo. A questo punto corrisponde un ordine d'interferenza frazionario che soddisfa la condizione $\omega_0\theta = 2\pi N_0$. Di qui $\delta = 2\pi(N - N_0)$. In linea di principio è possibile quindi determinare sperimentalmente non soltanto il modulo, ma anche l'argomento del grado di coerenza complesso $\gamma_{12}(\theta)$. Simultaneamente si può determinare la funzione di correlazione $F_{12}(\theta)$.

6. La funzione d'autocorrelazione $F(\theta)$ è legata alla densità spettrale di radiazione $I_\omega(\omega)$ da una relazione molto importante. Per stabilire questo legame scriviamo in base alla definizione di funzione d'autocorrelazione

$$F(\theta) = \overline{E(t)E^*(t-\theta)} = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t)E^*(t-\theta)\,dt. \qquad (31.12)$$

Sostituiamo qui

$$E^*(t-\theta) = \int_0^\infty a^*(\omega)e^{-i\omega(t-\theta)}\,d\omega$$

ed invertiamo l'ordine d'integrazione rispetto a t e ω. L'utilizzazione della formula (29.5) conduce al seguente risultato:

$$F(\theta) = \frac{2\pi}{\tau}\int_0^\infty a^*(\omega)a(\omega)e^{i\omega\theta}\,d\omega.$$

Ma $(2\pi/\tau)a^*(\omega)a(\omega)$ è la densità spettrale di radiazione $I_\omega(\omega)$ (si veda il § 29, punto 5). Quindi,

$$F(\theta) = \int_0^\infty I_\omega(\omega)e^{i\omega\theta}\,d\omega. \qquad (31.13)$$

Questa formula rappresenta lo sviluppo di Fourier della funzione $F(\theta)$, e di conseguenza

$$I_\omega(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta)e^{-i\omega\theta}\,d\theta. \qquad (31.14)$$

La formula (31.14) può essere espressa in un'altra forma; per farlo osserviamo che, data la stazionarietà del flusso luminoso, nella formula (31.12) i limiti d'integrazione si possono sostituire con altri, a condizione che la larghezza dell'intervallo d'integrazione resti costante. Basandosi su quest'osservazione, è facile dimostrare che la funzione d'autocorrelazione verifica la relazione $F(-\theta) = F^*(\theta)$. Si può quindi scrivere la formula

(31.14) nella forma

$$I_\omega(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty F(\theta)e^{-i\omega\theta}\,d\theta + \int_0^\infty F^*(\theta)e^{i\omega\theta}\,d\theta\right]. \qquad (31.15)$$

Questa relazione si scrive anche

$$I_\omega(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\theta)e^{-i\omega\theta}\,d\theta, \qquad (31.16)$$

ed è interpretata nel senso che il primo membro è uguale alla parte reale del secondo membro. La relazione (31.13) permette di trovare la funzione di correlazione $F(\theta)$ conoscendo il valore sperimentale della densità spettrale di radiazione $I_\omega(\omega)$. La relazione inversa (31.16) permette di trovare la densità spettrale $I_\omega(\omega)$ conoscendo la funzione di correlazione $F(\theta)$.

Questo è il procedimento utilizzato da Michelson per studiare la struttura delle righe spettrali mediante il suo interferometro. Egli misurava la visibilità delle frange d'interferenza osservate nell'interferometro e lo sfasamento δ che compare nella formula (31.9) ed in base a questi dati calcolava la densità spettrale di radiazione $I_\omega(\omega)$. A quell'epoca tutti gli altri metodi erano meno precisi di questo. Più tardi il metodo di Michelson ha ceduto il posto a metodi fondati sull'impiego degli interferometri a onde multiple.

§ 32. *Teorema di Van Cittert-Zernike*

Calcoliamo il grado complesso di coerenza spaziale γ_{12} per i punti Q_1 e Q_2 di uno schermo illuminato da sorgenti di luce quasi-monocromatiche estese (fig. 132). I punti Q_1 e Q_2 debbono essere considerati come sorgenti
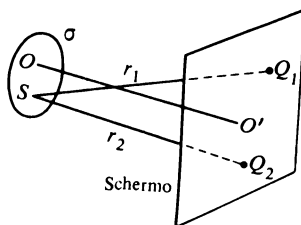
Fig. 132

secondarie di onde, conformemente alla definizione data al § 31, punto 3. Supponiamo che il punto d'osservazione P sia equidistante da Q_1 e da Q_2.

In questa condizione al posto di onde che si sovrappongono nel punto P, si possono considerare i campi creati dalla sorgente primaria nei punti Q_1 e Q_2. Quindi i nostri calcoli partono dall'ipotesi che il tempo di ritardo θ sia nullo. Tuttavia, data la lentezza di variazione della funzione $\gamma_{12}(\theta)$, i valori di $\gamma_{12}(\theta)$ calcolati sono validi non soltanto per $\theta = 0$, ma anche per piccoli valori di θ, finché la visibilità delle frange d'interferenza non subirà modifiche notevoli.

Per semplicità prendiamo come sorgente di luce un piccolo elemento di superficie σ il cui piano è parallelo a quello dello schermo. Il mezzo tra la sorgente σ e lo schermo sia omogeneo e la velocità della luce in questo mezzo sia v. Le dimensioni lineari della superficie emissiva σ debbono essere piccole rispetto alla sua distanza dallo schermo. Si suppone inoltre che siano piccoli gli angoli tra la « linea media » OO' e le rette che uniscono il punto S della sorgente ai punti Q_1 e Q_2.

Dividiamo la sorgente σ in piccoli elementi di superficie le cui dimensioni lineari siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda λ. Assimiliamo questi elementi a sorgenti puntiformi incoerenti che emettono onde sferiche. I campi d'onda prodotti da questa sorgente nei punti Q_1 e Q_2 sono definiti dalle espressioni

$$\frac{A_m(t - r_{1m}/v)}{r_{1m}} e^{i(\omega_0 t - kr_{1m})} \quad \text{e} \quad \frac{A_m(t - r_{2m}/v)}{r_{2m}} e^{(i\omega_0 t - kr_{2m})},$$

dove r_{1m} e r_{2m} sono le distanze tra la m-esima sorgente ed i punti Q_1 e Q_2 rispettivamente. Le ampiezze delle vibrazioni risultanti nei punti Q_1 e Q_2 sono

$$a_1(t) = \sum_m \frac{A_m(t - r_{1m}/v)}{r_{1m}} e^{-ikr_{1m}},$$

$$a_2(t) = \sum_m \frac{A_m(t - r_{2m}/v)}{r_{2m}} e^{-ikr_{2m}}.$$

Calcoliamo ora la funzione di correlazione mutua delle ampiezze a_1 ed a_2, cioè la media sul tempo del prodotto $a_1(t)a_2^*(t - \theta)$, supponendo che $\theta = 0$. Moltiplicando membro a membro le somme precedenti, notiamo che tutti i termini con m differenti s'annullano data l'indipendenza statistica delle corrispondenti sorgenti di luce elementari. Il risultato definitivo è

$$\overline{a_1 a_2^*} = \sum_m \frac{\overline{A_m(t - r_{1m}/v)A_m^*(t - r_{2m}/v)}}{r_{1m}r_{2m}} e^{ik(r_{2m} - r_{1m})}.$$

(Al calcolo della media è soggetto soltanto il numeratore poiché tutte le altre grandezze non dipendono dal tempo). Supponendo che per tutti i valori

di m le differenze $r_{2m} - r_{1m}$ siano piccole rispetto alla lunghezza di coerenza, si può trascurare la differenza tra le variabili indipendenti $t - r_{1m}/v$ e $t - r_{2m}/v$. Quindi, in virtù dell'omogeneità supposta dei flussi luminosi, si possono anche omettere le variabili indipendenti stesse, cioè

$$\overline{A_m(t - r_{1m}/v)A^*_m(t - r_{2m}/v)} = \overline{A_m A^*_m}.$$

In tutti i casi d'interesse pratico il numero di sorgenti di luce elementari è molto grande, di modo che esse possono essere considerate ripartite uniformemente sulla superficie σ con una certa densità superficiale. Allora si possono sostituire le somme con integrali. Se $I(S)$ è l'intensità di luce creata dall'unità di superficie della sorgente ad una distanza unitaria si ha $\overline{A_m A^*_m} = I(S)\,dS$. Le intensità nei punti Q_1 e Q_2 sono rispettivamente

$$I_1 \equiv I(Q_1) = \int_\sigma \frac{I(S)\,dS}{r_1^2}, \qquad I_2 \equiv I(Q_2) = \int_\sigma \frac{I(S)\,dS}{r_2^2}.$$

Introducendo il fattore di normalizzazione $1/\sqrt{I_1 I_2}$, otteniamo

$$\gamma_{12}(0) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \int \frac{I(S)}{r_1 r_2}\, e^{ik(r_1 - r_2)}\, dS. \qquad (32.1)$$

Per illustrare il significato del risultato ottenuto utilizziamo la seguente analogia. Fissiamo il punto Q_2 e lasciamo che il punto Q_1 occupi differenti posizioni sullo schermo. Sostituiamo la superficie emissiva σ con un'apertura σ' della stessa forma praticata in uno schermo opaco e supponiamo che su quest'apertura cada un'onda sferica che converge nel suo centro Q_2; il campo nei diversi punti dell'apertura è

$$\psi = \frac{I(S)}{\sqrt{I_1 I_2}}\, e^{i(\omega_0 t + k r_2)} \equiv \psi_0(r_2) e^{i\omega_0 t}.$$

Supponiamo che ogni elemento dS del foro emetta, secondo il principio di Huygens, un'onda sferica secondaria il cui campo nel punto P_1 sia definito dall'espressione $\dfrac{1}{r_1}\, \psi_0 e^{i(\omega_0 t - k r_1)}$. Allora in seguito alla sovrapposizione di queste onde secondarie si produce un'onda la cui ampiezza complessa è data dalla formula (32.1). Ma questa è proprio la soluzione del problema della diffrazione di un'onda sferica su un orifizio σ' fornita dal principio di Huygens (si veda il § 39). Quindi, *il grado complesso di coerenza mutua nei punti Q_1 e Q_2 è uguale all'ampiezza complessa nel punto Q_1 della corrispondente onda diffratta.*

Questo è l'enunciato del *teorema di Van Cittert-Zernike* il quale riduce il calcolo del grado di coerenza mutua γ_{12} al corrispondente problema di diffrazione.

§ 33. *Interferenza nelle lamine e nelle lastre a facce piane e parallele*

1. Quando si illumina una lamina o pellicola sottile, ha luogo una sovrapposizione delle onde, emesse da un'unica sorgente, riflesse dalle facce anteriore e posteriore della pellicola. Ciò può condurre alla formazione di frange d'interferenza. Se la luce è bianca, le frange d'interferenza sono colorate, e perciò il fenomeno si chiama *colori nelle lamine sottili*. Esso si osserva facilmente sulle pareti delle bolle di sapone, sulle pellicole sottili di olio o di petrolio galleggianti sulla superficie dell'acqua, sulle pellicole che appaiono sulla superficie dei metalli che hanno subìto la tempra, ecc.

2. Consideriamo dapprima una lastra a facce piane e parallele di spessore d e di indice di rifrazione n illuminata da una sorgente di luce puntiforme S (fig. 133,*a*). Nella riflessione sulle facce anteriore e posteriore della lastra
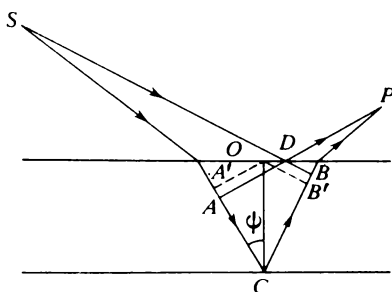
Fig. 133, *a*

si produce una differenza di cammino ottico tra le corrispondenti onde riflesse. Calcoliamola in un punto qualsiasi P.

Siano $SACBP$ e SDP i raggi riflessi che giungono in questo punto. Tracciamo dal punto D i piani DA e DB perpendicolari ai corrispondenti raggi rifratti. Se la lastra è sottile, la differenza di cammino dei raggi è $\Delta = (SACBP) - (SDP)$. Dal punto O, situato sulla faccia anteriore a metà tra i punti A e B, tracciamo i piani OA' e OB' (indicati nella figura con il tratteggio) paralleli ai piani DA e DB. Allora si ha: $\Delta = (A'CB') = 2(A'C) = 2\,nd\cos\psi$, dove ψ è l'angolo di rifrazione.

È però necessario introdurre qui una correzione. Al limite quando lo spessore della lastra tende a zero, la nostra formula dà $\Delta = 0$. Pertanto in questo caso nel punto P dovrebbe aver luogo un rafforzamento delle vibrazioni. Ma ciò è impossibile visto che una lastra infinitamente sottile non può esercitare alcuna azione sulla propagazione della luce. Le onde riflesse dalle facce anteriore e posteriore della lastra devono annullarsi mutuamente per interferenza. Le fasi di queste onde debbono essere opposte, cioè la

differenza di cammino Δ per $d \rightarrow 0$ deve tendere a $\lambda/2$. Perciò nell'espressione precedente è necessario addizionare o sottrarre (il che è lo stesso) la quantità $\lambda/2$. Si ottiene quindi [1)]

$$\Delta = 2dn\cos\psi + \frac{\lambda}{2}. \tag{33.1}$$

L'introduzione di questa correzione, come sarà dimostrato nel § 65, è causata dalla variazione di fase di π che l'onda subisce riflettendosi su una delle facce della lastra. Sperimentalmente questo fenomeno è confermato dall'osservazione dell'interferenza in luce bianca nel dispositivo di Lloyd (si veda la fine del § 30).

Tutti i ragionamenti ed i risultati restano validi anche quando il punto P si trova dall'altro lato della lastra (fig. 133,*b*). In questo caso i raggi riflessi
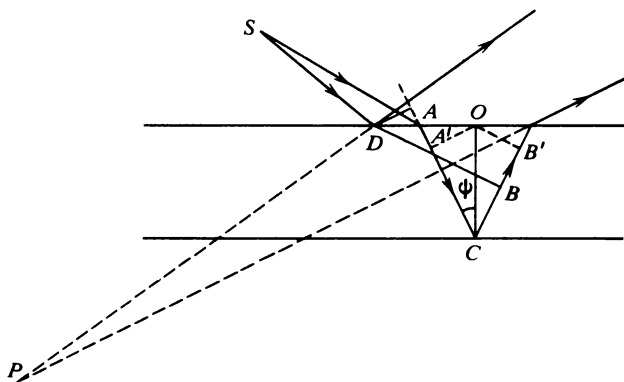
Fig. 133, *b*

sono divergenti e nel punto P non s'intersecano i raggi ma i loro prolungamenti. Per osservare l'interferenza è necessario che i raggi riflessi siano resi convergenti mediante una lente o uno specchio concavo. Allora le frange d'interferenza si possono osservare nel punto P' otticamente coniugato con il punto P.

La formula (33.1) è valida anche per lastre sottili di spessore variabile, a condizione di interpretare d come lo spessore della lastra nella zona dove si riflettono i raggi intersecantisi nel punto P. Una sorgente puntiforme può inviare soltanto due raggi convergenti nel punto P, quindi per una sorgente puntiforme monocromatica ogni punto dello spazio è caratterizzato da una differenza di cammino dei raggi riflessi ben definita. Pertanto un'interfe-

---

[1)] L'insufficienza dell'argomentazione riportata è stata già notata nella deduzione della formula (2.2).

renza stabile deve essere osservata *in ogni punto dello spazio*. Allora si dice che le corrispondenti frange d'interferenza *non sono localizzate* (o lo sono dappertutto).

3. La situazione cambia con una sorgente di luce estesa. In questo caso nel punto P arrivano due raggi riflessi da ogni punto della sorgente. Il punto di riflessione sulla lastra, gli angoli d'incidenza e di riflessione e quindi la differenza di cammino per ogni coppia di raggi sono diversi. Dunque, non si potrà osservare alcun'interferenza stabile nel punto P.

Supponiamo però che il punto P si trovi in prossimità della lastra, per esempio coincida con il punto B. Allora, se lo spessore della lastra è piccolo, la riflessione avrà luogo praticamente in una stessa regione, cioè per uno stesso spessore d, indipendentemente dal punto della sorgente che emette i raggi. Se supponiamo che i raggi cadano sulla lastra in modo quasi normale (di modo che $\cos \psi$ ha una piccola variazione), la differenza di cammino Δ è funzione solo dello spessore d della lastra nel punto d'incidenza dei raggi. Le linee che si possono tracciare sulla superficie della lastra per indicare che lo spessore d è costante corrispondono a linee sulle quali la differenza di fase è costante. Sulla superficie della lastra, in luce ben monocromatica si vedono frange d'interferenza ciascuna delle quali è caratterizzata dalla condizione $d =$ costante. Queste frange sono dette *frange di uguale spessore*, e sono, per così dire, dipinte sulla lastra. Si dice che le frange sono *localizzate sulla lastra*. È ben evidente che le frange d'interferenza possono essere osservate non soltanto sulla lastra, ma anche in prossimità delle sue due facce. Ma la visibilità delle frange è massima sulla lastra stessa.

Per osservare queste frange è comodo utilizzare una lente convergente mediante la quale si può formare l'immagine della lastra su uno schermo. Visto che la lente non introduce una differenza di cammino supplementare, sullo schermo si forma anche l'immagine delle frange d'interferenza. La lente traspone il posto di localizzazione delle frange dalla superficie della lastra allo schermo. Osservando le frange di uguale spessore ad occhio nudo è necessario accomodare l'occhio sulla lastra. La lente è costituita dal cristallino e la retina è lo schermo. Lo strumento ottico utilizzato o l'occhio assume anche un'altra funzione utile. Il diaframma dello strumento o la pupilla dell'occhio delimitano, tra i raggi riflessi, fasci stretti nei limiti dei quali l'angolo ψ varia molto poco, il che favorisce l'apparizione di frange di ugual spessore.

In luce bianca le frange d'interferenza sono colorate poiché la differenza di fase $\dfrac{4\pi dn \cos \psi}{\lambda} + \pi$ dipende da λ e sono realizzabili soltanto *piccoli ordini* d'interferenza. Per questa ragione la pellicola deve essere sottile: il suo spessore non deve essere superiore ad una o due lunghezze d'onda. Se lo spessore della pellicola è uguale ad una frazione di lunghezza d'onda, la differenza di fase tende a π e la pellicola diventa oscura.

Se entrambe le facce della pellicola sono piane, le frange d'interferenza sono rettilinee e parallele alla linea d'intersezione dei corrispondenti piani. Queste frange sono osservate, per esempio, in un cuneo, cioè in uno strato d'aria sottile compreso tra due lastre di vetro a facce parallele sovrapposte, tra le quali sia stato interposto un foglio di carta sottile, da un solo lato. Ma se le superfici delle lastre di vetro sovrapposte sono irregolari, le frange di ugual spessore presentano forme irregolari. Su questo fenomeno è basato un *metodo di controllo* interferenziale delle superfici molto sensibile per determinare il loro piano-parallelismo. In questo metodo la superficie da verificare è posta su una superficie piana campione e, illuminando il sistema, si osserva la forma delle frange d'interferenza prodotte dallo strato formatosi. Il metodo è utilizzato anche per il controllo delle superfici sferiche o paraboliche nel corso della loro fabbricazione.

4. L'interferenza nelle lamine sottili che abbiamo considerato sopra è una *interferenza a due onde.* Ci siamo limitati all'interferenza di sole due
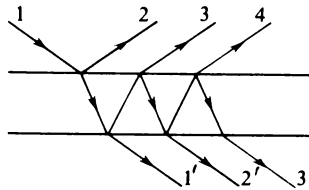
Fig. 134

onde, una formata nella riflessione di un raggio sulla faccia anteriore della lastra e l'altra risultante della riflessione sulla faccia posteriore. Abbiamo trascurato le riflessioni multiple e questo si può fare se il coefficiente di riflessione è piccolo. Se, invece, il coefficiente di riflessione è vicino all'unità, le riflessioni multiple non possono essere trascurate. Supponiamo, per esempio, che in ogni riflessione sia riflesso il 5% della luce incidente e che il 95% della luce restante sia trasmesso. Poniamo l'intensità della luce incidente uguale all'unità. Allora, come è facile calcolare, le intensità dei raggi riflessi e trasmessi (fig. 134) sono rappresentate dalla seguente tabella:

Raggi	1	2	3	4	1′	2′
Intensità	1	0,05	0,0451	0,00011	0,9025	0,00226

Dalla tabella si vede che le intensità dei raggi riflessi 2 e 3 sono quasi uguali, mentre l'intensità del raggio 4 è circa 100 volte più piccola. Si può dunque trascurare il raggio 4 e tutti i raggi di ordine superiore. Per i raggi trasmes-

si, l'intensità del raggio 2′ è circa 400 volte più piccola di quella del raggio 1′. Per questa ragione le frange d'interferenza in luce trasmessa appaiono su uno *sfondo chiaro* e quindi sono poco nette.

5. Consideriamo ora una lastra spessa le cui facce siano rigorosamente *piane e parallele.* Illuminiamola con un fascio luminoso cilindrico. Formalmente questo corrisponde al caso di una sorgente puntiforme S posta all'infinito (figg. 133,*a* e 133,*b*). I raggi riflessi sono paralleli, cioè il punto d'osservazione P è all'infinito. Se lo spessore d della lastra è costante, la differenza di cammino tra i raggi riflessi $2dn \cos\psi + \lambda/2$ dipende soltanto dall'angolo d'inclinazione dei raggi incidenti. L'angolo ψ può assumere valori qualsiasi, se la sorgente è estesa ed ha dimensioni angolari finite. Questo si può realizzare in pratica mettendo la sorgente di luce nel piano focale di una lente; in questo modo è come se la sorgente di luce fosse all'infinito. Il sistema di frange d'interferenza deve essere osservato su uno schermo all'infinito (cioè a grande distanza) o nel piano focale di una lente messa sul tragitto dei raggi riflessi. Ogni frangia d'interferenza, sullo schermo all'infinito, è caratterizzata dalla costanza del coseno dell'angolo ψ. Per questa ragione le frange d'interferenza osservate in queste condizioni sono chiamate *frange di uguale inclinazione* [1]. *Queste frange sono localizzate all'infinito.*

La lente traspone la regione di localizzazione dall'infinito al piano focale otticamente coniugato con il piano all'infinito. Come lente possiamo usare l'occhio accomodato all'infinito. In questo caso le frange di uguale inclinazione sono localizzate sulla *retina*. Se le frange sono esaminate con un cannocchiale quest'ultimo deve essere focalizzato all'infinito.

Per lamine spesse, la differenza di cammino ottico Δ è grande, cioè contiene migliaia e decine di migliaia di lunghezze d'onda. L'ordine d'interferenza delle frange è allora elevato e per produrre queste onde si richiede un alto grado di monocromaticità $\lambda/\delta\lambda$ della luce incidente.

6. Newton osservava le frange d'interferenza di uguale spessore in uno strato d'aria tra la superficie piana di una lastra di vetro ed una lente pianoconvessa la cui convessità era rivolta alla lastra. Le frange d'interferenza avevano la forma di anelli concentrici che sono stati chiamati *anelli di Newton*. Per realizzare questo esperimento il raggio di curvatura della superficie convessa della lente deve essere non inferiore ad un metro. Gli anelli si possono osservare con l'aiuto di un microscopio a fuoco lungo messo a fuoco sullo strato d'aria. Gli anelli ottenuti per riflessione sono più netti di quelli ottenuti per trasmissione. Per poter osservare un gran numero di anelli è necessario utilizzare una luce di monocromaticità piuttosto alta,

---

[1] Questo termine universalmente ammesso non esprime esattamente la natura del fenomeno. Ai raggi d'uguale inclinazione corrisponde non una linea, ma un punto: il fuoco della lente dove essi convergono.

per esempio, la luce gialla del sodio o la luce di una lampada a mercurio. La fig. 135 rappresenta l'aspetto degli anelli di Newton.

Per poter calcolare i raggi degli anelli completiamo la superficie convessa della lente fino ad ottenere una sfera (fig. 136). Se BD è il diametro, allora secondo un teorema geometrico ben noto $AB \cdot AD = AO^2 = x^2$. Visto che la curvatura della sfera e l'angolo OCA sono piccoli, il segmento AB può essere considerato come lo spessore d dello strato d'aria nel punto A.
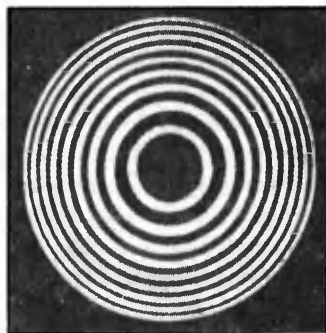
Fig. 135
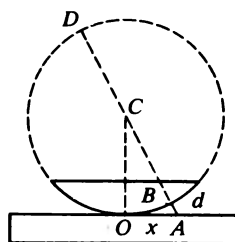
Fig. 136

Trascurando anche la differenza tra AD ed il diametro $2R$ della sfera, otteniamo

$$d = \frac{x^2}{2R}, \qquad \Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = \frac{x^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

Gli anelli brillanti si ottengono per $\Delta = m\lambda$, dove m è un numero intero. Da questa condizione troviamo il raggio x_m dell'anello brillante m-esimo

$$x_m = \sqrt{(m - 1/2)\lambda R} = \sqrt{\lambda R/2}\,\sqrt{2m - 1}. \qquad (33.2)$$

Analogamente il raggio del m-esimo anello scuro è

$$x_m = \sqrt{m\lambda R} = \sqrt{\lambda R/2}\,\sqrt{2m}. \qquad (33.3)$$

Quindi i raggi degli anelli brillanti successivi sono proporzionali alle radici quadrate dei numeri dispari 1, 3, 5, ..., e i raggi degli anelli scuri alle radici quadrate dei numeri pari 0, 2, 4, ... Queste leggi furono sperimentalmente stabilite da Newton. Come è stato menzionato al § 3 (punto 6), Newton vedeva nell'interferenza una manifestazione della *periodicità* dei processi luminosi. Osservando gli anelli d'interferenza, Newton calcolò persino, in modo sufficientemente esatto, un valore della grandezza che dà una misura quantitativa di questa periodicità. In termini di teoria ondulatoria, questa grandezza è la metà della lunghezza d'onda della luce.

Il centro degli anelli in luce riflessa è scuro, mentre gli anelli per trasmissione sono a centro chiaro. Questo risultato dimostra che nella riflessione su una delle frontiere dello strato d'aria la fase dell'onda riflessa varia di π. Come sarà mostrato nel § 65, il vettore elettrico modifica la sua fase di π ogni volta che è riflesso dalla superficie di un mezzo avente indice di rifrazione più grande. In caso contrario la sua fase non varia. Ciò conferma il seguente esperimento di Young. Data una lastra in flint ($n = 1{,}7$), poniamo su di essa una lente in crown ($n = 1{,}5$) e riempiamo l'interstizio tra loro con olio di sassofrasso il cui indice di rifrazione è intermedio tra quello dei due vetri. Allora la fase dell'onda cambia di π nel caso di riflessione sia sulla faccia superiore, sia su quella inferiore dello strato d'olio. Grazie a questo fatto gli anelli per riflessione risultano a centro chiaro e quelli per trasmissione a centro scuro.

7. Se nel dispositivo di Newton la lente viene spostata in alto parallelamente a sé stessa, aumenta lo spessore dello strato d'aria ed ogni circonferenza corrispondente ad una differenza di cammino data si restringe verso il centro. Gli anelli d'interferenza si rinserrano quindi verso il centro, poiché lungo ogni anello la lente continua a spostarsi. Dunque, il centro del sistema sarà alternativamente chiaro e scuro. Simultaneamente alla periferia del campo visivo appariranno nuovi anelli che, a loro volta, progrediscono verso il centro e spariscono. Si può dire che, se la lente si sposta continuamente in alto, scompaiono gli anelli dei primi ordini d'interferenza e vengono sostituiti da anelli di ordini più elevati. Questo procedimento permette di osservare l'interferenza di ordini crescenti. È ben chiaro che per questo è necessaria una luce di alto grado di monocromaticità.

Fizeau, che fu il primo a realizzare questo esperimento, utilizzava la luce gialla del sodio (le frange d'interferenza apparivano tra due lastre di vetro piane e parallele). Fizeau notò che a misura che aumentava il numero N di frange passate nel campo visivo, peggiorava la loro visibilità. Per $N = 490$ la visibilità raggiungeva il minimo, poi migliorava di nuovo; per $N = 980$ le frange acquistavano la nettezza iniziale. Un nuovo minimo si manifesta per $N = 1470$ ed il massimo di visibilità successivo per $N = 1960$ ecc. Fizeau riuscì a notare 52 massimi e concluse che la riga gialla del sodio doveva essere doppia, cioè composta di due righe spettrali molto ravvicinate di lunghezze d'onda λ e $\lambda' > \lambda$.

È facile trovare la distanza tra queste righe $\lambda' - \lambda$. Come è stato mostrato al § 30, la prima sparizione delle frange ha luogo quando $\lambda' - \lambda = \lambda/2N$. Secondo le osservazioni di Fizeau $N = 490$. La lunghezza d'onda media della riga gialla del sodio è $\approx 589{,}3$ nm. Di qui $\lambda' - \lambda \approx 0{,}6$ nm.

Quest'esempio mostra come l'interferenza di ordine elevato può essere utilizzata per la separazione delle righe spettrali complesse composte di due righe ravvicinate.

§ 34. *Interferometro di Jamin*

1. Si dicono *interferometri* gli strumenti ottici di misura fondati sull'interferenza. Essi permettono di misurare con alto grado di precisione distanze lineari ed angolari, piccole differenze degli indici di rifrazione, di studiare la struttura delle righe spettrali, ecc. Il principio di funzionamento degli interferometri è essenzialmente lo stesso, ma le loro costruzioni sono adattate al tipo di problema che si vuole studiare.

2. L'*interferometro di Jamin* (1818-1886) è composto di due spesse (spessore non inferiore a 20 mm) lastre piano-parallele fabbricate in vetro molto omogeneo e montate su una piastra massiccia (fig. 137). Per gli studi nell'ultravioletto lontano le lastre sono fabbricate in vetro in quarzo o in fluorite. Affinché entrambe le lastre abbiano esattamente lo stesso spessore, esse sono tagliate da una stessa piastra. Le lastre sono disposte a circa
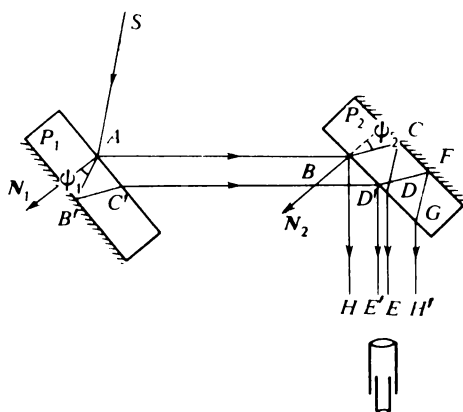
Fig. 137

45° rispetto alla linea che congiunge i loro centri. L'angolo tra le lastre si può far variare mediante speciali viti d'aggiustamento che fanno ruotare le lastre attorno agli assi verticale ed orizzontale. Più piccolo è questo angolo, più larghe sono le frange d'interferenza. Le facce posteriori riflettenti delle lastre sono argentate. Un raggio luminoso *SA*, riflettendosi sulle facce anteriore e posteriore della lastra P_1, si divide in due raggi paralleli *AB* e *C'D'* tra i quali vi è una differenza di cammino. Ciascuno di questi raggi si divide a sua volta in due dopo riflessione sulla lastra P_2. Tra i raggi mediani *DE* e *D'E'* appare una differenza di cammino

$$\Delta = 2dn(\cos \psi_2 - \cos \psi_1), \qquad (34.1)$$

dove d è lo spessore delle lastre, ψ_1 e ψ_2 sono gli angoli di rifrazione nelle lastre, n è il loro indice di rifrazione rispetto all'aria ambiente. Quindi, le la-

stre influenzano in modo opposto il valore di Δ. Le variazioni di fase nella riflessione non figurano nella formula (34.1) poiché esse sono uguali per entrambi i raggi che interferiscono e si compensano mutuamente. Se $\psi_1 = \psi_2$, si ha $\Delta = 0$. Se, invece, l'angolo tra le lastre è piccolo, è piccola anche la differenza di cammino. Questo permette di osservare l'interferenza di piccolo ordine, utilizzando luce bianca. I raggi DE e $D'E'$ interferiscono come i corrispondenti raggi nel caso di una sola ma sottile lastra piano-parallela.

Le due lamine spesse sono destinate alla separazione dei raggi AB e $C'D'$ il che permette di mettere sul loro cammino tubi riempiti con i gas da esaminare. La differenza di cammino tra raggi estremi e mediani, nonché tra raggi marginali, è molto grande e non è possibile produrre l'interferenza in luce bianca con questi raggi. La sorgente di luce è generalmente una fenditura verticale larga da uno a qualche millimetro ricoperta con un vetro smerigliato. Ad occhio nudo si discernono tre immagini della fenditura. L'immagine più luminosa (a destra) è formata dai raggi riflessi due volte dalle facce posteriori argentate delle lastre. L'immagine media, di luminosità intermedia, è formata dai raggi DE e $D'E'$. La meno luminosa (a sinistra) è formata dai raggi riflessi due volte dalle facce anteriori delle lastre. Se l'occhio s'accomoda sull'immagine media e se facciamo variare la differenza di cammino dei raggi, mediante la rotazione delle viti d'aggiustamento, in luce bianca si possono ottenere frange d'interferenza colorate di piccoli ordini. La frangia mediana acromatica, cioè la frangia alla quale corrisponde $\Delta = 0$, è bianca. Osservando questa frangia, si può facilmente seguire lo spostamento del sistema di frange.

Visto che la differenza di cammino Δ dipende dalla direzione dei raggi incidenti, l'interferometro di Jamin produce frange di uguale inclinazione. Per osservarle è comodo utilizzare un cannocchiale di piccolo ingrandimento ma di grande campo visivo puntato all'infinito. L'utilizzazione del cannocchiale non soltanto aumenta la larghezza delle frange ma possiede anche il seguente vantaggio: nel cannocchiale non penetrano i raggi estremi GH' e BH che creano uno sfondo chiaro e diminuiscono fortemente la nettezza delle frange d'interferenza. Per una dimostrazione in aula le frange d'interferenza possono essere prodotte senza dispositivi ottici supplementari, dirigendo i raggi DE e $D'E'$ direttamente su uno schermo bianco. In questo caso i raggi estremi debbono essere eliminati.

3. L'interferometro di Jamin è stato concepito per misurare piccole variazioni degli indici di rifrazione e perciò è anche detto *rifrattometro interferenziale*. Per ben comprendere il principio di funzionamento di questo rifrattometro immaginiamo che sul cammino di uno dei raggi che interferiscono, AB o $C'D'$, sia messa una lastra piano-parallela di spessore l di una sostanza avente indice di rifrazione n_2 (fig. 137). Allora la differenza di cammino tra i raggi varia di una quantità uguale a $(n_2 - n_1)l$, dove n_1 è l'indice di rifrazione dell'aria ambiente. Il sistema di frange subisce uno spo-

stamento di m frange, con $m = (n_2 - n_1)l/\lambda$. Il numero m (in generale frazionario) può essere determinato osservando le frange prodotte in luce bianca prima e dopo l'introduzione della sostanza studiata. L'esperienza mostra che uno spostamento di 1/10 d'interfrangia ($m = 1/10$) può essere osservato senza difficoltà.

La differenza degli indici di rifrazione può essere calcolata mediante la formula $n_2 - n_1 = m\lambda/l$. Se lo spessore dello strato di sostanza interposta è $l = 10$ cm e $\lambda = 500$ nm, per $m = 1/10$ otteniamo $n_2 - n_1 = 5 \cdot 10^{-7} \sim 10^{-6}$. In interferometri specialmente costruiti sono state misurate variazioni ancor più piccole. L'interferometro di Jamin permette quindi di misurare variazioni dell'indice di rifrazione molto piccole, per esempio dovute alle variazioni di temperatura di un gas o all'addizione di piccole quantità di altri gas. Ma è difficile misurare mediante questo apparecchio i valori assoluti dell'indice di rifrazione. Di solito l'interferometro di Jamin è utilizzato per misurare la differenza degli indici di rifrazione di un gas da studiare e di un gas il cui indice di rifrazione è ben conosciuto, ad esempio aria.

Per eseguire le misure sul cammino dei raggi AB e $C'D'$ vengono interposti tubi possibilmente identici. Prima si osservano le frange d'interferenza prodotte quando entrambi i tubi sono riempiti d'aria, poi si misura lo spostamento delle frange quando uno dei tubi è riempito con altro gas. Per compensare le grandi differenze di cammino tra i raggi viene utilizzato un dispositivo di compensazione composto da due lastre di vetro perfettamente identiche attaccate ad uno stesso asse in modo tale che si possa far variare l'angolo d'inclinazione tra le lastre. Una delle lastre è interposta sul tragitto di un raggio e l'altra sul cammino del secondo raggio. Facendo ruotare il compensatore senza variare l'angolo d'inclinazione tra le lastre si può portare nel campo visivo la frangia acromatica centrale e poi, misurando l'angolo di rotazione, determinare il numero di frange che sono passate attraverso il campo visivo.

4. Non è semplice precisare la forma delle frange prodotte dall'interferometro di Jamin. Per semplificare lo studio di questa questione supponiamo che $n = 1$. A questa ipotesi corrisponde la sostituzione di ogni lastra con una coppia di piani riflettenti paralleli infinitamente sottili (dei quali uno sarà argentato). Allora al posto della (34.1) si ottiene un'espressione più semplice

$$\Delta = 2d(\cos\psi_2 - \cos\psi_1).$$

Passiamo alla forma vettoriale di scrittura indicando con N_1 e N_2 le normali unitarie ai piani riflettenti (fig. 137). Indichiamo con s_1, s_1', s i vettori unitari rispettivamente dei raggi SA, AB e BH (gli stessi vettori definiscono le direzioni di tutti i raggi paralleli ai raggi SA, AB e BH). Si scriverà allora

$$\cos\psi_1 = (N_1 s_1) = -(N_1 s_1'), \qquad \cos\psi_2 = (N_2 s).$$

Secondo la legge della riflessione $s_1' = s - 2(N_2 s)N_2$, e quindi

$$\cos\psi_1 = -(N_1 s) + 2(N_2 s)(N_1 N_2).$$

Di conseguenza

$$\Delta = 2d(N_1 + N_2)s - 4d(N_2 s)(N_1 N_2).$$

Introduciamo due nuovi vettori

$$N = \frac{1}{2}(N_1 + N_2), \qquad \nu = \frac{1}{2}(N_2 - N_1).$$

Il primo di questi vettori è diretto lungo la bisettrice dell'angolo tra le normali N_1 e N_2 ed il secondo è perpendicolare a questa bisettrice. È evidente che

$$N_1 = N - \nu, \qquad N_2 = N + \nu.$$

Dopo la sostituzione di queste espressioni nella formula di Δ otteniamo

$$\Delta = -4d(1 - \nu^2)(\nu s) + 4d\nu^2. \qquad (34.2)$$

Durante il funzionamento del rifrattometro l'angolo tra le lastre e quindi la lunghezza del vettore ν sono sempre piccoli. Si possono dunque trascurare nella formula (34.2) i termini in ν^2.

5. Per le frange chiare $\Delta = m\lambda$, per quelle scure $\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, dove m è un numero intero. Se le frange sono studiate per mezzo di un cannocchiale, quest'ultimo riunisce i raggi paralleli nel piano focale dell'obiettivo, dove si forma il sistema primario di frange d'interferenza. Il campo visivo del cannocchiale è limitato e dunque può essere utilizzata soltanto una piccola parte del piano focale. Quando il cannocchiale ruota attorno al centro ottico dell'obiettivo, ruota anche la parte utile di piano focale. Se quest'ultima è piccola, si può senza commettere un grave errore, assimilare tutte queste parti ad elementi di superficie di una sfera fissa il cui centro coincide con il centro ottico dell'obiettivo. Chiameremo per brevità questa sfera *sfera focale dell'obiettivo.* (Se l'obiettivo non è una lente sottile, il ragionamento menzionato resta valido a condizione di sostituire il centro ottico con il secondo punto nodale dell'obiettivo.) Si può dire che il sistema primario di frange si forma su una sfera focale fissa, mentre l'osservatore lo esamina attraverso l'oculare del cannocchiale. Ruotando il cannocchiale, si vedono passare sulla sfera focale le diverse regioni del sistema di frange. È evidente che l'aspetto del sistema di frange non dipende assolutamente dal punto attorno il quale ruota il cannocchiale, esso è determinato soltanto dalla sua *direzione*.

Quindi la questione della forma delle frange si riduce alla questione della loro forma sulla sfera focale ausiliaria. In pratica, però, la rotazione del cannocchiale è sempre effettuata attorno all'asse verticale. Si può dunque

esaminare soltanto una stretta zona equatoriale della sfera focale. Questa zona può essere approssimativamente assimilata alla superficie di un cilindro il cui asse verticale passa attraverso il centro ottico dell'obiettivo. In seguito ci limitiamo a considerare le frange d'interferenza soltanto su questa « zona focale cilindrica ».

Dopo aver fissato le posizioni delle lastre dell'interferometro, riportiamo i vettori N e $\boldsymbol{\nu}$, ed anche il vettore unitario del raggio $\boldsymbol{s}$, da un'origine comune O che facciamo coincidere con il centro ottico dell'obietivo. Le direzioni di questi vettori vengono fatte coincidere con gli assi coordinati e la retta ad essi perpendicolare viene presa come asse Z. Riportiamo i diversi vettori unitari dei raggi $\boldsymbol{s}$ partendo dalla stessa origine O. Come si vede dalla (34.2), sulle superfici equifasi si ha $(\boldsymbol{\nu s})$ = costante, cioè queste superfici rappresentano piani paralleli perpendicolari al vettore $\boldsymbol{\nu}$. Tra questi piani si trovano anche piani equidistanti per i quali la differenza di cammino Δ contiene un numero intero o semintero di lunghezze d'onda. Questi piani intersecano la sfera focale lungo certe curve che sono appunto le frange d'interferenza osservate nel cannocchiale. Data la piccolezza del campo visivo, in ogni posizione del cannocchiale si vede soltanto una piccola regione della sfera focale dove le frange d'interferenza sono praticamente rettilinee.

Nell'interferometro di Jamin la prima lastra è di solito fissa in posizione verticale e la seconda può essere un po' ruotata attorno agli assi verticale ed orizzontale paralleli ai piani riflettenti. Se le lastre sono rigorosamente parallele l'una all'altra $\boldsymbol{\nu} = 0$ e $\Delta = 0$. Quindi, non ci sono frange d'interferenza, tutto il campo visivo è illuminato uniformemente. In questa posizione le normali N_1 e N_2 e quindi il vettore N si trovano in un piano orizzontale.
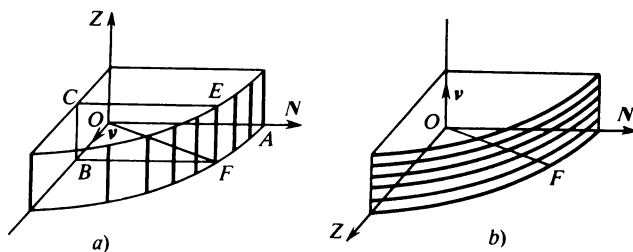
Fig. 138

Ruotiamo ora la seconda lastra di un piccolo angolo attorno all'asse verticale. Allora il vettore $\boldsymbol{\nu}$ sarà disposto nello stesso piano orizzontale (fig. 138,*a*). I piani equifasi perpendicolari a questo vettore sono verticali. Uno di questi piani $BCEF$, rappresentato nella fig. 138,*a*, interseca la zona cilindrica equatoriale lungo il segmento verticale EF. Di conseguenza, le

frange d'interferenza che si trovano su questa zona saranno verticali. Sullo schema della figura 138,*a* queste frange sono rappresentate da segmenti verticali in grassetto. La larghezza delle frange è minima se esse sono osservate lungo N, e massima se esse sono osservate lungo $\boldsymbol{\nu}$. In pratica l'asse del cannocchiale OF è diretto secondo un angolo di circa 45° rispetto alla normale N. In questo caso le frange d'interferenza verticali possono essere osservate soltanto in luce monocromatica (quasi-monocromatica) poiché ad esse corrispondono ordini d'interferenza elevati. Infatti, se si osserva lungo N, $(\boldsymbol{s\nu}) = 0$ e la formula (34.2) dà $\Delta = 4d\nu^2$. Essendo ν piccolo, l'ordine d'interferenza è piccolo. La frangia centrale passa praticamente per il punto A. Fa eccezione il caso di un angolo molto piccolo tra le lastre quando le frange siano molto larghe. In questo caso le frange verticali si possono osservare anche in luce bianca.

Se il cannocchiale è orientato lungo N o sufficientemente vicino a questa direzione, le frange d'interferenza verticali si possono vedere anche in luce bianca. Ma se ci si allontana da questa direzione, il prodotto scalare (νs), nonché l'ordine d'interferenza, aumentano. Se il cannocchiale è ruotato di un angolo $\approx 45°$ l'ordine d'interferenza diventa tanto grande che le frange verticali non possono essere osservate in luce bianca. Se ν fosse piccolo, anche l'ordine d'interferenza sarebbe molto piccolo per qualsiasi posizione del cannocchiale. Allora la frangia sarebbe tanto grande da oltrepassare il campo visivo del cannocchiale.

La situazione cambia completamente se la seconda lastra dalla posizione iniziale viene ruotata attorno all'asse orizzontale. Allora il vettore ν si porta in posizione verticale (fig. 138,*b*) ed i piani equifasi perpendicolari ad esso sono orizzontali. Le frange d'interferenza sono definite dall'intersezione di questi piani con la superficie della zona cilindrica equatoriale. Nella figura 138,*b* queste frange sono rappresentate da archi di cerchio in grassetto i cui piani sono orizzontali. L'ordine di tutte queste frange è piccolo e si possono osservare in luce bianca, poiché la direzione d'osservazione è praticamente perpendicolare a ν con $(\nu s) \approx 0$. Nel campo visivo del cannocchiale si vedono frange orizzontali praticamente rettilinee. È facile comprendere che se il vettore ν è inclinato, anche le frange d'interferenza diventeranno inclinate sull'orizzontale. Ma in luce bianca possono essere osservate soltanto frange di piccola inclinazione. Per ottenere frange di grande inclinazione è necessario utilizzare luce monocromatica (quasi-monocromatica).

Tutti i ragionamenti riportati si possono ripetere esattamente senza introdurre l'ipotesi che $n = 1$. Per evitare calcoli troppo laboriosi è necessario limitarsi dappertutto ai termini lineari in ν, trascurando tutti i termini di potenze superiori, ed i risultati definitivi non subiranno alcuna modifica.

6. L'interferometro di Jamin presenta alcuni inconvenienti che non permettono di utilizzarlo in alcuni studi particolarmente fini. È praticamente impossibile fabbricare lastre a facce rigorosamente parallele di vetro per-

fettamente omogeneo aventi uno spessore superiore a 5 cm. Quindi è anche impossibile separare i raggi che interferiscono AB e $C'D'$ di una distanza superiore a ~ 4 cm. Ma il principale inconveniente dell'interferometro di Jamin consiste nel fatto che quando le lastre spesse sono illuminate esse si riscaldano e si portano allo stato d'equilibrio termico molto lentamente. Ciò porta alla conseguenza che le frange d'interferenza si spostano molto lentamente per delle ore nel campo visivo del cannocchiale. È molto difficile utilizzare l'interferometro nell'ultravioletto poiché richiede l'impiego di
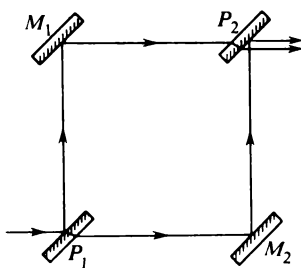
Fig. 139

lastre in quarzo o in fluorite uniche. Gli inconvenienti citati sono eliminati nell'interferometro di D.S. Roždestvenskij (1876-1940).

In linea di principio l'interferometro di Roždestvenskij non differisce da quello di Jamin, ma ogni lastra spessa è sostituita con la combinazione di due lastre sottili M_1, P_1 e M_2, P_2 (fig. 139) montate parallelamente l'una all'altra. Le lastre M_1 e M_2 sono argentate e fungono da specchi mentre P_1 e P_2, sono semitrasparenti: esse fanno passare una metà della luce incidente e riflettono l'altra metà. La combinazione delle lastre M_2, P_2 può ruotare di un piccolo angolo rispetto all'altra combinazione M_1, P_1 parallele anch'esse. Il percorso dei raggi nell'interferometro è indicato nella figura schematica 139. L'apparecchio funziona come l'interferometro di Jamin ed in esso si osservano frange d'interferenza di uguale inclinazione.

Analoga è anche la costruzione dell'interferometro di Mach-Zehnder che è stato realizzato un po' prima di quello di Roždestvenskij e se ne distingue per il fatto che in esso sono disposti parallelamente, da una parte, gli specchi M_1 e M_2, e, dall'altra parte, le lastre semitrasparenti P_1 e P_2. Una coppia di lastre può ruotare rispetto all'altra di un piccolo angolo.

§ 35. *Interferometro di Michelson*

Per mezzo dell'*interferometro di Michelson* (1852-1931) furono per la prima volta realizzati studi sistematici sulla struttura fine delle righe spet-

trali e le prime comparazioni dirette tra metro campione e lunghezza d'onda delle radiazioni luminose. Il noto esperimento di Michelson-Morley costruito per determinare il moto della Terra rispetto all'etere universale (si veda il § 102) fu eseguito proprio con questo interferometro. Attualmente l'interferometro di Michelson è divenuto antiquato, ma l'importanza storica delle ricerche che esso ha permesso di intraprendere è troppo grande per poter trascurare quest'apparecchio. Descriviamo qui sotto la costruzione ed il funzionamento dell'interferometro di Michelson.

Lo schema di principio dell'interferometro è riportato nella figura 140. La luce di una sorgente estesa S cade sulla lastra di separazione P_1 a facce piane e parallele ricoperta da uno strato semitrasparente di argento o di alluminio. Questa lastra lascia passare una parte della luce incidente e riflette
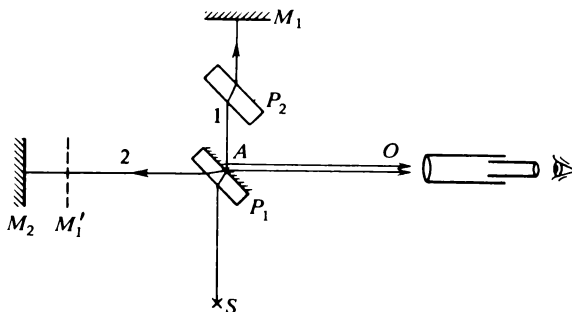
Fig. 140

l'altra parte dividendo il fascio in due parti reciprocamente perpendicolari. Il primo fascio, dopo aver attraversato la lastra P_1, è riflesso indietro dallo specchio M_1, poi subisce una riflessone parziale da P_1 che lo invia nella direzione AO. Il secondo fascio, dopo la riflessione dalla faccia metallizzata della lastra P_1, è inviato verso lo specchio M_2 che lo invia di nuovo verso P_1; dopo aver attraversato P_1 questo fascio è inviato nella direzione AO, come il primo fascio.

Dunque, da una stessa sorgente di luce si ottengono due fasci della stessa intensità che penetrano nel cannocchiale dove sono osservate le frange d'interferenza.

Sul cammino del primo fascio è disposta una lastra P_2 identica alla lastra P_1. La lastra P_2 serve a compensare la differenza di cammino tra i fasci, dovuta al fatto che il secondo fascio attraversa la lastra di divisone P_1 tre volte ed il primo l'attraversa una sola volta. Visto che il vetro provoca dispersione, senza questa compensazione sarebbe impossibile l'osservazione delle frange d'interferenza in luce bianca.

Lo specchio M_1 è fisso mentre lo specchio M_2 per mezzo di una vite d'aggiustamento micrometrica può essere spostato su slitte speciali in mo-

do rigorosamente parallelo a sé stesso. Nei grandi interferometri questo spostamento deve essere effettuato su distanze di decine di centimetri, e perciò la parte meccanica dell'apparecchio deve essere molto precisa. Anche le posizioni degli specchi sono regolate da viti d'aggiustamento.

Sia M_1' l'immagine della superficie dello specchio M_1 prodotta dalla faccia riflettente della lastra di divisione P_1. Allora l'interferenza si realizzerà esattamente come se avvenisse tra le due superfici riflettenti M_2 e M_1'. La differenza di cammino tra i raggi riflessi $\Delta = 2d \cos \varphi$, dove d è lo spessore dello strato d'aria e φ l'angolo d'incidenza. Se lo strato è piano-parallelo, si otterranno frange d'interferenza di uguale inclinazione localizzate all'infinito. Si possono osservare ad occhio nudo, accomodato all'infinito, o per mezzo di un cannocchiale focalizzato all'infinito. Si ottengono anelli d'interferenza con il centro nel punto di convergenza dei raggi che sono riflessi normalmente dalle superfici M_2 e M_1'. A questa direzione corrisponde la massima differenza di cammino $\Delta = 2d$. Di conseguenza l'ordine d'interferenza massimo viene osservato al centro degli anelli. Ne segue che se lo spessore d dello strato d'aria aumenta, gli anelli d'interferenza si sposteranno dal centro verso la periferia (al contrario dello spostamento degli anelli di Newton descritto nel § 33, punto 7).

Quando lo spessore d aumenta di $\lambda/2$ la differenza di cammino aumenta di λ, cosicché si ha lo spostamento di una frangia (cioè il posto di una frangia brillante viene occupato dalla frangia brillante vicina). Quando l'angolo d'incidenza varia di $\Delta\varphi$ la differenza di cammino varia di $2d \sin \varphi \, \Delta\varphi$. Ciò significa che le frange sono tanto più larghe, quanto più piccolo è d. Per $d = 0$ esse diventerebbero infinitamente larghe, cioè il campo visivo sarebbe illuminato uniformemente.

Quando lo spessore dello strato d'aria è grande e la monocromaticità della luce è molto elevata, l'interferometro di Michelson permette di osservare le interferenze di ordini molto elevati (all'incirca 10^6). Se M_2 e M_1' si trovano a piccola distanza l'una dall'altra e formano tra loro un cuneo d'aria con un piccolo angolo, le frange d'interferenza si localizzano o sulla superficie di questo cuneo, o nelle sue vicinanze. Queste sono le frange di uguale spessore aventi la forma di rette equidistanti parallele allo spigolo del cuneo.

§ 36. *Interferometri a onde multiple*

1. Ritorniamo allo studio delle interferenze nelle lastre piano-parallele e teniamo conto dei raggi che hanno subìto riflessioni multiple in queste lastre (fig. 134). Indichiamo con R il coefficiente di riflessione della luce sulla frontiera di separazione della lastra e dell'aria, cioè la parte di energia luminosa incidente che è inviata indietro dalla lastra ad ogni riflessione. Se

non c'è assorbimento, la parte restante, cioè $(1 - R)$, attraversa questa frontiera. Se i mezzi da entrambe le facce della lastra sono gli stessi (aria), allora, come sarà dimostrato nel § 65, i coefficienti di riflessione di entrambe le facce della lastra saranno gli stessi. Supponiamo che la luce incidente sia monocromatica e sia I_0 la sua intensità. Allora le intensità dei fasci trasmessi 1', 2', 3', ... sono uguali a

$$I_{1'} = (1 - R)^2 I_0, \quad I_{2'} = R^2(1 - R)^2 I_0, \quad I_{3'} = R^4(1 - R)^2 I_0, \ldots,$$

e le corrispondenti ampiezze (reali) sono uguali a

$$a_{1'} = (1 - R)a_0, \quad a_{2'} = R(1 - R)a_0, \quad a_{3'} = R^2(1 - R)a_0, \ldots,$$

dove a_0 è l'ampiezza della luce incidente. La differenza di cammino tra due fasci che interferiscono è $\Delta = 2dn \cos\psi$, e la differenza di fase è $\Phi = k\Delta = (4\pi/\lambda)dn\cos\psi$. L'ampiezza dell'onda trasmessa è rappresentata da una progressione geometrica decrescente

$$a_d = a_0(1 - R)[1 + Re^{-i\Phi} + R^2 e^{-2i\Phi} + \ldots].$$

Se la lastra è sufficientemente lunga, la progressione può essere considerata infinita e si avrà allora

$$a_d = \frac{1 - R}{1 - Re^{-i\Phi}} a_0.$$

L'intensità dell'onda trasmessa è allora

$$I_d = \frac{(1 - R)^2}{|1 - Re^{-i\Phi}|^2} a_0^2 = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R\sin^2(\Phi/2)} I_0. \tag{36.1}$$

Calcoliamo ora l'intensità I_r dell'onda riflessa. Le intensità dei fasci riflessi 1, 2, 3, ... sono uguali a

$$I_1 = RI_0, \quad I_2 = R(1 - R)^2 I_0, \quad I_3 = R^3(1 - R)^2 I_0, \ldots,$$

e le corrispondenti ampiezze (reali) sono uguali a

$$a_1 = \sqrt{R}a_0, \quad a_2 = -\sqrt{R}(1 - R)a_0,$$
$$a_3 = -\sqrt{R}R(1 - R)a_0, \ldots$$

Il segno meno che figura nelle espressioni delle ampiezze tiene conto della perdita di una semionda ad ogni riflessione su una delle facce della lastra. Non era necessario tener conto di questa perdita di una semionda nei calcoli dell'onda trasmessa, poiché in quel caso tutte le riflessioni hanno luogo sulla frontiera vetro-aria. Invece, nel caso di riflessione dalla lastra, il raggio 2 subisce la riflessione sulla frontiera aria-vetro e tutti gli altri raggi sulla frontiera vetro-aria. L'ampiezza risultante dell'onda riflessa è rappresentata dalla progressione geometrica

$$a_r = \sqrt{R}a_0 - \sqrt{R}(1 - R)a_0 e^{-i\Phi}[1 + Re^{-i\Phi} + R^2 e^{-2i\Phi} + \ldots].$$

Procedendo come prima, troviamo per l'intensità

$$I_r = \frac{4R\sin^2(\Phi/2)}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\Phi/2)} I_0. \tag{36.2}$$

2. Dalle (36.1) e (36.2) si vede che $I_d + I_r = I_0$, come dev'essere in assenza di assorbimento. Le distribuzioni delle intensità in trasmissione ed in riflessione sono quindi *reciprocamente complementari*: alle zone brillanti ed ai massimi di una distribuzione corrispondono le zone scure ed i minimi dell'altra distribuzione. È evidente che per poter ottenere frange d'interferenza è necessario utilizzare sorgenti di luce estese. Le frange saranno *frange di uguale inclinazione* e possono essere proiettate per mezzo di una lente su uno schermo posto nel suo piano focale. Si può anche utilizzare un cannocchiale puntato all'infinito. Le frange d'interferenza avranno la forma di anelli concentrici il cui centro si trova nel punto di convergenza dei raggi normali alla superficie della lastra. In trasmissione i massimi corrispondenti si ottengono per $\Phi/2 = m\pi$, cioè per $2dn\cos\psi = m\lambda$, dove m è un numero intero. In riflessione a questi valori corrispondono i minimi.

Le posizioni dei massimi e dei minimi sono determinate dalle stesse condizioni che valgono nel caso di interferenza di due onde. La stessa conclusione vale anche per la distribuzione delle intensità, a condizione che il coefficiente di riflessione sia piccolo ($R \ll 1$). Allora nelle (36.1) e (36.2) si possono trascurare i termini in R^2 e svilupparli rispetto a R. Al primo ordine d'approssimazione si ottiene

$$I_d = 1 - 4R\sin^2(\Phi/2) = 1 - 2R(1-\cos\Phi),$$
$$I_r = 4R\sin^2(\Phi/2) = 2R(1-\cos\Phi).$$

Saremmo arrivati allo stesso risultato, se non avessimo tenuto conto delle riflessioni multiple.

La distribuzione dell'intensità luminosa cambia però notevolmente se aumenta il coefficiente di riflessione R, in particolare quando questo coefficiente si avvicina all'unità. Nella figura 141 sono riportate le curve d'intensità della luce trasmessa per tre valori di R. L'intensità della luce incidente è posta uguale all'unità. Sull'asse delle ascisse è riportata la differenza di fase $\Phi = (4\pi dn\cos\psi)/\lambda$. Per $\Phi = 2m\pi$ (m è un numero intero) si ottengono i massimi. Se $R \ll 1$, i massimi sono arrotondati, ma già per $R =$ $= 0{,}75$ essi diventano acuti. Quando $R \to 1$ tutta la luce è praticamente concentrata nelle frange d'interferenza molto strette su uno sfondo scuro. In luce riflessa si formano frange ugualmente nette ma scure su fondo chiaro. Il numeratore della formula (36.1) è una quantità costante. Al massimo ($\Phi = 2m\pi$) $I_{max} = 1$.

La nettezza delle frange d'interferenza è caratterizzata dalla loro *semilarghezza*. Per frange in luce trasmessa *s'intende per semilarghezza la distanza tra i punti situati da entrambi i lati del massimo nei quali l'intensità*

è metà dell'intensità massima I_{max}. Nelle vicinanze di un massimo di ordine m, Φ può essere rappresentato nella forma $\Phi = m\pi + \varphi$. Allora nella formula (36.1) Φ può essere sostituito con φ. Essendo φ piccolo, la stessa formula può essere scritta come segue:

$$I_d = \frac{I_{max}}{1 + R\varphi^2/(1 - R)^2}. \qquad (36.3)$$

Se $R\varphi^2/(1 - R)^2 = 1$, si ha $I_d = 1/2I_{max}$. Quindi, la semilarghezza è data
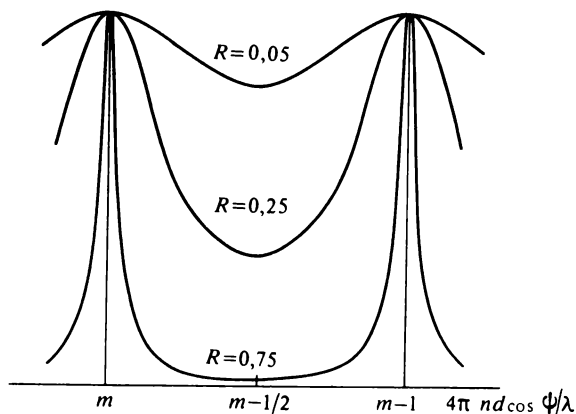
Fig. 141

dall'espressione

$$\delta\Phi = 2\varphi = 2\,\frac{1 - R}{\sqrt{R}}. \qquad (36.4)$$

3. Nelle applicazioni degli interferometri a onde multiple vengono sempre utilizzate *lastre spesse*, di modo che si ha sempre a che fare con ordini d'interferenza elevati. Ne segue che per ottenere frange d'interferenza è necessaria un'*alta monocromaticità della luce* ($\lambda/\delta\lambda \gtrsim m$). Nella spettroscopia interferenziale, dove le interferenze a onde multiple sono utilizzate per lo studio degli spettri, la luce esaminata se non possiede una monocromaticità sufficiente deve essere preliminarmente *monocromatizzata*, per esempio mediante uno spettrometro a prismi o mediante un altro monocromatore.

Generalmente mediante i metodi di spettroscopia interferenziale si studia la struttura delle righe spettrali composte. I vantaggi degli spettroscopi interferenziali sono il loro alto potere risolutivo associato con la grande chiarezza, semplicità di costruzione, basso costo e la facilità d'uso. *Il pote-*

re risolutivo caratterizza la più piccola distanza tra due righe spettrali vicine che possono essere separate in righe semplici.

Per precisare la nozione di potere risolutivo supponiamo che la luce utilizzata sia composta di due righe spettrali vicine, della stessa intensità, le cui lunghezze d'onda siano λ e $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$. Il sistema di frange d'interferenza sarà composto di due insiemi di frange d'interferenza (i massimi) corrispondenti alle stesse lunghezze d'onda. Uno degli insiemi di massimi d'intensità è spostato rispetto all'altro. Se l'intervallo tra le frange è insufficiente i massimi si sovrappongono e si ottiene una ripartizione delle intensità con un solo massimo che, esaminata visualmente, è indistinguibile dalla ripartizione delle intensità corrispondente ad una sola riga. Si dice allora
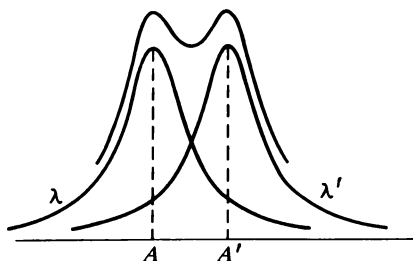
Fig. 142

che la riga doppia considerata *non può essere risolta dall'apparecchio spettrale utilizzato.*

Ammettiamo ora che lo spostamento sia uguale alla metà della larghezza di una frangia. La corrispondente ripartizione delle intensità è rappresentata nella figura 142. Le curve λ e λ' rappresentano i contorni delle righe spettrali, come esse sarebbero viste nell'apparecchio separatamente. Al centro, dove i contorni si sovrappongono, l'intensità delle righe spettrali è $1/2I_{max}$. Addizionando le intensità, al centro si ottiene un'intensità uguale a I_{max}. Nel punto A l'intensità della prima riga è uguale a I_{max} e quella della seconda a $1/5I_{max}$, conformemente alla formula (36.3). In tal modo l'intensità totale al punto A è $I_{max} + 1/5I_{max} = 1{,}2I_{max}$. La stessa intensità si misura nel punto A'. La curva dell'intensità risultante sarà composta di due massimi separati da un minimo. L'intensità nella regione del minimo è $1/1{,}2 = 83\%$ dell'intensità di uno dei massimi della curva risultante.

L'eventualità della risoluzione di una riga spettrale nel caso di esistenza di un tale minimo dipende dall'acutezza visuale dell'osservatore. L'esperienza mostra che un occhio normale scorge l'esistenza di questo minimo senza troppa difficoltà. Si può dunque adottare la distanza tra i massimi d'intensità uguale o superiore alla semilarghezza di una frangia d'interferenza come *criterio di risoluzione spettrale* (questo criterio è in una certa misura convenzionale).

Calcoliamo ora la differenza minima di lunghezze d'onda $\delta\lambda = \lambda' - \lambda$, corrispondente a questo criterio di risoluzione. Tutte le grandezze che si riferiscono alla lunghezza d'onda λ vengono indicate con simboli senza apice, e quelle che si riferiscono alla lunghezza d'onda λ' da simboli con apice. Ammetteremo che l'indice di rifrazione n sia lo stesso per entrambe le lunghezze d'onda. (Questo è rigorosamente esatto soltanto nell'interferometro di Fabry-Pérot.) Allora, indipendentemente dalla lunghezza d'onda, a tutti i raggi incidenti di uguale direzione corrispondono raggi rifratti aventi uguale direzione. Nel punto A' per la lunghezza d'onda λ' si ottiene un massimo d'interferenza di ordine m, e quindi $\Phi' = 2m\pi$. Nello stesso punto A' l'onda di lunghezza d'onda λ non produce un massimo, poiché per questa onda la diffrerenza di fase è $\Phi = 2m\pi + (1 - R)/\sqrt{R}$, cioè nel
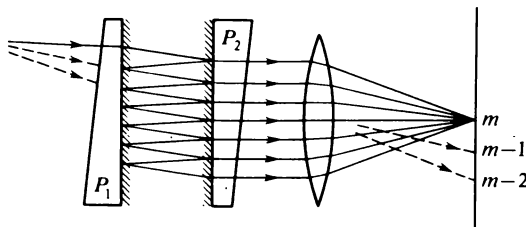
Fig. 143

punto A' considerato $\Phi' - \Phi \equiv \delta\Phi = (1 - R)\sqrt{R}$. Ma essendo per le due onde n e ψ uguali, dalla formula $\Phi = (4\pi dn \cos\psi)/\lambda$ segue: $\delta\Phi/\Phi = |\delta\lambda/\lambda|$. Tenendo conto del fatto che al massimo $\Phi = 2\pi m$, si ottiene

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{R}}{1 - R} m. \tag{36.5}$$

La quantità $\lambda/\delta\lambda$ è detta *potere risolutivo dell'apparecchio spettrale*.

Esistono due tipi di apparecchi spettrali interferenziali che descriveremo qui sotto.

4. Interferometro di Fabry-Pérot. Quest'apparecchio che è stato inventato da Fabry (1867-1945) e Pérot (1863-1925) è uno degli apparecchi spettrali interferenziali più largamente usati. Esso è costituito da due lastre di vetro o di quarzo P_1 e P_2 tra le quali si trova generalmente uno strato d'aria (fig. 143). Le superficie piane delle facce delle due lastre rivolte l'una all'altra sono levigate con gran cura e ricoperte di strati di grande potere riflettente (argento, alluminio, strati dielettrici sovrapposti). Negli apparecchi di buona qualità le superfici di lavoro sono garantite piane a meno di 0,01λ. Il potere riflettente delle superfici speculari delle lastre con rivestimento metallico può raggiungere il 95% e con dielettrici il 98%.

Il parallelismo delle superfici speculari è assicurato da un anello di spin-

ta in invar o in quarzo fuso disposto tra le lastre. L'anello possiede tre sporgenze su ogni lato contro le quali le lastre sono spinte per mezzo di tre molle. Le sporgenze sono lavorate in modo che le superficie speculari si dispongano parallelamente l'una all'altra. I difetti di parallelismo sono eliminati con l'aiuto delle molle.

L'interferometro che utilizza gli anelli di spinta si dice *campione di Fabry-Pérot*. Disponendo di una collezione di campioni che si distinguono tra loro per lo spessore degli anelli, si possono effettuare misure con distanze differenti tra le superfici speculari. Negli interferometri di Fabry-Pérot di vecchio modello si poteva modificare la distanza tra gli specchi per mezzo di viti micrometriche. Ma con questo procedimento non si riesce ad ottenere la grande precisione, ottenuta invece con specchi fissi. Le superfici esterne delle lastre formano generalmente piccoli angoli con le superfici interne affinché la macchia chiara che si forma per riflessione non ostacoli
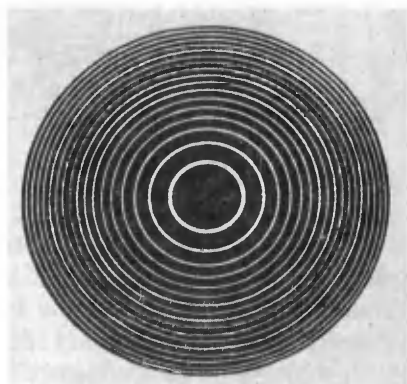
Fig. 144

l'osservazione delle frange d'interferenza. Quindi l'interferometro di Fabry-Pérot può essere considerato come una lastra d'aria piana a facce parallele comprese tra due lamine semiriflettenti su cui i raggi si riflettono molte volte prima di interferire.

Il sistema di frange è costituito da anelli concentrici di uguale inclinazione. Gli anelli per trasmissione prodotti dall'interferometro sono rappresentati nella figura 144. I massimi d'interferenza sono tanto più stretti, quanto più grande è il potere riflettente delle superfici speculari delle lastre dell'interferometro.

La distanza h tra gli specchi è generalmente compresa tra 1 e 100 mm e nei campioni speciali raggiunge 1 m. Perciò gli ordini d'interferenza $m \approx \approx 2h/\lambda$ sono molto grandi (per $h = 5$ mm $m \approx 20000$). Essendo l'angolo ψ piccolo la condizione di massimo principale d'interferenza $2h \cos\psi =$

$= m\lambda$ si può scrivere nella forma $h(2 - \psi^2) = m\lambda$. Se ne ricava la *dispersione angolare* dell'interferometro di Fabry-Pérot

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = -\frac{m}{2h\psi} = -\frac{1}{\lambda\psi}. \tag{36.6}$$

Nelle condizioni di funzionamento ($\psi \approx 10^{-2}$ rad) la dispersione angolare dell'interferometro di Fabry-Pérot è sostanzialmente superiore a quella di altri apparecchi spettrali, il che è il suo vantaggio principale.

Un altro importante vantaggio dell'interferometro di Fabry-Pérot è la sua grande chiarezza. Grazie a questa proprietà ed al basso costo questo interferometro è largamente diffuso per gli studi spettrali nella regione ottica. Il principio dell'interferometro di Fabry-Pérot è stato anche impiegato per la realizzazione dei risonatori di volume dei generatori quantici ottici (si veda il § 120).

5. Lamina di Lummer-Gehrcke. Questa è una lamina a facce piane e parallele fabbricata con un vetro molto omogeneo o di quarzo fuso anch'esso
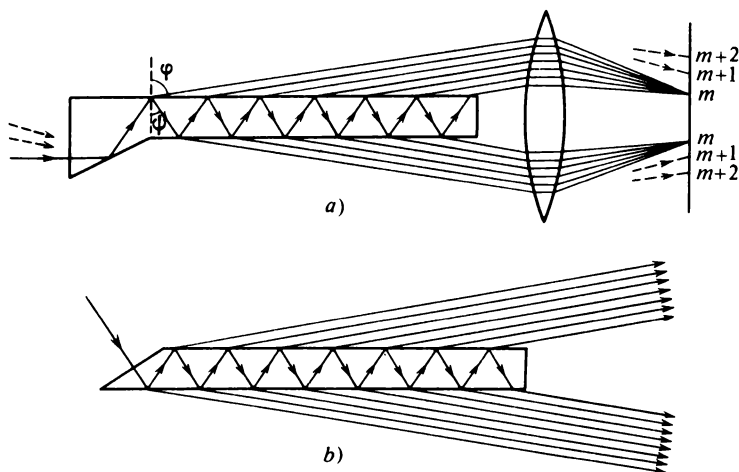
Fig. 145

molto omogeneo di spessore da 3 a 10 mm e di lunghezza fino a 30 cm. Per inviare correttamente i raggi luminosi nella lastra, su una delle sue facce terminali è applicato di lato un prisma supplementare in contatto ottico (fig. 145,*a*). Un altro procedimento d'introduzione dei raggi consiste nel tagliare a smusso una delle estremità della lastra (fig. 145,*b*). In entrambi i casi i raggi incidenti sono normali alla superficie d'entrata il che riduce le perdite di luce per riflessione. La direzione dei raggi incidenti dev'essere tale che l'angolo d'incidenza alla frontiera vetro-aria sia vicino all'angolo limite di riflessione totale, affinché il coefficiente di riflessione sia vicino

all'unità. I fasci luminosi subiscono allora riflessioni multiple sulle facce della lastra ed emergono da essa con intensità quasi identiche. Ogni faccia della lastra può formare fino a 10-15 fasci riflessi.

Nella lamina di Lummer-Gehrcke si osservano frange d'interferenza di uguale inclinazione. La condizione per ottenere un massimo d'interferenza di ordine m è

$$2hn \cos \psi = m\lambda, \tag{36.7}$$

dove h è lo spessorre della lamina e ψ l'angolo di rifrazione. Qui non si tiene conto della variazione della fase dell'onda nella riflessione, poiché essa produce soltanto uno spostamento molto piccolo di tutto l'insieme di frange. Il numero di fasci che interferiscono da ciascun lato della lamina è uguale a $N = L/(2h \operatorname{tg} \psi)$, dove L è la lunghezza della lamina. E siccome la luce cade con un angolo molto vicino all'angolo limite, si ha

$$N = \frac{L}{2h} \sqrt{n^2 - 1}. \tag{36.8}$$

Esamineremo la questione del potere risolutivo di questo apparecchio nel § 48.

6. Ci restano da affrontare ancora due questioni relative all'interferenza a fasci multipli. Consideriamo dapprima un gran numero di piani riflettenti paralleli equidistanti a piccoli coefficienti di riflessione (fig. 146).
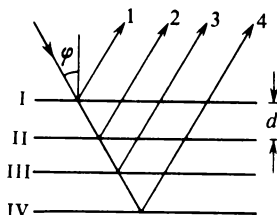
Fig. 146

Quasi tutta la luce che incide su ciascun piano lo attraversa quasi senza perdite. In conseguenza di ciò si ottiene un gran numero di raggi riflessi paralleli 1, 2, 3, ... aventi quasi la stessa intensità. La differenza di cammino tra i raggi vicini è uguale a $2d \cos \varphi$, dove d è la distanza tra i piani. Se è verificata la condizione

$$2d \cos \varphi = m\lambda \tag{36.9}$$

(m è un numero intero), tutti i raggi sono in fase. Il risultato è una riflessione intensa detta *riflessione interferenziale*. Per un m dato la condizione (36.9) può essere verificata solo per certe lunghezze d'onda. Se questo sistema di piani è illuminato con luce bianca, la riflessione interferenziale si ma-

nifesterà soltanto per alcune righe spettrali relativamente strette (e per $d <$ $< \lambda$ soltanto per una riga spettrale). Quindi, il sistema di piani acquista la proprietà di *riflessione selettiva*, e siccome la differenza di cammino dipende dall'angolo d'incidenza, il colore della luce selettivamente riflessa deve variare con il variare dell'angolo d'incidenza.

Osserviamo anche, senza entrare nei dettagli, che una combinazione conveniente di strati dielettrici a coefficienti di rifrazione differenti permette di realizzare sulla superficie dei vetri *rivestimenti a più strati* (pellicole) che possiedono grandi coefficienti di riflessione (fino a 98-99% per certe lunghezze d'onda). Questi rivestimenti sono utilizzati, per esempio, per preparare gli specchi degli interferometri di Fabry-Pérot. È però necessario tener presente che le pellicole riflettenti a più strati sono colorate in luce bianca, poiché la condizione interferenziale di forte riflessione è rigorosamente verificata soltanto per una sola lunghezza d'onda.

§ 37. *Onde luminose stazionarie*

1. Quando interferiscono onde monocromatiche che si propagano una incontro all'altra, si formano *onde stazionarie* (si veda il vol. III, § 140). In questo caso, come si vede dalla formula (26.12), la larghezza Δx della frangia d'interferenza è uguale a $\lambda/2$, cioè alla distanza tra due ventri o due nodi vicini. Nel caso delle onde elettromagnetiche i ventri (nodi) del vettore elettrico coincidono con i nodi (ventri) del vettore magnetico $\boldsymbol{B}$. Quindi, in un'onda stazionaria, i campi elettrico e magnetico si possono *separare spazialmente* e si possono studiare separatamente le proprietà di questi campi. Gli istanti in cui i campi elettrico e magnetico passano per i loro massimi non coincidono in un'onda stazionaria, ma sono spostati l'uno rispetto all'altro di un semiperiodo delle vibrazioni luminose. La produzione di onde luminose stazionarie presenta difficoltà dovute alla piccolezza della lunghezza d'onda. Queste difficoltà sono state per la prima volta superate da O. Wiener (1862-1927) nel 1890.

Una lastra di vetro P (fig. 147) ricoperta con un sottile strato fotosensibile di spessore $\sim \frac{\lambda}{20}$-$\frac{\lambda}{30}$, viene messa in contatto con un buon specchio metallico M, formando con quest'ultimo un angolo molto piccolo α (dell'ordine di 1′ o meno). La lastra viene illuminata da raggi monocromatici normali alla superficie dello specchio. A causa della riflessione sullo specchio nel cuneo d'aria tra lo specchio e lo strato fotosensibile si formano onde luminose stazionarie. Sviluppando la lastra si constata che lo strato fotosensibile è impressionato da un sistema di frange annerite equidistanti parallele allo spigolo del cuneo d'aria e che rappresentano i ventri delle onde stazionarie. L'interfrangia è uguale a $\lambda/(2 \sin \alpha)$. Le frange pos-

sono essere viste ad occhio nudo se l'angolo α è sufficientemente piccolo. Negli esperimenti di Wiener la distanza tra le frange era uguale a 1-2 mm. In base e questi dati si poteva stimare la lunghezza delle onde luminose. Si è anche riusciti a dimostrare che per la luce rossa la lunghezza d'onda è all'incirca due volte più grande di quella per la luce blu.

Veniva tuttavia avanzata l'obiezione che nell'interpretazione dell'esperimento non si teneva conto della riflessione inversa sullo strato fotosensibile. Per eliminare quest'obiezione Wiener riempiva con benzene l'interstizio tra lo strato fotosensibile e lo specchio metallico (l'indice di rifrazione del benzene è poco differente da quello della gelatina dello strato fotosensibile). Questo procedimento eliminava l'influenza della riflessione sullo
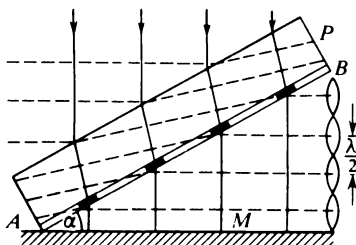
Fig. 147

strato fotosensibile. Risultò che, con questo metodo, il sistema di frange d'interferenza non si modificava.

L'importanza principale degli esperimenti di Wiener consiste nel fatto che essi hanno permesso di precisare quale dei vettori, elettrico o magnetico, provoca la reazione fotochimica. Gli esperimenti hanno mostrato che la prima banda annerita si forma ad una distanza uguale a $\lambda/4$ dalla superficie dello specchio metallico, e perciò proprio qui si trova il ventre del vettore responsabile della reazione fotochimica. Quando un'onda elettromagnetica si riflette su una superficie metallica, su essa si forma un nodo del vettore elettrico (si veda il vol. III, § 45). Il primo ventre del vettore elettrico si trova a distanza $\lambda/4$ dalla superficie dello specchio metallico, cioè là dove si osserva l'annerimento dello strato fotosensibile. Ne segue che l'azione fotografica (ed in generale fotochimica) è prodotta dal campo elettrico dell'onda luminosa e non da quello magnetico.

Più tardi, nel 1892, Drude (1863-1906) e Nernst (1864-1941) hanno ripetuto l'esperimento di Wiener sostituendo lo strato fotosensibile con una sottile pellicola di una sostanza fluorescente. Nel 1933 Ives ha fatto lo stesso con uno strato fotoelettrico. Risultò che la fluorescenza e l'effetto fotoelettrico sono dovuti anch'essi al campo elettrico. Questo è quanto ci si doveva aspettare dal punto di vista delle concezioni elettroniche della struttura della materia.

Infatti, l'azione della luce sulle sostanze si riduce alle forze esercitate sugli elettroni dai campi elettrici e magnetici. La prima forza è uguale a eE e la seconda a $\frac{e}{c}[vB]$, dove v è la velocità dell'elettrone. La forza magnetica è molto più piccola di quella elettrica, poiché $v \ll c$. Dunque in tutte le azioni esercitate dalla luce il vettore elettrico dell'onda luminosa è più importante di quello magnetico. Per questa ragione il vettore elettrico è spesso detto *vettore luminoso*.

2. Wiener ha studiato anche le onde luminose stazionarie in luce polarizzata. Se la luce, che arriva con un certo angolo, è riflessa da un mezzo trasparente, essa presenta una polarizzazione rettilinea (si veda il § 65). Si dice che questa luce è *polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza*. Dai tempi di Fresnel (1821) e fino alla fine del XIX secolo tutte le teorie basate sull'etere universale si ponevano il problema di determinare la direzione del vettore luminoso: se esso sia diretto parallelamente o perpendicolarmente al piano di polarizzazione. Proprio a questa questione doveva rispondere l'esperimento di Wiener.

Wiener modificò il suo esperimento precedente come segue. Una luce linearmente polarizzata viene riflessa da uno specchio metallico ad un angolo di 45°. In queste condizioni l'angolo tra le direzioni di propagazione dell'onda incidente e riflessa è uguale a 90°. Perciò, se queste onde interferiscono, la distanza tra i ventri o i nodi vicini dell'onda stazionaria è uguale a $\lambda/\sqrt{2}$, in accordo con la formula (26.12). Se il vettore luminoso è perpendicolare al piano d'incidenza, le vibrazioni delle onde incidente e riflessa sono parallele. Allora queste onde possono interferire e sulla lastra fotografica inclinata rispetto alla superficie dello specchio metallico appariranno frange brillanti e scure simili a quelle del primo esperimento di Wiener. Se, invece, il vettore luminoso è parallelo al piano d'incidenza, l'interferenza è impossibile, poiché in questo caso le vibrazioni nelle onde incidente e riflessa sono reciprocamente perpendicolari (si veda il § 26, punto 5).

L'esperimento mostra che le frange si formano se la luce è polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza. Se, invece, la luce è polarizzata parallelamente al piano d'incidenza, si ottiene un annerimento uniforme della lastra fotografica. Ne segue che *il vettore luminoso è contenuto nel piano di polarizzazione*. Poiché gli esperimenti precedenti hanno dimostrato che il vettore luminoso è quello elettrico, si può affermare che il vettore elettrico è contenuto nel piano di polarizzazione.

3. Sul fenomeno delle onde stazionarie è basato il metodo di *fotografia a colori* elaborato da Lippmann (1845-1922) nel 1891. Una delle facce di una lastra di vetro è ricoperta con uno strato spesso di un'emulsione fotografica secca a grana fine di grande sensibilità. Questa lastra costituisce una delle pareti di un recipiente contenente mercurio. La faccia ricoperta con l'emulsione deve essere in contatto con il mercurio. La lastra è illuminata dall'esterno con raggi ad incidenza normale e di lunghezza d'onda da-

ta. Quando la luce si riflette sulla superficie del mercurio, nella massa dell'emulsione si formano onde stazionarie che impressionano la lastra fotografica. Fatto ciò, la lastra è ritirata dal recipiente e sviluppata. Lungo le linee dove si trovano i ventri del vettore elettrico precipitano sottili strati d'argento metallico; queste linee si trovano ad una distanza $\lambda/2$ l'una dall'altra. Si ottiene quindi un mezzo a strati piani composto di piani riflettenti paralleli che è simile al sistema rappresentato nella figura 146.

Illuminiamo ora la faccia ricoperta dall'emulsione della lastra esposta con luce che cade normalmente. Una piccola parte della luce viene riflessa dallo strato *I*, mentre la maggior parte passerà oltre. Una altrettanto piccola parte della luce trasmessa sarà riflessa dallo strato *II*, e così via. Si formeranno tanti fasci riflessi, quanti strati metallici sono precipitati nella massa dell'emulsione fotosensibile. L'intensità di ogni fascio è piccola, ma il loro numero è grande. Se le lunghezze d'onda della luce illuminante e di quella utilizzata per l'esposizione sono esattamente uguali, ogni fascio riflesso successivo presenterà rispetto al precedente un ritardo di fase uguale a 2π. In queste condizioni si ha un rafforzamento interferenziale dei fasci di modo che l'intensità risultante della luce riflessa sarà grande. Se, invece, ogni fascio presenta uno sfasamento rispetto al precedente di $\pm 2\pi/N$, dove N è il numero totale di fasci, si produce uno smorzamento mutuo di questi fasci. In generale, si riflettono in modo intenso soltanto le onde le cui lunghezze sono uguali alla lunghezza d'onda della luce utilizzata per l'esposizione (o molto vicine ad essa). Perciò, se la lastra è illuminata con luce bianca, in luce riflessa presenta il colore della radiazione che l'ha impressionata.

La regione spettrale $\delta\lambda$ della luce riflessa è tanto più stretta, quanto più grande è il numero di strati d'argento metallico depositati. Se si soffia sull'emulsione, essa si gonfia un po', la distanza tra gli strati metallici aumenta il che provoca lo spostamento del colore verso il rosso. Quando l'angolo d'incidenza φ aumenta, la condizione di rafforzamento interferenziale $2d \sin \varphi = \lambda$ sarà verificata per onde più corte. Per questa ragione, se la lastra è inclinata, il suo colore cambia tendendo all'estremità ultravioletta dello spettro.

Per ottenere fotografie a colori di oggetti, durante l'esposizione della lastra è necessario ottenere un'immagine a colori su uno strato fotosensibile come in tutte le macchine fotografiche. Le fotografie a colori di Lippmann sono d'eccellente qualità se sono fatte in colori spettrali puri, per esempio quando sono fotografati gli spettri. I colori misti forniscono di regola risultati insufficienti. Il procedimento di Lippmann non ha trovato applicazioni. La fotografia a colori moderna è basata sul principio dei filtri di luce e consiste nell'arricchire l'emulsione delle lastre fotografiche con coloranti appropriati.

Alla fine degli anni '90 del secolo scorso Neuhauss dimostrò con un esperimento l'esistenza degli strati nella struttura delle pellicole di Lipp-

mann. Utilizzando il metodo di Lippmann, è stata fatta una fotografia in luce rossa. Fatto ciò, la pellicola è stata separata dalla lastra di vetro ed è stata tagliata trasversalmente. Quindi è stata fatta una microfotografia di uno dei tagli della pellicola con un ingrandimento di 1000 volte. Sulla microfotografia si discernevano all'incirca dieci strati scuri separati da zone chiare. Gli strati scuri si trovavano là dove era precipitato l'argento metallico. La distanza tra i centri degli strati scuri era uguale a ≈ 350 nm. È necessario notare che nessun microscopio permette di discernere dettagli di un oggetto le cui dimensioni sono inferiori alla lunghezza d'onda della luce. Il successo dell'esperimento descritto è parzialmente dovuto al fatto che la pellicola era notevolmente gonfiata durante i trattamenti ai quali essa è stata sottoposta prima del taglio ed il taglio era obliquo.

§ 38. *Radiazione di Vavilov-Čerenkov*

1. L'interferenza della luce non è un fenomeno eccezionale, come può sembrare a prima vista. In sostanza tutto ciò che è legato alla propagazione della luce in una sostanza è in rapporto con i fenomeni d'interferenza. Infatti, quando un'onda luminosa cade su un mezzo, essa eccita oscillazioni elettriche negli atomi e nelle molecole. In conseguenza di ciò queste particelle cominciano ad irradiare onde elettromagnetiche secondarie che a loro volta esercitano un'azione sugli atomi e sulle molecole. L'onda incidente e le onde secondarie da essa eccitate interferiscono e quest'interferenza determina tutte le particolarità della propagazione della luce nel mezzo.

L'azione di una lente o di uno specchio concavo può essere considerata come un effetto d'interferenza. Infatti, le perturbazioni emesse da una sorgente puntiforme cadono su diversi parti della lente, si propagano in seguito lungo differenti tragitti verso il fuoco. Dato che le lunghezze ottiche di tutti i raggi dalla sorgente al fuoco della lente sono uguali, le perturbazioni pervengono al fuoco con fasi *uguali* e sovrapponendosi si rafforzano mutuamente. Proprio quest'effetto interferenziale è il risultato dell'azione focalizzante della lente. Se, propagandosi, le perturbazioni luminose seguissero rigorosamente le leggi dell'ottica geometrica, avremmo nel fuoco un campo luminoso d'intensità infinita. Il fatto che ciò non avvenga ci porta a pensare che esistano deviazioni dall'ottica geometrica, provocate soprattutto dalla diffrazione.

2. Consideriamo un esempio più suggestivo. Supponiamo che in un mezzo omogeneo trasparente si muova un elettrone o un'altra particella carica con una velocità costante V. Il campo proprio dell'elettrone in movimento eccita gli atomi e le molecole del mezzo ed essi diventano centri d'emissione di onde elettromagnetiche. Se il moto dell'elettrone è uniforme, queste onde sono *coerenti* e possono interferire tra esse. Se la velocità

V dell'elettrone è superiore alla velocità di fase v della luce nel mezzo, le onde emesse dall'elettrone in istanti differenti possono, in certe condizioni, arrivare simultaneamente al punto d'osservazione.

Infatti, siano A e B (fig. 148) i punti per i quali passa l'elettrone negli istanti t_1 e t_2 rispettivamente. Per percorrere la distanza AB l'elettrone impiega un tempo $t_2 - t_1 = AB/V$. Nel punto d'osservazione P le onde emesse da A e B arrivano negli istanti $t_1 + AP/v$ e $t_2 + BP/v$. La differenza di
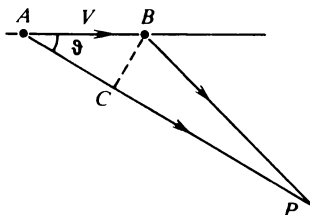
Fig. 148

questi tempi è uguale a

$$\Delta t = (t_2 - t_1) - \frac{AP - BP}{v} = \frac{AB}{V} - \frac{AP - BP}{v}.$$

Se il punto P si trova a grande distanza, $AP - BP \approx AC = AB \cos\vartheta$ di modo che $\Delta t = AB\left(\frac{1}{V} - \frac{\cos\vartheta}{v}\right)$. Siccome per ipotesi $v < V$, esiste un angolo ϑ che soddisfa la condizione

$$\cos\vartheta = \frac{v}{V} = \frac{1}{n\beta}, \qquad (38.1)$$

dove $\beta \equiv V/c$, e $n \equiv c/v$ è l'indice di rifrazione del mezzo. Se questa condizione è verificata, tutte le onde arrivano nel punto P *simultaneamente*, quale che sia la lunghezza del segmento AB. In questo caso la loro interferenza provocherà il loro rafforzamento mutuo. In tutti gli altri casi il tragitto dell'elettrone può essere diviso in segmenti di lunghezza tale che le onde emesse dalle loro estremità arrivino al punto P con una differenza di cammino λ. Le onde che arrivano da tutti i punti di ciascun segmento si annullano mutuamente in conseguenza delle loro interferenze. Quindi, lo stesso avviene con le onde che arrivano da tutti i punti del mezzo che si trovano sul tragitto dell'elettrone. Dunque, lungo le direzioni definite dalla condizione (38.1), l'elettrone (o più esattamente il mezzo nel quale esso si muove) emetterà onde elettromagnetiche, mentre non avrà luogo nessuna emissione nelle altre direzioni.

Questo tipo di radiazione è stato sperimentalmente scoperto nel 1934 ed è stato poi dettagliatamente studiato da P.A. Čerenkov (nato nel 1904), che a quel tempo lavorava sotto la direzione di S.I. Vavilov (1891-1951).

Čerenkov ha mostrato che tutti i corpi liquidi e solidi attraversati da elettroni rapidi, oltre alla fluorescenza, che ha luogo in alcuni casi, emettono sempre una luce visibile di debole intensità a spettro continuo. Questa radiazione è parzialmente polarizzata, poiché il vettore elettrico si trova prevalentemente nel piano formato dal raggio luminoso e dalla direzione di moto dell'elettrone. La radiazione è diretta principalmente in avanti, soprattutto lungo le generatrici di un cono il cui asse è dato dalla direzione di moto dell'elettrone e l'angolo al vertice 2ϑ è definito dalla formula (38.1). Non si riesce ad estinguere questa radiazione né per azione della temperatura, né per addizione al mezzo emittente di sostanze che provocano l'estinzione della fluorescenza. I tentativi di stima del tempo durante il quale gli atomi o le molecole, che emettono luce, si trovano in uno stato eccitato, hanno mostrato che questo tempo è nullo: la radiazione luminosa cessa simultaneamente con la cessazione del passaggio di elettroni attraverso il mezzo. Fondandosi su questo risultato, S.I. Vavilov ha concluso che questa radiazione non può essere una luminescenza per la quale è caratteristica una durata finita di radiazione luminosa.

Tenendo conto del fatto che la luminosità della radiazione è molto debole, Čerenkov, effettuando le misure quantitative, utilizzava nella maggior parte dei casi il metodo di Vavilov di fotometria a soglia di visibilità.

Più tardi è stato dimostrato che questo tipo di radiazione è provocata anche da protoni, mesoni e da altre particelle cariche rapide. La radiazione luminosa dovuta alle emissioni radioattive era nota anche prima, ma è stata in tutti i casi considerata a torto un tipo di luminescenza.

3. Il ruolo principale nella direzione delle ricerche sperimentali che avevano per oggetto lo studio della natura della radiazione luminosa, venne svolto da S.I. Vavilov. L'interpretazione qualitativa della radiazione di Vavilov-Čerenkov presentata qui sopra è stata formulata nel 1934 da I.E. Tamm (1895-1971) e I.M. Franck (nato nel 1908), che nello stesso anno costruirono una teoria quantitativa in buon accordo con i fatti sperimentali. Un po' più tardi, nel 1940, V.L. Ginsburg (nato nel 1916) elaborò una teoria quantistica fondata sulle leggi della conservazione dell'energia e dell'impulso.

Dai ragionamenti riportati sopra è evidente che nella formula (38.1) deve figurare la velocità *di fase* della luce e nessun'altra, poiché proprio questa velocità determina le fasi delle vibrazioni e quindi le condizioni di rafforzamento interferenziale delle onde. La formula (38.1) mostra che la radiazione di Vavilov-Čerenkov di frequenza ω, tale che $n(\omega) < 1/\beta$, è impossibile. Perciò lo spettro della radiazione di Vavilov-Čerenkov deve arrestarsi alle onde corte dove la condizione (38.1) cessa di essere verificata, il che è dovuto alla dispersione della luce. In particolare, è impossibile che la radiazione di Vavilov-Čerenkov produca raggi X poiché in questo caso $n <$ < 1.

Se l'elettrone si muovesse nel mezzo in modo rigorosamente uniforme,

la radiazione sarebbe concentrata esattamente sulla superficie del cono definito dalla condizione (38.1). Ma, data la non uniformità di moto, questa superficie cessa di essere ben definita. Ma persino in questo caso il carattere direzionale della radiazione si conserva da cui si deduce che gli atomi e le molecole del mezzo eccitati dall'elettrone emettono in modo *coerente* almeno su una parte del tragitto dell'elettrone dell'ordine della lunghezza d'onda. Quindi, l'effetto studiato *non dipende praticamente dalla struttura atomica del mezzo* e può essere considerato nel quadro della *teoria elettromagnetica macroscopica*. Proprio questo fu fatto da Tamm e Franck. Limitiamoci a citare il principale risultato. L'energia totale irradiata dall'elettrone nell'unità di tempo sull'unità di tragitto è data dalla seguente formula:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{c^2} \int\limits_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \omega \, d\omega. \tag{38.2}$$

L'integrazione è effettuata su tutte le frequenze per le quali $\beta n(\omega) > 1$. La stessa formula determina in modo evidente anche la ripartizione spettrale dell'energia irradiata. Questa formula è valida se è verificata la seguente condizione:

$$T(\omega) \left| \frac{dV}{dt} \right| \ll v(\omega), \tag{38.3}$$

cioè quando la velocità V dell'elettrone durante un periodo $T = 2\pi/\omega$ varia poco rispetto alla velocità di fase $v(\omega)$. Secondo la stima di Tamm e Franck la quantità totale d'energia che perde un elettrone in radiazione di Vavilov-Čerenkov nei corpi liquidi e solidi è dell'ordine di parecchie migliaia di elettronvolt per centimetro di tragitto, cioè può essere trascurata rispetto ad altre perdite d'energia dovute ad altre ragioni.

L'emissione di una radiazione implica evidentemente un rallentamento del moto dell'elettrone. Il moto accelerato dell'elettrone per sé stesso provoca l'emissione di una radiazione. Ma per quanto esposto sopra, questa radiazione non ha niente a che fare con l'interferenza che determina l'esistenza della radiazione di Vavilov-Čerenkov. Se all'elettrone fosse applicata una forza che compensa tutte le forze di frenamento, l'accelerazione sparirebbe ma la radiazione resterebbe. Proprio in questo senso dev'essere interpretata l'affermazione che un elettrone che si muove uniformemente in un mezzo può irradiare se la sua velocità è superiore alla velocità di fase della luce in questo mezzo.

4. Fenomeni analoghi alla radiazione di Vavilov-Čerenkov sono già da tempo noti in idro- ed aerodinamica. Per esempio, se la velocità di una nave è superiore alla velocità di fase sulla superficie d'acqua, la nave comincia a produrre continuamente treni d'onda, anche se la sua velocità resta costante. Questa è la causa della cosiddetta *resistenza dovuta alle onde del*

solco che le navi incontrano durante il loro moto sulla superficie dell'acqua. Lo stesso effetto si osserva nel volo dei proiettili e degli aerei. Essi cominciano a emettere onde d'urto dette *onde di Mach* (1838-1916) se si muovono nell'aria a velocità supersoniche. Le perdite d'energia, dovute all'emissione di queste onde, sono tanto grandi da costituire la principale causa delle resistenze che debbono superare i proiettili e gli aerei in moto a velocità supersoniche. Questi fenomeni sono più complicati dell'effetto di Vavilov-Čerenkov a causa della non linearità delle equazioni dell'idrodinamica.

5. La radiazione di Vavilov-Čerenkov può essere causata non soltanto da particelle cariche in moto, ma anche da certe perturbazioni che si propagano a velocità superiori alla velocità di fase della luce nel mezzo considerato. Supponiamo, per esempio, che sulla frontiera di separazione di due mezzi cada un'onda a fronte piano AB (fig. 149). Lungo la frontiera di separazione si propagherà una perturbazione con velocità $V = v_1/\sin\varphi$, dove v_1 è la velocità di fase della luce nel primo mezzo. Questa perturbazione
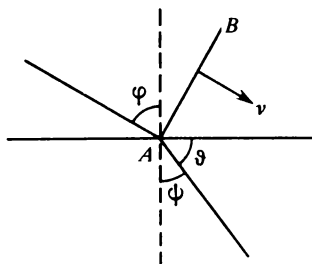
Fig. 149

eccciterà nel secondo mezzo una radiazione di Vavilov-Čerenkov che si propagherà con un angolo ϑ rispetto alla frontiera di separazione. L'angolo ϑ è definito dalla formula (38.1), cioè $\cos\vartheta = v_2/V$, dove v_2 è la velocità di fase nel secondo mezzo. Osservando che $\cos\vartheta = \sin\psi$, troviamo di qui $\sin\psi/\sin\varphi = v_2/v_1$. Questa è la legge di rifrazione di Snellius. Dunque, la rifrazione della luce può essere interpretata come l'effetto di Vavilov-Čerenkov eccitato dall'onda incidente nel secondo mezzo. Allo stesso modo può anche essere interpretata la riflessione della luce. La propagazione della luce in un mezzo omogeneo obbedisce anch'essa alla legge (38.1). In questo caso la velocità V del fronte d'onda coincide con la velocità di fase v, cosicché la formula (38.1) dà $\vartheta = 0$, cioè il fronte d'onda si propaga senza cambiare direzione.

6. La radiazione di Vavilov-Čerenkov ha trovato numerose applicazioni in fisica nucleare ed in fisica delle alte energie. Su questo effetto è fondata

l'azione dei cosiddetti *contatori di Čerenkov*, cioè rivelatori di particelle cariche relativistiche la cui radiazione è registrata da fotomoltiplicatori. I contatori di Čerenkov sono prima di tutto destinati a separare particelle relativistiche di uguale impulso ma di differenti velocità. Supponiamo, per esempio, che un fascio composto di protoni relativistici e di mesoni π attraversi un campo magnetico trasversale omogeneo. Le direzioni delle traiettorie delle particelle che sono passate dipendono soltanto dai loro impulsi e non dalle loro velocità. Per mezzo di diaframmi si possono separare i protoni ed i mesoni π aventi gli stessi impulsi. A causa della differenza di massa, i mesoni π hanno velocità v_π un po' più grandi di quelle v_p dei protoni. Se il fascio ottenuto è diretto in un gas e se l'indice di rifrazione n del gas è scelto in modo che sia $v_\pi > \frac{c}{n} > v_p$, i mesoni π generano una radiazione di Vavilov-Čerenkov, mentre i protoni non potranno provocarla. Dunque, il contatore registrerà soltanto i mesoni π. L'indice di rifrazione n del gas nella camera del contatore può essere variato cambiando la pressione del gas.

7. Per concludere esaminiamo la seguente questione: è possibile o no la produzione di una radiazione elettromagnetica, quando una particella carica si muove in modo uniforme in un mezzo ad una velocità inferiore a quella della luce, cioè ad una velocità inferiore alla velocità di fase della luce nel mezzo considerato? Se il mezzo è omogeneo la risposta a questa questione è negativa. Infatti, una particella carica in moto eccita gli atomi e le molecole del mezzo sul suo cammino. Questi atomi e queste molecole cominciano ad irradiare, ma per interferenza queste radiazioni si smorzano reciprocamente, poiché nel caso di moto uniforme della particella e di omogeneità del mezzo le loro ampiezze sono le stesse e le fasi aumentano in modo lineare in funzione del cammino percorso dalla particella. Ma se il mezzo non è omogeneo lo smorzamento non avrà luogo ed apparirà una radiazione. L'esistenza di una tale radiazione è stata predetta nel 1944 da V.L. Ginsburg ed I.M. Franck ed è stata chiamata *radiazione transitoria*.

Il seguente esempio aiuterà a comprendere l'origine di questa radiazione. Se un elettrone (o un'altra particella carica) si trova davanti alla frontiera piana di un metallo ideale, il campo elettrico all'infuori del metallo può essere considerato come un campo di dipolo formato dall'elettrone e dalla sua « immagine elettrica », che si trova alla superficie del metallo (si veda il vol. III, § 23). Se l'elettrone s'avvicina al metallo, l'immagine elettrica si muove incontro all'elettrone. In questo caso il momento elettrico del dipolo diminuisce il che provoca la radiazione. Nell'istante in cui l'elettrone attraversa la frontiera del metallo si può dire che si ha l'annichilazione dell'elettrone e della sua immagine elettrica. Allo stesso modo si produce la radiazione transitoria quando l'elettrone sfugge dal metallo nel vuoto.

In modo analogo viene spiegata l'apparizione di una radiazione, quan-

do una particella carica attraversa la frontiera di due dielettrici. In questo caso è applicabile il metodo dell'immagine elettrica, benché in forma modificata (si veda vol. III, § 24).

La radiazione transitoria è stata già da tempo osservata sotto forma di una luminosità degli anodi dei tubi a raggi X. S'intende che la natura di questa luminosità è stata spiegata molto più tardi.

La radiazione transitoria è anche utilizzata nei contatori di particelle relativistiche per la determinazione delle loro velocità.

IV. DIFFRAZIONE DELLA LUCE

§ 39. *Principio di Huygens-Fresnel. Zone di Fresnel*

1. Con l'espressione *diffrazione della luce* s'intende ogni deviazione dalla legge di propagazione rettilinea della luce, quando essa non può essere spiegata come risultato di una riflessione, di una rifrazione o della curvatura dei raggi luminosi in mezzi a indice di rifrazione continuamente variabile. Se il mezzo contiene in sospensione piccole particelle di una sostanza estranea (per esempio nebbia) oppure l'indice di rifrazione varia notevolmente su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda, in questi casi si parla di *dispersione della luce* e non si utilizza il termine « diffrazione della luce ». Per essere interpretati ed analizzati da un punto di vista quantitativo i fenomeni di diffrazione non richiedono l'introduzione di nuove nozioni. Ogni problema di diffrazione trattato in modo rigoroso, deve essere ricondotto alla ricerca delle soluzioni delle equazioni di Maxwell che soddisfano le condizioni al contorno. Ma in quest'impostazione rigorosa i problemi di diffrazione, data la loro complessità, ammettono soluzioni analitiche soltanto in casi semplici idealizzati. In ottica sono di importanza molto più grande i metodi non rigorosi di soluzione dei problemi di diffrazione fondati sul *principio di Huygens* nell'enunciato generalizzato dato da Fresnel o da Kirchhoff.

2. Al § 3 abbiamo già indicato che il principio di Huygens, nell'enunciato di Huygens stesso, è un semplice *artificio geometrico* per la costruzione dei fronti d'onda. In tutte le applicazioni le onde secondarie di Huygens si presentano non come onde reali ma come *sfere ausiliarie* utilizzate per eseguire questa costruzione. Queste sfere centrate sui punti di un fronte d'onda servono soltanto a costruire un *inviluppo* che caratterizza la nuova posizione del fronte d'onda. Ma con tutto ciò resta inspiegato perché la propagazione di un'onda non sia accompagnata da un'*onda inversa*.

Fresnel sostituì l'ipotesi artificiale degli inviluppi delle onde secondarie con una proposizione fisicamente chiara secondo la quale le onde secondarie, sovrapponendosi, *interferiscono*. La luce deve essere osservata in tutti i punti dello spazio dove, interferendo, le onde secondarie si rafforzano; invece, nei punti dove queste onde si smorzano reciprocamente deve regnare

l'oscurità. In questo modo viene interpretato il ruolo dell'inviluppo. Tutte le onde secondarie raggiungono l'inviluppo *con le stesse fasi* e la loro interferenza aumenta l'intensità luminosa. Diventa evidente, almeno da un punto di vista qualitativo, l'assenza dell'onda inversa. Le onde secondarie provocate dal fronte d'onda e dirette in avanti entrano in una regione di spazio non ancora perturbato ed interferiscono soltanto tra loro. Al contrario, le onde secondarie che si propagano all'indietro si trovano in una regione di spazio già occupata da una perturbazione, che è rappresentata dall'onda diretta. Interferendo, le onde secondarie *distruggono l'onda diretta*, di modo che dopo il passaggio dell'onda lo spazio dietro questa onda risulta non perturbato.

Fresnel diede il seguente enunciato del principio Huygens, un po' generalizzato da Rayleigh (1842-1919). *Circondiamo tutte le sorgenti di luce* S_1, S_2, S_3, ... *con una superficie chiusa arbitraria* F (fig. 150). *Ogni punto di*
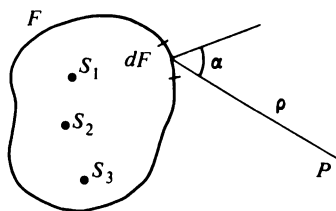
Fig. 150

questa superficie può essere considerato come una sorgente di onde secondarie che si propagano in tutte le direzioni. Queste onde sono coerenti poiché esse sono tutte eccitate dalle stesse sorgenti primarie. Il campo luminoso prodotto dalla loro interferenza nello spazio esterno alla superficie F *coincide con il campo generato dalle sorgenti di luce reali.*

Le sorgenti di luce reali possono quindi essere sostituite da una superficie luminosa F, che le circonda, costituita da sorgenti secondarie coerenti uniformemente ripartite su questa superficie. La differenza tra questa superficie ed una superficie reale che irraggia consiste nel fatto che essa è assolutamente trasparente a tutte le radiazioni. Questo enunciato del principio di Huygens-Fresnel esprime una proposizione molto generale; un'onda emessa da una sorgente evolve in modo *autonomo*, assolutamente indipendente dall'esistenza della sorgente che l'ha prodotta.

3. Per formulare questo principio in forma matematica, supponiamo che le sorgenti emettano luce monocromatica di frequenza ω. Secondo l'ipotesi di Fresnel ogni elemento dF della superficie F (fig. 150) emette un'onda sferica secondaria ed il campo d'onda nel punto d'osservazione P è rappresentato dalla sovrapposizione di queste onde nella forma dell'inte-

grale

$$E = \int \frac{a\,dF}{\rho} e^{i(\omega t - k\rho)} \tag{39.1}$$

esteso a tutta la superficie (chiusa) F. Fresnel suppose che l'ampiezza dell'onda secondaria fosse proporzionale a quella dell'onda primaria che arriva sull'elemento dF ed all'area dell'elemento di superficie dF. Inoltre, l'ampiezza diminuisce con il crescere dell'angolo tra la normale alla superficie F e la direzione della radiazione dell'onda secondaria. Fresnel non diede alcuna espressione concreta dell'ampiezza dell'onda secondaria. Ciò è stato fatto soltanto nel 1883 da Kirchhoff (1824-1887) che diede un enunciato rigoroso del principio di Huygens-Fresnel (si veda il § 43). Ciò malgrado Fresnel riuscì ad ottenere soluzioni corrette di molti problemi di diffrazione utilizzando semplici considerazioni intuitive e metodi non rigorosi di calcolo. Questi metodi semplici, capaci di risolvere molti problemi, sono ancora utilizzati per un'esposizione elementare della teoria della diffrazione. Questi sono i metodi su cui è basato anche questo libro. Verranno soltanto modificate quelle supposizioni di Fresnel (che non influenzano il risultato definitivo) che risultano inesatte.

4. Consideriamo dapprima la propagazione libera di un'onda sferica

$$E_0 = \frac{1}{r_0} e^{i(\omega t - kr_0)} \tag{39.2}$$

in un mezzo omogeneo (fig. 151). In quest'espressione si potrebbe far comparire un'ampiezza costante A_0, ma preferiamo scegliere le unità di misura in modo che sia $A_0 = 1$. Come superficie ausiliare F, che compare nella formula (39.1), prendiamo un fronte d'onda sferico di raggio r_0. Secondo
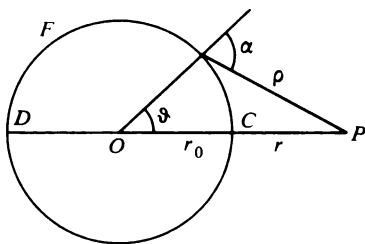
Fig. 151

l'ipotesi di Fresnel $a = K(\alpha)e^{-ikr_0}/r_0$, dove la funzione $K(\alpha)$ dipende, oltre che dalla lunghezza d'onda, soltanto dall'angolo tra la normale al fronte d'onda e la direzione in cui viene emessa l'onda secondaria di Huygens. Il campo totale nel punto d'osservazione P è rappresentato dall'integrale

$$E = \int \frac{K(\alpha)}{r_0 \rho} e^{i(\omega t - kr_0 - k\rho)} dF.$$

Se si prende come unità d'area dF l'area di un anello tagliato sul fronte d'onda da due sfere concentriche infinitamente vicine con centro nel punto d'osservazione P, si ha $dF = 2\pi r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta$. Prendiamo come variabile d'integrazione la distanza ρ. Derivando la relazione $\rho^2 = r_0^2 + (r_0 + r)^2 - 2r_0(r_0 + r) \cos \vartheta$ con r_0 e r costanti, troviamo $\sin \vartheta\, d\vartheta$ e quindi l'elemento d'area dF. Si ottiene in definitiva

$$E = \frac{2\pi}{r_0 + r} e^{i(\omega t - kr_0)} \int_r^{r_{max}} K(\rho) e^{-ik\rho} d\rho, \tag{39.3}$$

dove la funzione precedente $K(\alpha)$ è ora considerata come funzione di ρ. Il limite superiore d'integrazione è uguale a $r_{max} = r + 2r_0$. Ma, tenendo conto delle ulteriori applicazioni, non lo concretizziamo. È evidente che il calcolo esatto dell'integrale (39.3) è impossibile se non si conosce la forma della funzione $K(\rho)$. Ma Fresnel, utilizzando la piccolezza della lunghezza
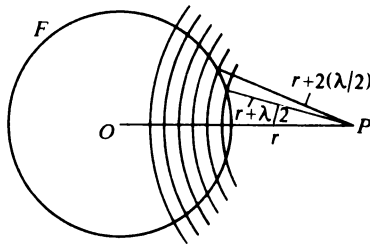
Fig. 152

d'onda, diede un procedimento di calcolo approssimato di tali integrali, basandosi su considerazioni molto generali sulle proprietà della funzione $K(\rho)$. Prendendo il punto P come centro, descriviamo sfere concentriche di raggi r, $r + \lambda/2$, $r + 2(\lambda/2)$, $r + 3(\lambda/2)$, ... (fig. 152). Queste sfere dividono il fronte d'onda F in zone anulari, dette più tardi *zone di Fresnel*. Data la piccolezza della lunghezza d'onda, la variabile indipendente ρ e con essa anche la funzione $K(\rho)$, all'interno di ogni zona, possono essere considerate costanti. In quest'approssimazione l'integrale (39.3), rispetto alla zona n-esima, sarà uguale a

$$K_n \int_{r+(n-1)\lambda/2}^{r+n\lambda/2} e^{-ik\rho} d\rho = (-1)^{n+1} \frac{2K_n}{ik} e^{-ikr},$$

dove K_n rappresenta il valore medio della funzione $K(\rho)$ per la zona n-esima. Se N è il numero totale di zone che emettono onde secondarie ver-

so il punto d'osservazione, il campo E sarà definito da una somma contenente termini a segni alternati

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_N. \tag{39.4}$$

Il termine generale ha la forma

$$E_n = (-1)^{n+1} \frac{4\pi K_n}{ik(r_0 + r)} e^{i[\omega t - k(r_0 + r)]}. \tag{39.5}$$

Il fatto che nella somma (39.4) i termini vicini abbiano segni contrari significa che le vibrazioni prodotte da zone di Fresnel vicine sono in opposizione di fase. Ciò poteva essere previsto poiché dalla costruzione stessa delle zone di Fresnel è evidente che una vibrazione è in ritardo di una semionda rispetto alla vibrazione vicina. Secondo l'ipotesi di Fresnel il valori assoluti dei fattori K_n e quindi dei termini della somma (39.4) decrescono lentamente con il crescere del numero n. Eliminiamo dalla somma (39.4) il termine E_1 ed aggiungiamo il termine E_{N+1}. Data la lenta diminuzione dei termini della somma (39.4) ci si può intuitivamente aspettare che ciò non possa cambiare di molto il valore assoluto di questa somma ma cambi invece il suo segno. Ammettendo ciò, insieme con la (39.4) si può anche scrivere

$$E = -E_2 - E_3 - \ldots - E_N - E_{N+1}.$$

Si ha allora $2E = E_1 - E_{N+1}$. Ma nella stessa approssimazione $E_N = -E_{N-1}$ e di conseguenza

$$E = \frac{1}{2}(E_1 + E_N). \tag{39.6}$$

Quindi la perturbazione vibratoria creata dalle prime N zone di Fresnel è uguale alla semisomma delle perturbazioni prodotte dalle zone estreme.

Prendiamo ora tutte le zone che si trovano sul fronte d'onda sferico F (fig. 151). Introduciamo l'ipotesi (che è giustificata dall'enunciato rigoroso del principio di Huygens dato da Kirchhoff) che per $\alpha = \pi$, cioè nel punto D del fronte d'onda, la funzione $K(\alpha)$ s'annulli. Si ha allora $E_N = 0$, e dalla formula (39.6) otteniamo

$$E = \frac{1}{2} E_1 = \frac{2\pi K_1}{ik(r_0 + r)} e^{i[\omega t - k(r_0 + r)]}, \tag{39.7}$$

cioè *se l'onda si propaga liberamente la perturbazione vibratoria prodotta da tutto il fronte d'onda è uguale alla metà della perturbazione prodotta dalla sola prima zona di Fresnel.* Tutto avviene come se in tutto il fronte

d'onda la sola parte attiva fosse una porzione della prima zona di Fresnel [1].

5. La formula (39.7) è interessante in quanto permette di determinare esattamente il fattore K_1. Infatti, se l'onda sferica (39.2) si propaga liberamente, l'intensità del campo è nota in anticipo in ogni punto dello spazio. In particolare, nel punto d'osservazione

$$E = \frac{1}{r_0 + r} e^{i[\omega t - k(r_0 + r)]}.$$

Confrontando quest'espressione con la (39.7), troviamo

$$K_1 = \frac{ik}{2\pi} = \frac{k}{2\pi} e^{i\pi/2}. \tag{39.8}$$

Il fattore K_1, come tutti gli altri fattori K_2, K_3, ... è puramente immaginario. Ciò significa che *le onde secondarie di Huygens sono in anticipo di* $\pi/2$ *sulla fase delle vibrazioni del campo* in tutti i punti del fronte d'onda. Se così non fosse le onde secondarie emesse dal centro della prima zona di Fresnel arriverebbero nel punto d'osservazione con una fase $\omega t - k(r_0 + r)$ e quelle emesse dai bordi di questa zona arriverebbero nello stesso punto con una fase più piccola uguale a $\omega t - k(r_0 + r) - \pi$. In questo caso la fase della vibrazione risultante, eccitata da tutta la prima zona, sarebbe uguale alla semisomma di questi valori, cioè risulterebbe di $\pi/2$ inferiore rispetto al valore corretto.

6. I risultati (39.6) e (39.7) presentano un'importanza essenziale nel metodo delle zone di Fresnel. Per comprendere meglio interpretiamo queste formule mediante un diagramma vettoriale (si veda il vol. III, § 126). Dividiamo ogni zona di Fresnel in m sottozone anulari (nella fig. 153,*a* la costruzione è eseguita per $m = 6$). Le vibrazioni eccitate nel punto d'osservazione da queste sottozone sono rappresentate sul diagramma vettoriale dai vettori $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ecc. che formano una spezzata. La vibrazione prodotta da più sottozone vicine è data dalla somma geometrica di questi vettori. Per esempio, il vettore $\overrightarrow{A_0A_6}$ caratterizza l'« attività » della prima zona di Fresnel, il vettore $\overrightarrow{A_0A_{12}}$ caratterizza l'azione congiunta delle prime due zone di Fresnel, ecc. Se il numero di sottozone viene fatto tendere all'infinito, al limite la spezzata diventa una spirale continua che si avvolge

[1] Questo risultato è spesso interpretato come una prova della propagazione rettilinea della luce: è come se la luce si propagasse in un canale rettilineo la cui sezione trasversale retta avesse dimensioni dell'ordine della prima zona di Fresnel. Ma non si deve dimenticare che questa conclusione concerne la propagazione *libera* di un'onda quando il problema della propagazione rettilinea non si pone in generale. Questo problema si pone soltanto quando sul cammino della luce *esistono ostacoli* e viene quindi ricondotto al *problema delle ombre* che è un caso particolare della *diffrazione della luce*.

attorno al fuoco F (fig. 153,*b*). Su questa spirale l'azione della prima zona di Fresnel è presentata dal vettore $\overrightarrow{A_0A_6}$ e quella di tutto il fronte d'onda dal vettore $\overrightarrow{A_0F}$ il quale è quasi esattamente la metà del precedente. L'azione della metà centrale della prima zona è rappresentata dal vettore obliquo $\overrightarrow{A_0A_3}$, ecc.
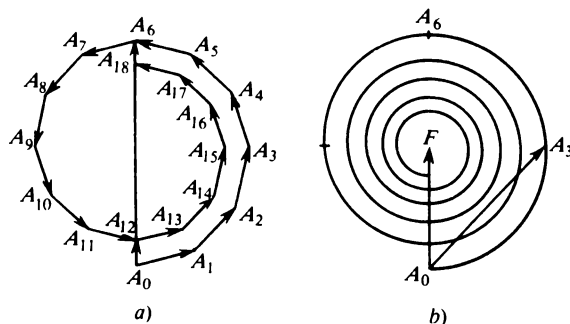
Fig. 153

7. Nel § 27 (punto 8) abbiamo visto come il passaggio di un'onda sferica convergente nel fuoco (cioè per il suo centro) è accompagnato da un cambiamento di fase di π. Diamo una nuova interpretazione di questo fenomeno, utilizzando il metodo delle zone di Fresnel.

Come sempre, le zone di Fresnel debbono essere costruite dalla parte del fronte d'onda *in cui esso si propaga*. Nel caso considerato questo è il lato concavo del fronte. È evidente che anche qui le onde secondarie sono in anticipo sulla fase delle vibrazioni sul fronte d'onda, poiché questa è una proprietà delle *sorgenti elementari di onde secondarie*; che è indipendente
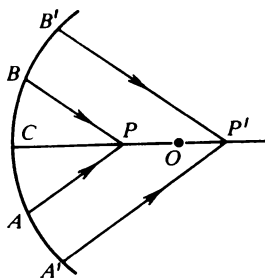
Fig. 154

dalla forma del fronte d'onda sul quale esse si trovano. L'azione di tutto il fronte d'onda nel punto d'osservazione, quando l'onda si propaga liberamente, è come prima uguale alla metà dell'azione esercitata dalla prima zona di Fresnel. In particolare, le onde secondarie emesse da questa zona, interferendo, presentano sempre la fase conveniente, indipendentemente dalla posizione del punto d'osservazione. Si il punto d'osservazione P si trova davanti al centro O

(fuoco) di un'onda sferica convergente (fig. 154), niente cambierà nei nostri ragionamenti precedenti, poiché in questo caso le vibrazioni provenienti dai bordi A e B della prima zona di Fresnel arrivano in P più tardi di quelle emesse dal suo centro C. Ma la situazione cambia quando il punto d'osservazione P' si trova dall'altro lato del centro O (è evidente che allora anche la prima zona $A'B'$ è differente). Ora i bordi A' e B' della prima zona si trovano di una semionda più vicini al punto P' di quanto non sia il suo centro C. In conseguenza di ciò, oltre al solito anticipo in fase di $\pi/2$, le onde secondarie che arrivano a P' dai bordi A' e B' della prima zona riceveranno un incremento supplementare di fase uguale a π, di modo che l'anticipo totale in fase sarà uguale a $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \pi$. Quest'incremento dev'essere aggiunto alla fase $\omega t - kr$ dell'onda che passa per il punto O. In questo modo si produce il fenomeno del cambiamento di fase di un'onda sferica convergente passante per il fuoco.

Quando il punto d'osservazione P s'avvicina al fuoco O, le zone di Fresnel s'allargano. Per una certa posizione P_0 di questo punto la prima zona di Fresnel si estende a tutta la sfera. Se il punto P si avvicina ancora ad O, la costruzione delle zone di Fresnel diventa impossibile; si potrebbe dire che tutta la sfera è una parte della prima zona di Fresnel. Applicando a questo caso i nostri ragionamenti precedenti, è facile convincersi che la fase dell'onda presenta un anticipo compreso tra zero e $\pi/2$, quando il punto d'osservazione si trova tra P_0 ed O. Nel punto O questo anticipo è uguale a $\pi/2$ ed oltrepassandolo cresce fino a π. Quindi la variazione di fase di π per un'onda che attraversa il fuoco avviene in modo continuo.

§ 40. *Diffrazione prodotta sull'asse da un'apertura circolare e da uno schermo. Reticolo a zone*

1. Interponiamo tra una sorgente puntiforme S ed il punto d'osservazione P uno schermo opaco con un'apertura circolare il cui piano sia perpendicolare all'asse SP ed il cui centro O si trovi sullo stesso asse (fig. 155).
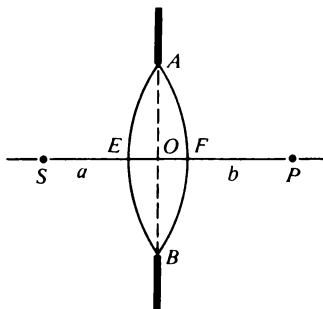
Fig. 155

Secondo Fresnel l'azione di questo ostacolo consiste nel fatto che lo schermo sopprime quella parte del fronte d'onda che viene coperta mentre nella parte scoperta il campo luminoso non si modifica. Quest'ipotesi corrispon-

de all'approssimazione dell'ottica geometrica e perciò essa può essere approssimativamente valida solo se il raggio dell'apertura è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda della luce. Questa è l'ipotesi che facciamo ed inoltre supponiamo anche che le dimensioni del foro si possano variare, il che rende possibile scoprire un numero qualsiasi di zone di Fresnel.

Siano a_0 ed I_0 l'ampiezza e l'intensità della luce nel punto P quando l'onda si propaga liberamente, cioè in assenza dello schermo. Il flusso luminoso totale che attraverso il foro arriva in P è rigorosamente proporzionale alla sua area, ma la sua ripartizione sulla superficie illuminata dipenderà dal numero di zone di Fresnel contenente sulla superficie del foro. In certe regioni della superficie illuminata l'intensità può essere più piccola di I_0 e più grande in altre, senza violare la legge di conservazione dell'energia.

Se il foro lascia scoperta la prima zona di Fresnel, l'ampiezza e l'intensità della luce nello stesso punto sono uguali ad $a_1 = 2a_0$, $I_1 = (2a_0)^2 = 4I_0$. Quindi l'intensità in P è quattro volte più grande di quella che si ha per la propagazione libera dell'onda luminosa. Quando ci si allontana dal centro P l'intensità diminuisce monotonamente. Se il raggio del foro aumenta, nel punto P possono arrivare le onde secondarie. La loro interferenza con le onde arrivate prima provoca una diminuzione dell'intensità luminosa nello stesso punto. Per certe dimensioni del foro il centro P della figura di diffrazione cessa di essere il punto d'intensità massima ed attorno al punto P comincerà a formarsi un anello brillante verso il quale si sposterà il massimo d'intensità. Quando il foro lascia scoperte le prime due zone di Fresnel, le loro azioni si elimineranno mutuamente per interferenza e nel punto P apparirà un cerchio scuro circondato da un anello brillante.

Aumentando ancora le dimensioni del foro, le azioni delle due prime zone di Fresnel continuano a compensarsi. Tutto il campo luminoso nel punto P è prodotto soltanto da una parte della terza zona di Fresnel. Al centro della figura di diffrazione compare una macchia brillante ed il cerchio scuro centrale si allarga e si trasforma in un anello scuro che circonda questa piccola macchia. Quando il numero N di zone scoperte è uguale a tre, l'intensità luminosa nel punto P è la stessa che si avrebbe se fosse scoperta soltanto la terza zona di Fresnel. Il centro della figura di diffrazione risulta quasi ugualmente brillante quanto lo è nel caso in cui sia scoperta la sola prima zona di Fresnel. Per $N = 4$ il centro diventa scuro. In generale, per N dispari il centro degli anelli di diffrazione è brillante e per N pari è scuro. Nella figura schematica 156 è rappresentata la ripartizione dell'intensità luminosa per differenti valori di N in funzione della distanza dal centro della figura di diffrazione, mentre la figura 157 riproduce fotografie di anelli di diffrazione osservati per N dispari (*a*) e pari (*b*).

2. Determiniamo ora le dimensioni ed il numero m di zone di Fresnel contenute nel foro AB (fig. 155). Siano D il diametro del foro ed a e b le distanze tra il suo centro ed i punti S e P. Prendendo i punti S e P come centri, descriviamo sfere tangenti ai bordi di AB. Trascurando i quadrati dei

segmenti OE ed OF, in virtù di un noto teorema geometrico possiamo scrivere

$$(D/2)^2 \approx OF \cdot 2a, \quad (D/2)^2 = OE \cdot 2b,$$

da cui

$$EF = EO + OF = \frac{D^2}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Il numero m si trova dividendo il segmento EF per $\lambda/2$

$$m = \frac{D^2}{4\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \qquad (40.1)$$

Se m è un numero intero, allora D è il diametro e $R_m = D/2$ è il raggio della
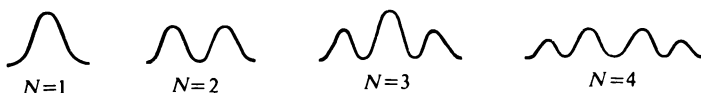
Fig. 156

zona m-esima, o più esattamente il raggio del suo bordo esterno. Si avrà dunque

$$R_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}\, m\lambda}. \qquad (40.2)$$

Per esempio, se $a = b = 1$ m, $\lambda = 600$ nm, si avrà $R_1 \approx$. 0,77, $R_3 \approx 0{,}95$ mm, ecc.
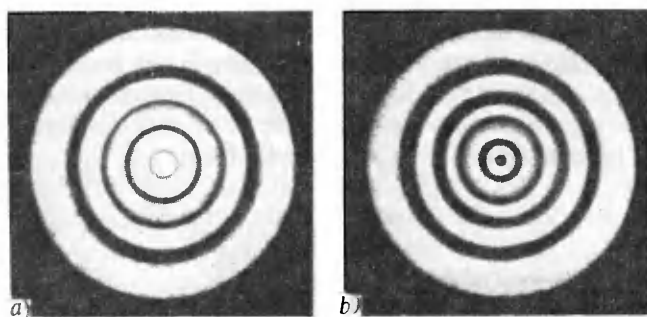
Fig. 157

3. L'intensità della luce nel punto d'osservazione P può essere rafforzata di molte volte, coprendo tutte le zone di Fresnel pari o dispari. Le zone

rimaste scoperte rafforzeranno l'azione dell'una sull'altra. La copertura può essere realizzata mettendo nel piano del foro un *reticolo a zone* (fig. 158). Questo reticolo può essere preparato, tracciando su un foglio di carta anelli scuri e fotografando poi questi anelli in scala ridotta. I raggi interni ed esterni degli anelli debbono essere rispettivamente proporzionali alle radici quadrate dei numeri dispari e pari successivi. Allora si ottiene un reticolo il cui centro è chiaro. Si può anche fabbricare un reticolo analogo a centro scuro. La larghezza di tutti gli anelli deve essere grande rispetto alla lunghezza d'onda; se le dimensioni degli anelli sono adeguate, il reticolo a
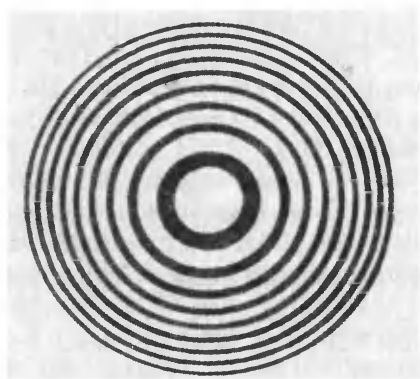
Fig. 158

centro chiaro rimuoverà dal fronte d'onda tutte le zone di Fresnel pari e quello a centro scuro tutte le zone di Fresnel dispari.

Il rafforzamento dell'intensità di luce mediante un reticolo a zone è analogo all'azione focalizzante di una lente. Per di più, le distanze del reticolo a zone dalla sorgente S e dall'« immagine » P sono legate dalla stessa relazione che lega le corrispondenti distanze nel caso di una lente. Questo è evidente se la formula (40.1) è riscritta nella forma

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{40.3}$$

dove la « distanza focale » è data dalla formula

$$\frac{1}{f} = \frac{4m\lambda}{D^2} = \frac{m\lambda}{R_m^2}. \tag{40.4}$$

Se il centro del reticolo è chiaro, il numero m è dispari, in questo caso nella formula (40.4) figura il raggio (esterno) dell'anello brillante del reticolo a zone. Se, invece, il centro del reticolo a zone è scuro, il numero m è pari e

per R_m dev'essere inteso il raggio (esterno) dell'anello scuro. Per calcolare f si può prendere qualsiasi valore di m.

Con l'aiuto del reticolo a zone si possono persino ottenere immagini ottiche, benché di qualità mediocre.

A differenza delle lenti, il reticolo a zone possiede *più fuochi*. Infatti, determiniamo la posizione del punto d'osservazione P per la quale nel cerchio centrale del reticolo compaiono le prime tre zone di Fresnel. Allora il successivo anello del reticolo a zone conterrà la quarta, quinta e sesta zone e così via. Se il centro del reticolo a zone è chiaro, il campo nel punto P sarà dato dalla somma

$$E = (E_1 + E_2 + E_3) + (E_7 + E_8 + E_9) + (E_{13} + E_{14} + E_{15}) + \dots$$

o $E = E_1 + E_7 + E_{13} + \dots$, poiché le azioni delle zone vicine si eliminano mutuamente quasi completamente. In P si ottiene un massimo di intensità luminosa (cioè un fuoco). La distanza focale è calcolata mediante la formula $f_1 = R_1/(3\lambda) = f/3$. Analogamente vengono determinati i fuochi di ordine superiore

$$f_n = \frac{f}{2n + 1}, \tag{40.5}$$

dove n sono numeri interi positivi e negativi. Ai valori negativi di n corrispondono onde divergenti e *fuochi virtuali*.

Rayleigh ha mostrato che l'intensità luminosa nel punto d'osservazione P aumenta di quattro volte se si varia di π la fase delle onde secondarie prodotte da tutte le zone di Fresnel di ordine pari (o dispari). Un « *reticolo a zone in opposizione di fase* » è stato costruito da Wood (1868-1955) mediante la mordenzatura della superficie di una lastra di vetro. La sua azione è completamente equivalente all'azione di una lente, poiché in entrambi i casi le onde secondarie prodotte da tutti i punti del fronte d'onda arrivano in P con la stessa fase.

4. Interponiamo ora tra la sorgente S ed il punto d'osservazione P uno schermo opaco circolare AB (fig. 159), il cui piano è perpendicolare all'as-
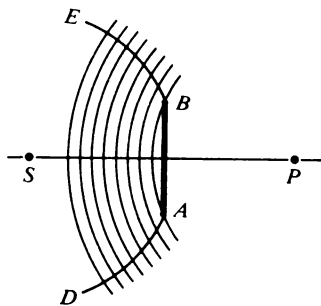
Fig. 159

se *SP*. Siano *DA* e *BE* parti scoperte del fronte d'onda di un'onda sferica emessa dalla sorgente *S*. Dividiamola in zone di Fresnel anulari, cominciando la loro costruzione dal bordo dello schermo. Ragionando come prima, esprimiamo l'intensità del campo nel punto *P* come la metà dell'intensità creata in questo punto dalle onde secondarie della prima zona di Fresnel anulare. Quindi, quale che sia il diametro dello schermo circolare, nel centro *P* della sua ombra geometrica deve esser osservata una piccola *macchia chiara*. Quest'è la conclusione alla quale arrivò Poisson (1781-1840), che trovò la cosa tanto assurda da utilizzarla come argomento contro la teoria ondulatoria della luce di Fresnel. Arago (1786-1853) realizzò immediatamente l'esperimento ed osservò la macchia chiara prevista da Poisson [1]. Questo fenomeno fu chiamato *macchia di Arago-Poisson*. La figura 160 riproduce la figura di diffrazione prodotta da uno schermo circolare.
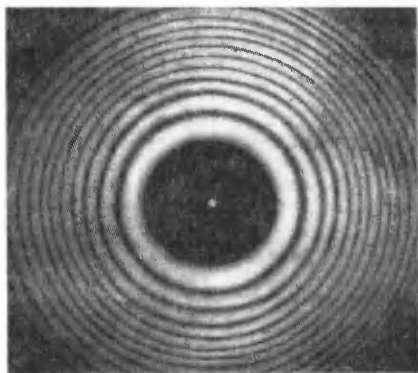
Fig. 160

Fig. 161

Se il punto d'osservazione non si trova al centro della figura di diffrazione, le zone di Fresnel anulari si possono costruire anche per questo punto. Ma le zone situate più vicino al centro risulteranno scoperte soltanto parzialmente. Ciò complica molto il calcolo delle intensità luminose. Si può solo dire che la figura di diffrazione deve possedere una simmetria assiale. All'infuori dell'ombra geometrica si ottiene un sistema di anelli concentrici chiari e scuri. All'interno dell'ombra geometrica stessa possono anche formarsi anelli di diffrazione, particolarmente quando lo schermo co-

---

[1] Maraldi aveva osservato tale macchia già nel 1723. È probabile che Delille l'osservasse ancor prima (1715), benché le indicazioni di quest'ultimo manchino di precisione. Questi risultati passarono inosservati e furono dimenticati, poiché non venne compresa la natura di questo fenomeno.

pre un piccolo numero di zone di Fresnel. Ma questi anelli sono poco netti e la ripartizione della luce in esse è complicata.

Per la dimostrazione della macchia di Arago-Poisson può essere utilizzato l'esperimento di Pohl. Pohl fotografò una sagoma fortemente illuminata, avendo sostituito l'obiettivo con una palla metallica liscia. Questa fotografia è riprodotta nella figura 161 ed i parametri del dispositivo sono riportati nel problema alla fine di questo paragrafo. Angerer fotografò un viso umano avendo sostituito la palla con un disco metallico.

5. Applicchiamo il metodo delle zone di Fresnel per spiegare la formazione delle *ombre*, cioè per spiegare la *propagazione rettilinea della luce*. Visto che si tratta di una legge che per principio deve dar luogo a deviazioni, i nostri ragionamenti non possono essere rigorosi.

Supponiamo che sul cammino di un'onda luminosa sia interposto uno schermo o un'apertura di forma arbitraria. Le loro dimensioni debbono essere grandi rispetto alla lunghezza d'onda. Dividiamo il fronte d'onda in zone di Fresnel anulari. Alcune zone possono essere interamente scoperte, altre scoperte parzialmente ed altre infine completamente coperte.

Supponiamo dapprima che il punto d'osservazione si trovi al di fuori dell'ombra geometrica, lontano dalla sua frontiera. I primi termini della serie (39.4) restano gli stessi di quelli ottenuti nel caso di un'onda propagantesi liberamente. I termini successivi invece sono modificati, il che è dovuto alla schermatura parziale delle corrispondenti zone. In dipendenza dalla forma del bordo dello schermo queste modifiche avranno un carattere più o meno irregolare. Se si verifica che questi termini tendono a diminuire in modulo, è verosimile supporre che l'intensità del campo nel punto d'osservazione sia uguale alla metà dell'intensità prodotta dalla zona centrale. Nel caso di una sorgente puntiforme e di un bordo rettilineo dello schermo può succedere che non sia così. Ma se la sorgente di luce non è puntiforme ed i bordi dello schermo non sono molto regolari, avrà luogo un'*ugualizzazione statistica* nella sovrapposizione delle figure di diffrazione prodotte dalle sorgenti puntiformi, componenti la sorgente estesa reale. Allora lontano dal bordo dello schermo si ottiene lo stesso illuminamento che si otterrebbe nel caso di un'onda propagantesi liberamente.

Supponiamo ora che il punto d'osservazione si trovi all'interno dell'ombra geometrica, di nuovo lontano dalla sua frontiera. Le prime zone di Fresnel saranno completamente coperte. Cominciamo la numerazione delle zone dalla prima zona parzialmente scoperta e rappresentiamo il campo con la serie

$$E = (E_1 + E_2 + \dots + E_N) + (E_{N+1} + E_{N+2} + \dots),$$

dove $N + 1$ significa la prima zona interamente scoperta. Alla seconda parentesi si possono applicare i ragionamenti utilizzati nel caso della propagazione libera di un'onda; questa parentesi vale dunque approssimativamente $1/2E_{N+1}$. Nella prima parentesi i termini variano in modo più o meno irre-

golare manifestando in media una tendenza ad aumentare in valore assoluto. Eseguendo una media statistica (tenendo conto del fatto che la sorgente non è completamente puntiforme e che i bordi dello schermo sono irregolari) queste irregolarità si compensano di modo che l'espressione nella prima parentesi può essere considerata uguale a $1/2(E_1 + E_N)$ o a $1/2E_N$, poiché E_1 deve essere considerata vicina allo zero, essendo piccola la parte scoperta della corrispondente zona. Dunque, $E = 1/2(E_N + E_{N+1}) \approx 0$, poiché per le zone vicine $E_N \approx -E_{N+1}$. Quindi per un punto contenuto nella zona d'ombra geometrica l'intensità luminosa diventa nulla.

Se la sorgente è puntiforme ed i bordi dello schermo sono regolari, la frontiera dell'ombra geometrica risulta costituita da frange di diffrazione, come abbiamo già osservato nel caso di diffrazione da un foro o da uno schermo circolare. Ma se i bordi dello schermo sono irregolari, le frange cominciano a diffondersi e con il crescere delle dimensioni della sorgente si trasformano in una penombra.

Problemi

1. Nell'esperimento di Pohl descritto in precedenza il diametro della palla è $D = 40$ mm, la distanza tra la palla e l'oggetto da fotografare $a = 12$ m, la distanza tra la palla e l'immagine $b = 18$ m, la dimensione lineare dell'oggetto $y = 7$ mm. Calcolare la dimensione y' dell'immagine. In quali condizioni l'esperimento fornisce un'immagine con una palla la cui superficie è ricoperta da molte scalfiture irregolari?

Risposta. $y' = \frac{b}{a} y = 10{,}5$ mm. Perché l'esperimento riesca, è necessario che la profondità delle scalfiture h non sia superiore alla larghezza della zona di Fresnel estrema

$$h = \frac{\lambda}{D} \frac{ab}{a + b} = 180\,\lambda = 0{,}1 \text{ mm}.$$

2. Stimare le dimensioni angolari massime α di un oggetto che può essere fotografato, utilizzando un disco opaco a bordi perfettamente regolari.

Soluzione. Se l'oggetto puntiforme viene spostato fuori dall'asse ottico principale, il disco appare come un'ellisse. Il semiasse minore dell'ellisse differisce dal raggio del disco di $r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$. Questa differenza non deve essere superiore alla larghezza della zona di Fresnel estrema. Da questa condizione troviamo le dimensioni angolari massime ammissibili

$$\alpha < \frac{4}{D}\sqrt{\frac{\lambda ab}{a + b}} \approx 0{,}2 \text{ rad} \approx 10°,$$

usando le notazioni ed i valori numerici del problema precedente.

3. Un reticolo a zone è utilizzato per fotografare un oggetto che si vede sotto un angolo $\alpha = 0{,}1$ rad dal punto dove si trova il reticolo. Stimare il numero ottimale di zone del reticolo per ottenere un'immagine di luminosità e di nettezza massime.

Soluzione. Supponiamo che la sorgente di luce S sia puntiforme e che il reticolo a zone CD sia inclinato sull'asse ottico di un angolo $(\pi - \alpha)/2$ (fig. 162). La figura mostra che $x^2 = a^2 + R^2 + 2aR \sin\frac{\alpha}{2}$ e che y è dato da una formula analoga. Calcolando le radici quadra-

te e trascurando le potenze superiori a due del raggio R otteniamo la differenza di cammino tra i raggi SCP e SOP

$$\Delta = (x + y) - (a + b) = \frac{R \cos^2 (\alpha/2)}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

dove $\Delta = \Delta_0 - \delta\Delta$. Qui Δ_0 è il valore di Δ quando il reticolo è perpendicolare all'asse e $\delta\Delta$ è l'incremento di Δ dovuto all'inclinazione

$$\delta\Delta = \Delta_0 \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \Delta_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{1}{4} \Delta_0 \alpha^2.$$

Se $\delta\Delta \ll \lambda$, l'inclinazione del reticolo a zone non influenzerà sostanzialmente l'azione delle zone contenute in un cerchio di raggio R. Se, invece, $\delta\Delta \approx \lambda/2$, tutte le zone che si trovano al di
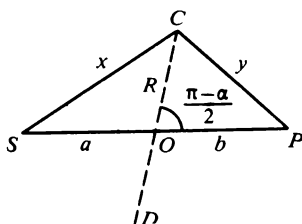
Fig. 162

sopra di questo cerchio diventano non soltanto inutili ma persino nocive. Da questa condizione si deduce il valore limite della differenza di cammino dei raggi: $\Delta_0 \approx 2\lambda/\alpha^2$. Il corrispondente numero di zone di Fresnel è quindi

$$N \approx \frac{\Delta_0}{\lambda/2} \approx \frac{4}{\alpha^2}.$$

Supponiamo ora che l'oggetto fotografato non sia puntiforme ed inoltre che il suo centro sia sull'asse del reticolo a zone. Per i punti periferici dell'oggetto che non si trovano sull'asse del reticolo, quest'ultimo agisce come se fosse inclinato di un angolo $\alpha/2$. Perciò il numero massimo di zone di Fresnel per il quale otteniamo la miglior immagine è

$$N \sim 4/\alpha^2 \sim 400.$$

§ 41. *Metodo di Fresnel per la soluzione dei problemi di diffrazione. Diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel*

1. Il solo principio di Huygens non è sufficiente per risolvere problemi di diffrazione, nemmeno nella formulazione esatta data da Kirchhoff (si veda il § 43). Questo principio non fa altro che ridurre un problema di diffrazione qualsiasi al calcolo del campo d'onda su una superficie chiusa F arbitraria che circonda tutte le sorgenti di luce (fig. 150). Ma il calcolo esatto del campo sulla superficie F è possibile soltanto quando si conosca il

campo in tutto lo spazio. Per superare questa difficoltà Fresnel ha avanzato un'ipotesi speciale che abbiamo già utilizzato nel paragrafo precedente. Enunciamo quest'ipotesi, prendendo come esempio uno schermo opaco piano bucherellato, interposto sul cammino dell'onda luminosa.

• Prendiamo come superficie ausiliaria F la faccia posteriore dello schermo (cioè la faccia non illuminata). Ammettiamo che in tutti i punti di questa superficie ricoperti dallo schermo il campo d'onda sia nullo e che sui fori questo campo sia determinato dalle leggi approssimate dell'ottica geometrica, cioè questo campo sarebbe uguale a quello che si avrebbe senza lo schermo. L'integrazione della (39.1) è estesa soltanto ai fori dove il campo d'onda è supposto noto. Notiamo qualche imperfezione di quest'ipotesi.

1) Quest'ipotesi non può essere applicata in modo univoco a schermi non piani, poiché in questo caso non si può definire una superficie ausiliaria contenente i fori praticati nello schermo.

2) L'ipotesi è contradditoria. Se mediante il principio di Huygens calcoliamo il campo d'onda esteso a tutto lo spazio, sulla superficie F questo campo non coincide con il campo iniziale utilizzato nei calcoli. Sulla faccia posteriore dello schermo il campo calcolato non si annulla e sui fori non coincide con il campo di un'onda propagantesi liberamente.

3) L'ipotesi ammette una discontinuità del campo d'onda sui bordi dei fori e questo contraddice le condizioni al contorno dell'elettrodinamica di Maxwell.

4) L'ipotesi è in contraddizione con il carattere trasversale delle onde luminose. Questa contraddizione non può essere eliminata sostituendo vibrazioni scalari con vibrazioni vettoriali, poiché nello studio dei fenomeni d'interferenza abbiamo supposto che le vibrazioni fossero scalari soltanto per semplicità. Nel passare alle vibrazioni vettoriali l'enunciato matematico del principio di Huygens ed i risultati che ne seguono non vengono praticamente modificati. Come ha rigorosamente dimostrato Kirchhoff, per farlo è sufficiente sostituire dappertutto lo scalare E con il vettore $\mathbf{E}$.

Supponiamo ora che su uno schermo opaco nel quale è praticato un foro cada normalmente un'onda elettromagnetica piana linearmente polarizzata. Sulla superficie ausiliare F il vettore $\mathbf{E}$ avrà dappertutto la stessa direzione, parallela al piano dello schermo. Il principio di Huygens riduce il problema di diffrazione alla sovrapposizione delle vibrazioni di vettori collineari aventi lo stesso senso. Perciò ci si può aspettare che il vettore $\mathbf{E}$ dell'onda diffratta sia dappertutto parallelo al piano dello schermo. Ciò avrà luogo sia lontano dallo schermo, dove le onde diffratte di differenti direzioni divergono e cessano di sovrapporsi, sia in un'onda diffratta in direzione obliqua al piano dello schermo. Ma in realtà il vettore $\mathbf{E}$ è perpendicolare ai raggi diffratti e forma con la direzione calcolata un angolo uguale all'« angolo di diffrazione » ϑ (fig. 163).

Il metodo di Fresnel di risoluzione dei problemi di diffrazione può essere giustificato quando le dimensioni dei fori e degli spazi tra questi fori so-

no grandi rispetto alla lunghezza d'onda, e di conseguenza si osserva una intensità luminosa notevole soltanto per piccoli angoli di diffrazione. Infatti le leggi dell'ottica geometrica sono violate soltanto nelle immediate vicinanze dei bordi di un foro. Utilizzando l'ipotesi di Fresnel, nel calcolare l'integrale (39.1) impieghiamo valori non corretti della funzione integranda soltanto all'interno di strette regioni vicino ai bordi delle aperture. La larghezza di queste regioni è dell'ordine della lunghezza d'onda. Nel principale dominio d'integrazione sono utilizzati valori corretti dell'espressione integranda. Con questa osservazione viene automaticamente eliminata
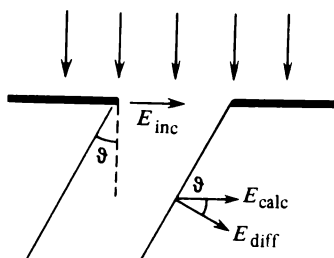
Fig. 163

l'obiezione (4) legata al carattere trasversale delle vibrazioni luminose, poiché si può trascurare la differenza tra le direzioni dei campi calcolato e reale se l'angolo di diffrazione è piccolo. Queste considerazioni sono sostanzialmente confermate dalla concordanza tra risultati sperimentali con quelli calcolati. Ma per ostacoli piccoli, confrontabili con la lunghezza d'onda, e quindi per grandi angoli di diffrazione, l'ipotesi di Fresnel cessa d'essere valida.

Osserviamo anche che l'ipotesi di Fresnel porta alla conclusione che l'onda diffratta non dipende dalla sostanza dello schermo. Questa conclusione è anch'essa sostanzialmente confermata dall'esperienza. Soltanto esperimenti molto precisi rivelano l'influenza che la sostanza dello schermo esercita sulla diffrazione della luce.

2. Si è soliti classificare i fenomeni di diffrazione in dipendenza delle distanze della sorgente e del punto d'osservazione (schermo) dall'ostacolo interposto sul cammino della luce. Quando queste distanze sono molto grandi (infinitamente grandi), si dice che si tratta di *diffrazione alla Fraunhofer* (1787-1826) o *diffrazione di un fascio di raggi paralleli*. Nel caso contrario si dice che si tratta di *diffrazione di un fascio di raggi non paralleli* o *diffrazione di Fresnel*. In pratica per realizzare la diffrazione di Fraunhofer la sorgente di luce puntiforme è posta nel fuoco di una lente convergente. Si ottiene un fascio di luce parallelo che diffrange su un ostacolo. La figura di diffrazione ottenuta viene osservata nel piano focale di una lente posta sul cammino della luce diffratta o mediante un cannocchiale puntato all'infini-

to. È evidente che tra le diffrazioni di Fraunhofer e di Fresnel non esiste alcuna differenza di principio, né una frontiera netta.

Per far comprendere meglio la fondatezza di questa classificazione facciamo un esempio. Consideriamo un'apertura circolare ed una sorgente puntiforme collocata sul suo asse. Disponiamo dapprima il punto d'osservazione su quest'asse. Se l'apertura ricopre solo una parte della prima zona di Fresnel, la diffrazione sarà del tipo alla Fraunhofer. In questo caso tutte le vibrazioni prodotte nel piano dell'apertura hanno praticamente la stessa fase ed arrivano nel punto d'osservazione con questa stessa fase. Se il punto d'osservazione si sposta fuori dell'asse, compaiono differenze di fase tra le onde secondarie che arrivano nel punto d'osservazione da differenti punti dell'apertura. Proprio a questo è dovuta l'apparizione di anelli di diffrazione. Se l'apertura viene sostituita con uno schermo opaco, la diffrazione è ancora del tipo alla Fraunhofer, risultato che giustificheremo con considerazioni che saranno esposte nel punto 4. Se invece l'apertura, o lo schermo opaco, ricopre una parte notevole della prima zona o più zone di Fresnel e se il punto d'osservazione si trova sull'asse, la diffrazione sarà del tipo alla Fresnel.

3. Consideriamo ora il caso generale in cui l'ostacolo è costituito da uno schermo opaco forato (fig. 164), S è una sorgente puntiforme di luce monocromatica e P è il punto d'osservazione. Come origine delle coordinate prendiamo un punto O arbitrario sul piano del foro. In virtù del principio di Huygens-Fresnel il campo d'onda nel punto P è definito dall'integrale

$$E_P = \int \frac{1}{rr'} e^{i\Phi(\boldsymbol{R})} dF, \tag{41.1}$$

dove $\Phi = \omega t - k(r + r')$. Essendo piccoli gli angoli di diffrazione, nell'espressione integranda della (41.1) è stato omesso il fattore $K(\alpha)$ che caratterizza la dipendenza del campo dell'onda secondaria dalla direzione. Il denominatore può essere ammesso costante, poiché le dimensioni del foro sono supposte molto piccole rispetto sia ad r, che ad r'. Ma occorre tener conto della dipendenza della fase Φ dal raggio vettore $\boldsymbol{R}$ che definisce la posizione dell'elemento di superficie dF, poiché la fase varia rapidamente con la distanza (distanze dell'ordine della larghezza di una zona di Fresnel). L'integrazione nella (41.1) è eseguita in tutti i casi su un piccolo numero (non superiore ad alcune decine) di zone di Fresnel complete o incomplete (si veda il seguente paragrafo). Se le distanze r_0 e r_0' sono tanto grandi che lo sviluppo della fase $\Phi(\boldsymbol{R})$ in serie di potenze di $\boldsymbol{R}$ può essere arrestato ai termini di primo grado, queste distanze si possono considerare infinitamente grandi. In queste condizioni la diffrazione è alla Fraunhofer. Se, invece, questa precisione è insufficiente, la diffrazione è alla Fresnel. In generale per una diffrazione alla Fresnel, lo sviluppo della fase $\Phi(\boldsymbol{R})$ in serie di potenze di $\boldsymbol{R}$ può essere arrestato ai termini di secondo grado.

Stabiliamo un criterio quantitativo per sapere in quali condizioni si pos-

sono trascurare i termini quadratici e, quindi, considerare che la diffrazione è alla Fraunhofer. Come è chiaro dalla figura 164, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{R}$, da cui

$$r^2 = r_0^2 + 2(\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{R}) + R^2.$$

Estraendo la radice quadrata e conservando i termini di secondo grado, otteniamo

$$r = r_0 + (\boldsymbol{s}\boldsymbol{R}) + \frac{1}{2r_0}\,[R^2 + (\boldsymbol{s}\boldsymbol{R})^2],$$

dove $\boldsymbol{s}$ indica il vettore unitario $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}_0/r_0$. In modo analogo si calcola la distanza r'. Si ottiene in definitiva

$$\Phi = \omega t - k(r_0 + r_0') + k(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}')\boldsymbol{R} + \\ + \frac{k}{2}\left[\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0'}\right)R^2 + \frac{1}{r_0}\,(\boldsymbol{s}\boldsymbol{R})^2 + \frac{1}{r_0'}\,(\boldsymbol{s}'\boldsymbol{R})^2\right]. \qquad (41.2)$$

A differenza del vettore costante $\boldsymbol{s}$, il vettore unitario $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{r}_0'/r_0'$ varia se si sposta il punto d'osservazione. A questo è dovuta l'apparizione delle figure
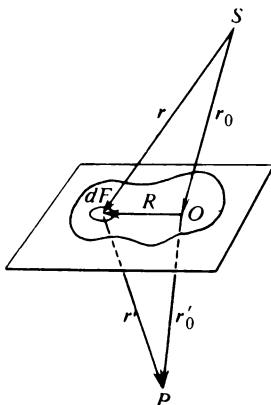
Fig. 164

di diffrazione, cioè la variazione dell'intensità del campo luminoso da un punto all'altro. Il termine $-k(r_0 + r_0')$ non gioca alcun ruolo ed introduce all'espressione per E_P soltanto il fattore di fase costante $e^{-ik(r_0+r_0')}$ che non modifica l'intensità del campo luminoso nel punto P. I termini quadratici sono dell'ordine di

$$kR^2/r_0 = 2\pi R^2/(\lambda r_0) \quad \text{e} \quad kR^2/r_0' = 2\pi R^2/(\lambda r_0').$$

Queste quantità assumono i valori massimi per $R = D$, dove D è il diametro del foro. In pratica questi termini possono essere trascurati se sono in-

feriori a $\pi/2$. Infatti, la grandezza caratteristica di una fase è $\pi/2$ poiché una tale variazione degli angoli implica variazioni notevoli dei seni e dei coseni. Tutti i termini che compaiono nell'espressione della fase e che sono notevolmente più piccoli di $\pi/2$ possono essere trascurati senza arrecare un danno particolare alla precisione. Per le variazioni massime dovute ai termini quadratici sostituiamo (un po' convenzionalmente) la condizione « molto più piccoli » con la condizione « più piccoli ». Si ottiene allora

$$r_0 > \frac{4D^2}{\lambda}, \quad r_0' > \frac{4D^2}{\lambda}. \tag{41.3}$$

Proprio queste condizioni definiscono il dominio della diffrazione alla Fraunhofer. Per esempio, se $D = 1$ mm, $\lambda = 500$ nm, la diffrazione comincia a manifestarsi per $r_0, r_0' > 4D^2/\lambda = 8$ m.

È facile scrivere le condizioni nelle quali lo sviluppo di $\Phi(\boldsymbol{R})$ può essere arrestato a termini di secondo grado

$$r_0 > \sqrt{4D^3/\lambda}, \quad r_0' > \sqrt{4D^3/\lambda}. \tag{41.4}$$

Nell'esempio riportato queste condizioni sono verificate per $r_0, r_0' > 9$ cm. Tuttavia l'approssimazione (41.2) è utilizzata persino quando non sono verificate le condizioni (41.4). Questo consente di eseguire i calcoli dell'integrale (41.1) in regioni d'integrazione poco importanti dove non è necessario conoscere esattamente la fase Φ. Un esempio di questo genere sarà riportato nel seguente paragrafo dove si studia la diffrazione sul bordo rettilineo di uno schermo.

Ora diventa qualitativamente chiaro come si comporta un fascio luminoso che ha attraversato un diaframma, a differenti distanze da questo diaframma. Per fissare le idee poniamo che il diaframma sia illuminato da un fascio di raggi paralleli. A piccole distanze $r \ll D^2/\lambda$ quindi è approssimativamente valida l'ottica geometrica (propagazione rettilinea della luce). Poi, con il crescere della distanza r, si osservano complicate figure di diffrazione alla Fresnel. A grandi distanze $r \gg D^2/\lambda$, la figura di diffrazione è semplificata e si trasforma nella diffrazione alla Fraunhofer.

4. L'ipotesi di Fresnel fu il punto di partenza per l'utile *teorema di Babinet* (1794-1872) relativo alle proprietà dei cosiddetti *schermi complementari*. Prendiamo uno schermo piano illuminato da una sorgente di luce. Siano E_{entr} il campo d'onda incidente in un punto (x, y) scelto in modo che si venga a trovare sulla faccia anteriore dello schermo quando questo verrà usato, ed E_{usc} il campo nel punto corrispondente al precedente sulla faccia posteriore dello schermo (lo schermo è supposto sottile, lo spessore non ha alcuna importanza). Supponiamo che questi campi siano legati mediante la relazione $E_{\text{usc}} = \alpha_1 E_{\text{entr}}$. Il coefficiente α_1 si dice *permeabilità dello schermo*. Questo coefficiente può dipendere dalle coordinate x, y, dalla struttura dello schermo, dalla lunghezza d'onda, ma non dipende dall'intensità di campo. Per un altro schermo della stessa forma geometrica $E_{\text{usc}} = \alpha_2 E_{\text{entr}}$.

Questi due schermi si chiamano *complementari* se $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. A titolo d'esempio si possono citare due schermi opachi forati in modo tale che i fori di uno schermo coincidano con le parti opache dell'altro. Conformemente alla (41.1), i campi d'onda nel punto d'osservazione, quando sono utilizzati schermi complementari, possono essere scritti nella forma

$$E_P^{(1)} = \int \frac{\alpha_1}{rr'} E_{\text{entr}} e^{i\Phi} \, dF, \quad E_P^{(2)} = \int \frac{\alpha_2}{rr'} E_{\text{entr}} e^{i\Phi} \, dF,$$

in cui l'integrazione è estesa a tutta la superficie dello schermo. (Per concretizzare la situazione si pone che la sorgente di luce sia puntiforme, il che non ha nessun'importanza). Addizionando queste due espressioni e tenendo conto del fatto che $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, otteniamo

$$E_P^{(1)} + E_P^{(2)} = \int \frac{1}{rr'} E_{\text{entr}} e^{i\Phi} \, dF.$$

Ma l'ultimo integrale è il campo E_P nel punto P che si avrebbe nel caso di propagazione libera di un'onda. Si ha quindi

$$E_P^{(1)} + E_P^{(2)} = E_P. \tag{41.5}$$

Questa formula è la più generale espressione del teorema di Babinet.

Di solito il teorema di Babinet viene utilizzato nei casi di diffrazione alla Fraunhofer. Supponiamo che la figura di diffrazione alla Fraunhofer venga osservata nel piano focale di una lente. Se sul tragitto dei raggi paralleli non vi fossero ostacoli, il campo luminoso in questo piano sarebbe dappertutto nullo, eccetto che nel fuoco della lente. Dunque, secondo la (41.5), deve essere $E_P^{(1)} + E_P^{(2)} = 0$. Visto che l'intensità luminosa I è proporzionale a $|E_P|^2$, otteniamo

$$I_1 = I_2. \tag{41.6}$$

Di conseguenza, dato che si riesce a determinare soltanto l'intensità del campo luminoso e non la sua fase, *le figure di diffrazione di Fraunhofer prodotte da schermi complementari sono identiche in tutti i punti del piano focale di una lente, ad eccezione del fuoco stesso.*

Problema

Un'onda luminosa piana cade su uno schermo nero. A causa della diffrazione, dietro lo schermo insieme con l'onda non deviata appaiono onde di tutte le direzioni possibili (luce diffusa). Dimostrare che la quantità d'energia diffusa è uguale alla quantità d'energia assorbita dallo schermo.

Soluzione. Sostituiamo lo schermo dato con il suo complementare, cioè con un foro della stessa forma e della stessa dimensione dello schermo dato. Secondo il teorema di Babinet l'in-

tensità di campo non sarà modificata all'infinito, quale che sia la direzione considerata, ad eccezione della direzione dell'onda primaria. Ma dietro al foro per qualsiasi direzione definita, l'intensità luminosa è nulla, poiché il foro diffonde tutta la luce incidente. D'altra parte, per ipotesi lo schermo assorbe tutta la luce incidente. Di qui si ottiene direttamente la risposta richiesta. È evidente che il risultato ottenuto è valido soltanto nei casi in cui le dimensioni dello schermo sono molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda.

§ 42. *Zone di Schuster e spirale di Cornu*

1. Nei problemi unidimensionali, per esempio quando si studia la diffrazione da una fenditura rettangolare, la divisione del fronte d'onda in zone anulari è inadeguata. È meglio dividere il fronte d'onda in *zone rettilinee* dette *zone di Schuster* (1851-1934). Ci limitiamo al caso in cui il fronte d'onda è piano, benché la generalizzazione ad un fronte d'onda sferico non presenti alcuna difficoltà. Supponiamo che il piano *AB* del fronte d'onda sia perpendicolare al piano della figura 165. Indichiamo con b la lunghezza della perpendicolare *PO* abbassata dal punto d'osservazione al fronte
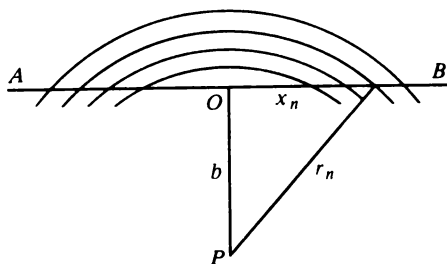
Fig. 165

d'onda. Tracciamo superfici coassiali cilindriche il cui asse passi per il punto P perpendicolarmente al piano della figura, ed i cui raggi siano uguali a $b, b + \lambda/2, b + 2(\lambda/2), \ldots$ Allora il fronte d'onda si trova diviso in strisce rettangolari dette zone di Schuster. Conveniamo di contare la zona centrale per due zone: l'una a destra dal punto O e l'altra a sinistra. Si ha allora $r_n^2 = b^2 + x_n^2, r_{n-1}^2 = b^2 + x_{n-1}^2$, e perciò $r_n^2 - r_{n-1}^2 = x_n^2 - x_{n-1}^2$. In modo approssimato

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = (r_n + r_{n-1})(r_n - r_{n-1}) = 2b(\lambda/2) = b\lambda.$$

Si ottiene dunque la relazione di ricorrenza

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = b\lambda, \tag{42.1}$$

dalla quale si possono trovare tutti i valori di x_n. Dato che $x_0 = 0$, si ha

$$x_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad x_2 = \sqrt{2b\lambda}, \quad \ldots, \quad x_n = \sqrt{nb\lambda}. \tag{42.2}$$

Le larghezze delle zone di Schuster successive sono

$$\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{2} - 1)\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{b\lambda}, \ldots \tag{42.3}$$

La larghezza delle zone decresce monotonamente ed al limite, per $r \to \infty$, tende a $\lambda/2$, come è evidente dalla loro costruzione. (Del resto, le zone di ordine superiore non giocano nessun ruolo, sono importanti soltanto le zone di Schuster entro le prime decine.)

Come nel caso delle zone di Fresnel, applichiamo ora il metodo grafico (fig. 153). Dividiamo ogni zona di Schuster in strisce strette e rappresentiamo su un diagramma vettoriale la vibrazione nel punto P prodotta da ogni singola striscia con dei vettori. Passiamo poi al limite, facendo tendere a zero la larghezza di ogni striscia. Si ottiene così una curva piana detta *spirale di Cornu* (1841-1902) (fig. 166). Questa spirale consiste di due rami simmetrici che si avvolgono un numero infinito di volte attorno ai « fuochi » F e F' e che s'avvicinano a questi fuochi indefinitamente. Il ramo superiore
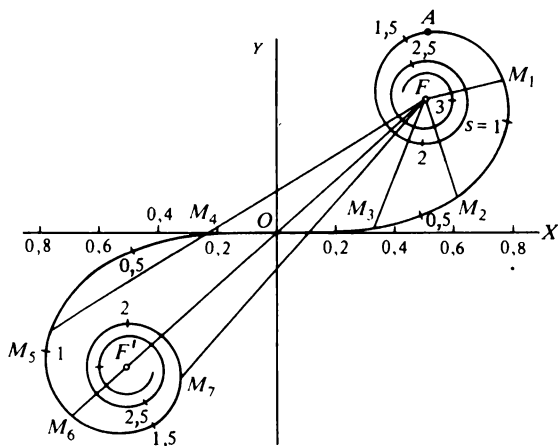
Fig. 166

rappresenta l'azione della metà destra del fronte d'onda e quello inferiore l'azione dell'altra metà. La differenza di ciascuno di questi rami dalla corrispondente spirale riportata nella figura 153 è dovuta al più rapido decrescere delle zone di Schuster iniziali di quelle di Fresnel. La vibrazione eccitata dalla prima zona di Schuster di destra è rappresentata dal vettore $\overrightarrow{OA}$, quella dovuta alla seconda zona di destra è rappresentata dal vettore $\overrightarrow{A2}$, mentre la vibrazione prodotta dall'insieme di queste due prime zone è rap-

presentata dal vettore $\overrightarrow{O2}$, ecc. (questi vettori non sono rappresentati nella figura 166). La vibrazione eccitata da tutto il fronte d'onda è rappresentata dal vettore $\overrightarrow{F'F}$ che unisce i fuochi della spirale di Cornu. Quando ci si avvicina ai fuochi, le ampiezze delle vibrazioni diventano sempre più piccole ed al limite s'annullano.

2. Per poter stabilire l'equazione della spirale di Cornu si deve tener presente che in realtà si ha sempre a che fare non con fronti d'onda infiniti ma con fronti limitati, ed inoltre un'intensità notevole si osserva soltanto se l'angolo di diffrazione è piccolo. Pertanto si possono trascurare nella formula (41.1) le variazioni dei denominatori r e r' (nonché dei fattori $K(\alpha)$ che abbiamo già trascurato). Se ci interessa soltanto la ripartizione delle intensità luminose, si può porre $rr' = 1$. Nel piano del fronte d'onda la fase può essere rappresentata nella forma $\Phi = \omega t - kr$ (qui è stata fatta una trasformazione: nella formula (41.1) la distanza r era indicata con r').

Prendiamo il fronte d'onda come piano coordinato XY, e poniamo l'origine delle coordinate nel punto O. Si ha allora $r^2 = b^2 + (x^2 + y^2)$ e di conseguenza $r - b = (x^2 + y^2)/(2b) + \ldots$ Si possono trascurare i termini delle potenze superiori, persino se essi contribuiscono alla fase con una quantità uguale o superiore a π. Infatti questi termini, come è chiaro dalla forma della spirale di Cornu, non modificando il carattere generale della figura di diffrazione, producono in quest'ultima soltanto spostamenti praticamente inosservabili dei massimi e dei minimi di diffrazione di ordine superiore. Inoltre, i massimi ed i minimi di diffrazione di ordine superiore sono tanto vicini che per produrli sono necessarie sorgenti puntiformi altamente monocromatiche. Se la luce non è ben monocromatica tutte le frange di diffrazione di ordine superiore si confondono e producono uno sfondo uniformemente illuminato. Trascuriamo tutti i fattori di fase che non influiscono sulla ripartizione relativa delle intensità luminose. Allora il campo nel punto P è rappresentato dall'integrale

$$E_P = \int\int e^{-ik(x^2+y^2)/(2b)}\,dx\,dy.$$

L'integrazione deve essere estesa a tutta la superficie scoperta del fronte d'onda. Supponiamo che nella direzione dell'asse Y questa superficie si estenda sufficientemente lontano nei due sensi. Allora l'integrazione su y può essere eseguita tra $-\infty$ e $+\infty$, in conseguenza di ciò apparirà un fattore costante che non è di nessun interesse. L'integrazione su x sarà effettuata tra 0 ed un limite superiore variabile (questo limite può essere sia positivo sia negativo). Sostituiamo x, come è l'uso, introducendo una nuova variabile s secondo la formula $kx^2/b = \pi s^2$. Si ha allora

$$E_P = \int_0^s e^{-i\pi s^2/2}\,ds, \tag{42.4}$$

$$E_P^* = \int_0^s e^{i\pi s^2/2}\,ds. \tag{42.5}$$

Per rappresentare le vibrazioni si può utilizzare sia l'espressione (42.4), sia la sua complessa coniugata (42.5). Per la costruzione della spirale di Cornu di solito si utilizza l'espressione (42.5), la quale rappresenta l'equazione della spirale di Cornu in forma complessa. Se gli assi coordinati sono definiti come nella figura 166, in coordinate rettangolari l'equazione della spirale di Cornu diventa

$$X(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds, \quad Y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds. \tag{42.6}$$

Gli integrali che figurano in quest'ultima espressione si dicono *integrali di Fresnel*. È evidente che

$$X(s) = -X(-s), \quad Y(s) = -Y(-s),$$

cioè la curva (42.6) è simmetrica rispetto all'origine delle coordinate.

Ponendo $s = \infty$, troviamo le coordinate dei fuochi della spirale di Cornu

$$X_F = Y_F = 1/2, \quad X_{F'} = Y_{F'} = -1/2.$$

In molti casi è più semplice utilizzare direttamente la forma complessa (42.5). In particolare, il differenziale dell'arco della spirale di Cornu calcolato a partire dalle (42.5) è: $|e^{i\pi s^2/2}\, ds| = |ds|$. Ne segue che il parametro s è la lunghezza dell'arco della spirale misurata dall'origine delle coordinate O.

Se τ è l'angolo tra la tangente alla spirale di Cornu e l'asse X, si ha $\operatorname{tg}\tau = dY/dX = \operatorname{tg}(\pi s^2/2)$, e quindi

$$\tau = \pi s^2/2. \tag{42.7}$$

Per $s = 0$ l'angolo $\tau = 0$, il che significa che all'origine delle coordinate la curva è tangente all'asse X. Per $s = 1$ la tangente è una verticale ascendente. Per $s = \sqrt{2}$, $\tau = \pi$ la tangente è di nuovo orizzontale ma orientata nel senso negativo dell'asse X. Per $s = \sqrt{3}$, $\tau = 3/2\pi$ la tangente è una verticale discendente. Per $s \doteq 2$, $\tau = 2\pi$ la tangente riprende la sua posizione orizzontale iniziale. La formula (42.7) permette in modo evidente di seguire come la curva s'avvolge attorno ai fuochi F e F' facendo un numero infinito di giri. Questa formula è particolarmente utile perché permette, conoscendo il parametro s, di trovare facilmente il corrispondente punto della spirale di Cornu.

Dalla formula (42.7) otteniamo la formula della curvatura della spirale di Cornu

$$\frac{1}{R} = \frac{d\tau}{ds} = \pi s. \tag{42.8}$$

La lunghezza della spirale di Cornu è infinita e perciò avvicinandosi ai fuochi la sua curvatura tende all'infinito.

3. Quando si vuole utilizzare la spirale di Cornu è necessario conoscere il valore del parametro s. È facile determinarlo conoscendo la distanza x che separa sullo schermo il punto d'osservazione ed il centro O della figura di diffrazione (fig. 165). Avendo calcolato la larghezza $\sqrt{\lambda b}$ della prima zona di Schuster, troviamo $s = x\sqrt{2/(\lambda b)}$.

Esaminiamo a titolo d'esempio la figura di diffrazione prodotta dal bordo rettilineo di uno schermo (fig. 167). Per qualsiasi posizione del punto d'osservazione P, il lato di destra del fronte d'onda è sempre scoperto. Nel diagramma vettoriale (fig. 166) la vibrazione nel punto d'osservazione è rappresentata dal vettore $\overrightarrow{M_n F}$ il cui estremo si trova sempre nel fuoco superiore F, e l'origine M_n si trova sulla spirale di Cornu. Se, mantenendo fissa la posizione del punto finale F, spostiamo il punto M_n lungo la spirale di
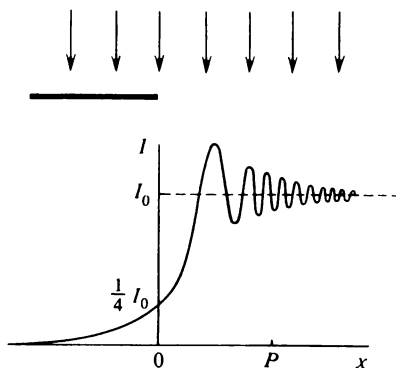
Fig. 167

Cornu (posizioni successive M_1, M_2, M_3, ...), si può determinare la ripartizione delle ampiezze e delle intensità luminose delle vibrazioni su tutto lo schermo.

Indichiamo con $a_0 = |FF'|$ ed $I_0 = a_0^2$ l'ampiezza e l'intensità dell'onda quando è scoperto tutto il fronte d'onda. Quando il punto d'osservazione P si trova sulla frontiera dell'ombra geometrica, la vibrazione è rappresentata dal vettore $\overrightarrow{OF} = 1/2\overrightarrow{F'F}$. Le sue ampiezza ed intensità sono rispettivamente $1/2\ a_0$ e $1/4\ I_0$. Se il punto P si sposta nella regione illuminata dello schermo, il punto rappresentativo M_n si sposta lungo il ramo inferiore della spirale di Cornu, mentre l'ampiezza e l'intensità passano successivamente attraverso massimi e minimi. Come è chiaro dalla figura 166, l'ampiezza massima è uguale a $1{,}12\ a_0$ e l'intensità massima a $1{,}25\ I_0$. I loro valori minimi sono rispettivamente $0{,}89\ a_0$ e $0{,}78\ I_0$. Con il procedere avanti nella regione illuminata l'intensità tende asintoticamente ad I_0. Se il punto P viene spostato nella regione dell'ombra geometrica, il punto rappresenta-

tivo M_n si sposta lungo il ramo superiore della spirale di Cornu, e se il punto P penetra sempre più nell'ombra, l'intensità luminosa decresce monotonamente e tende asintoticamente a zero.

La ripartizione dell'intensità luminosa è graficamente rappresentata nella figura 167. Si constata che non esiste una frontiera netta tra luce e ombra; nella regione dell'ombra geometrica l'intensità luminosa decresce in modo continuo e monotono, mentre la regione illuminata si suddivide in frange di diffrazione. Nella figura 168 è riportata la figura osservata quando la luce è diffratta sul bordo dello schermo. Allo stesso modo si può calcolare la figura di diffrazione su una fenditura o su uno schermo rettilineo molto lungo. La figura 169 rappresenta l'ombra di un fil di ferro illuminato da una sorgente puntiforme (o lineare).
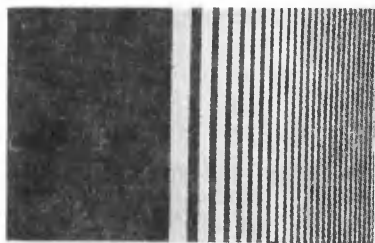
Fig. 168
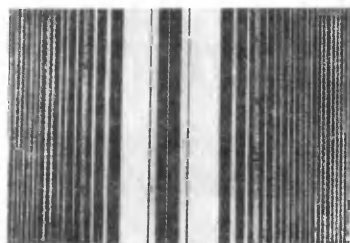
Fig. 169

Problemi

1. Quando un'onda piana è diffratta sul bordo di uno schermo, le posizioni delle frange brillanti e scure si possono approssimativamente determinare (ma con una precisione sufficiente) calcolando i punti d'intersezione del ramo inferiore della spirale di Cornu con la retta $F'F$ che congiunge i suoi fuochi, tenendo conto del fatto che in questi punti la retta FF' è praticamente perpendicolare alla spirale di Cornu. Determinare mediante questo procedimento le coordinate delle frange menzionate.

Risposta.

$$x_n = 1/2\sqrt{\lambda r(8n - 5)} \quad \text{(frange chiare)},$$
$$x_n = 1/2\sqrt{\lambda r(8n - 1)} \quad \text{(frange scure)},$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. Quando una stella passa presso il bordo della Luna, si osservano frange di diffrazione. Calcolare la loro velocità di spostamento v sulla superficie terrestre e stimare l'ordine di grandezza della loro larghezza Δx. Per osservare le frange si può utilizzare un telescopio nel fuoco del quale è messa una fotocellula. Le frange, passando davanti all'obiettivo del telescopio, eccitano correnti alternate che possono essere amplificate e registrate su una banda mobile con l'aiuto di un oscillografo. Stimare la durata t di passaggio delle frange davanti all'obiettivo del telescopio.

Assimilando la stella ad un disco uniformemente illuminato, si può teoricamente calcola-

re la ripartizione dell'illuminamento sulla figura di diffrazione. Confrontandola con la ripartizione dell'illuminamento determinata sperimentalmente, si può stimare il diametro angolare della stella. Questo è stato fatto in realtà nel 1946 da Whitford per quattro stelle, utilizzando per queste osservazioni il riflettore da 100 pollici dell'osservatorio di Mont-Wilson. Stimare le dimensioni angolari delle stelle per le quali è applicabile questo metodo.

Risposta. $v \approx 500$ m/s; $\Delta x \sim \sqrt{b\lambda} \approx 10$ m, dove $b = 3{,}8 \cdot 10^5$ km è la distanza media Terra-Luna. Il metodo è valido quando le dimensioni angolari delle stelle sono comprese nell'intervallo da 10^{-4} a 10^{-3} secondi angolari.

3. Per fotografare le figure di diffrazione nei casi in cui la sorgente di luce e lo schermo si trovano ad una distanza molto grande l'una dall'altro, V.K. Arkadiev (1884-1953) ha applicato il *metodo di similitudine*, nel quale al posto di ostacoli reali interposti sul tragitto dei raggi vengono utilizzati modelli ridotti e simili, ma la lunghezza d'onda resta la stessa.

È necessario ottenere una fotografia delle figure di diffrazione prodotte da un disco di diametro $D = 50$ cm quando sul suo asse è disposta una sorgente di luce ad una distanza $A = 25$ km, mentre lo schermo è ad una distanza $B = 50$ km dal disco (il piano dello schermo è perpendicolare all'asse del disco). Per ottenere la fotografia il disco è stato sostituito con un modello ridotto di diametro $d = 1$ cm. Utilizzando il metodo delle zone di Fresnel, calcolare a quali distanze a e b è necessario mettere la sorgente di luce e lo schermo per ottenere una figura di diffrazione simile ma ridotta di $n = 50$ volte.

Risposta. $a = A/n^2 = 10$ m, $b = B/n^2 = 20$ m.

§ 43. *Principio di Huygens nella formulazione di Kirchhoff*

1. Prima di Kirchhoff il principio di Huygens-Fresnel restava un'ipotesi. Nel 1883 Kirchhoff ha dedotto una formula che può essere considerata come una formulazione precisa di questo principio. Riportiamo qui sotto la deduzione della formula di Kirchhoff, anche se in seguito non l'utilizzeremo. Il lettore può omettere questa deduzione senza arrecare danno alla comprensione dell'ulteriore esposizione.

Supponiamo che il mezzo in cui si propaga la luce sia omogeneo. Caratterizziamo il campo luminoso con una certa grandezza E che può designare sia il vettore $\boldsymbol{E}$ sia il vettore $\boldsymbol{B}$ o anche una delle loro proiezioni sugli assi coordinati. Questa grandezza verifica l'equazione d'onda

$$\Delta E - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0,$$

che per una luce monocromatica diventa

$$\Delta E + k^2 E = 0. \qquad (43.1)$$

Calcoliamo il valore di E in un punto arbitrario P dello spazio (fig. 170). Indichiamo con r la distanza variabile tra P ed un punto qualsiasi A. La quantità

$$\chi = \frac{1}{r} e^{-ikr}, \qquad (43.2)$$

considerata come una funzione del punto A, verifica anch'essa l'equazione

$$\Delta\chi + k^2\chi = 0. \tag{43.3}$$

Circondiamo il punto P con una superficie chiusa arbitraria F tale che nello spazio da essa circondato non esistano sorgenti di luce. La funzione χ diventa infinita nel punto P. Escludiamo questo punto circondandolo con una sfera f di centro P e di raggio R sufficientemente piccolo. Allora in tutto lo spazio tra la sfera f e la superficie F le funzioni E e χ ed anche le loro derivate saranno continue e finite. A queste funzioni può essere applicata
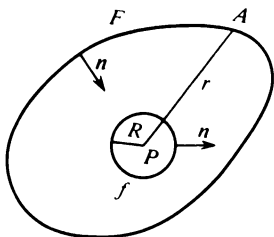
Fig. 170

la formula di Green (1793-1841)

$$\int (E\Delta\chi - \chi\Delta E)\,dV = -\int_{F+f} \left(E\frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi\frac{\partial E}{\partial n}\right)dF, \tag{43.4}$$

dove V è il volume compreso tra le superficie f e F e $\boldsymbol{n}$ è la normale interna rispetto a questo spazio. Visto che in questo spazio non ci sono sorgenti di luce, in esso sono valide le equazioni (43.1) e (43.3). Di conseguenza,

$$E\,\Delta\chi - \chi\,\Delta E = -k^2(E\chi - \chi E) = 0,$$

e quindi

$$\oint_f \left(E\frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi\frac{\partial E}{\partial n}\right)df = -\oint_F \left(E\frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi\frac{\partial E}{\partial n}\right)dF.$$

Passiamo al limite facendo tendere il raggio della sfera f a zero. Il secondo membro dell'uguaglianza non varierà in questo caso; quanto al primo membro, prendendo il raggio R tanto piccolo che $kR \ll 1$, si può sostituire il fattore esponenziale e^{-ikR} con l'unità, il che dà

$$\oint_f \left[E\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial E}{\partial R}\right]df.$$

Visto che E e $\frac{\partial E}{\partial R}$ sono finite nelle vicinanze del punto P, l'integrale del secondo termine è dell'ordine di $-4\pi R \frac{\partial E}{\partial R}$, cioè diventa nullo per $R \to 0$. L'integrale del primo termine diventerà al limite $-4\pi E_P$. Si ottiene infine

$$E_P = \frac{1}{4\pi} \oint_F \left[E \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n}\right] dF, \tag{43.5}$$

dove E_P è il valore della funzione E nel punto P.

2. La formula (43.5) ricorda per la sua forma il principio di Huygens-Fresnel. In entrambi i casi il campo nel punto P è espresso da un integrale esteso ad una superficie chiusa F. Ma in Fresnel le sorgenti di luce si trovano *all'interno* della superficie chiusa F ed il punto P si trova *fuori* di questa
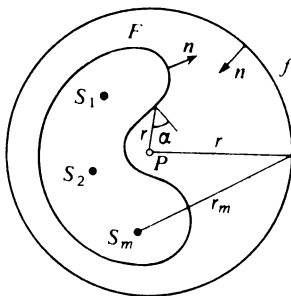
Fig. 171

superficie. La formula (43.5), invece, suppone che il punto P si trovi *all'interno* della superficie F e le sorgenti di luce *fuori* di questa superficie. È facile però trasformare la formula (43.5) in modo che la differenza menzionata sparisca. A questo scopo supponiamo che tutte le sorgenti di luce S_1, S_2, S_3, ... si trovino in una regione finita dello spazio. Circondiamo questa regione con una superficie chiusa F (fig. 171). Supponiamo inoltre che il punto P si trovi nello spazio esterno alla superficie F. Scegliamo P come centro di una sfera f di raggio tanto grande da circondare completamente la superficie F. Allora nello spazio tra f e F non ci sono sorgenti di luce e quindi per calcolare E nel punto P si può applicare la formula (43.5)

$$E_P = \frac{1}{4\pi} \int_{F+f} \left(E \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial E}{\partial n}\right) dF.$$

Dimostriamo che l'integrale sulla sfera f tende a zero quando il suo raggio tende all'infinito. Per farlo è necessario accertarsi del comportamento della funzione E all'infinito. Supponiamo che nello spazio limitato da F si trovi-

no una o più sorgenti di luce puntiformi: S_1, S_2, S_3, ... Allora il campo di queste sorgenti sarà della forma

$$E = \sum C_m \frac{e^{-ikr_m}}{r_m},$$

dove C_m sono coefficienti costanti. Se r tende all'infinito, anche r_m tende all'infinito, ma la differenza $r_m - r$ resta finita. Rappresentiamo E nella forma

$$E = \sum C_m \frac{e^{-ik(r+a_m)}}{r + a_m} = \frac{e^{-ikr}}{r} \sum \frac{A_m}{1 + a_m/r},$$

dove A_m sono nuove costanti. Sviluppando in serie secondo le potenze di $1/r$ l'espressione che figura sotto il segno di somma, otteniamo

$$E = \frac{e^{-ikr}}{r}\left\{\sum A_m - \frac{1}{r}\sum A_m a_m + \frac{1}{r^2}(...) + ...\right\},$$

ossia

$$E = \frac{e^{-ikr}}{r}(C + \Phi) = (C + \Phi)\chi,$$

dove C è una costante e Φ tende a zero almeno come $1/r$. Sostituendo questo valore di E nell'integrale sulla sfera f, otteniamo

$$\oint_f \left(E\frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi\frac{\partial E}{\partial n}\right) df = -\oint_f \chi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} df.$$

L'espressione integranda tende a zero almeno come $1/r^3$, mentre la superficie della sfera tende all'infinito come r^2. Quindi per $r \to \infty$ tutto l'integrale tende a zero. Di conseguenza, se la sfera f viene spostata all'infinito, si ottiene

$$E_P = \frac{1}{4\pi}\oint_F \left[E\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial E}{\partial n}\right] dF. \tag{43.6}$$

Questi ragionamenti conducono a un risultato importante. Se una certa regione della superficie F viene allontanata all'infinito, la parte dell'integrale (43.6) appartenente a questa regione tende a zero. Si suppone ancora che tutte le sorgenti di luce si trovino in una *regione finita dello spazio*.

3. Sono proprio le formule (43.5) è (43.6) che esprimono il *principio di Huygens nella formulazione di Kirchhoff*. In entrambe le formule $\boldsymbol{n}$ indica la normale interna rispetto allo spazio nel quale si trova il punto d'osservazione P.

Dopo aver derivato rispetto a $\boldsymbol{n}$ e tenendo presente che $\partial r/\partial n =$

$= -\cos\alpha$, dove α è l'angolo tra la normale n e la direzione della retta che unisce l'elemento di superficie dF con il punto P, otteniamo

$$E_P = \oint K(\alpha, r) \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \tag{43.7}$$

Qui è stata introdotta la notazione

$$K(\alpha, r) = \frac{1}{4\pi} \left[\left(ik + \frac{1}{r} \right) E \cos\alpha - \frac{\partial E}{\partial n} \right]. \tag{43.8}$$

In tal modo è stata stabilita una relazione tra la formula di Kirchhoff ed il principio di Huygens: l'espressione integranda della formula (43.8) può essere considerata come un'*onda secondaria* che si propaga dall'elemento di superficie dF al punto P. Il fattore K dipende però *non soltanto* dall'angolo α, come supponeva Fresnel, ma anche *dalla distanza r.* Se così non fosse, l'onda secondaria non potrebbe soddisfare l'equazione d'onda. Quindi le onde secondarie non possiedono simmetria sferica: queste onde sono sferiche soltanto nel senso che i loro fronti d'onda hanno la forma di sfere, mentre le ampiezze dipendono dalla direzione di propagazione e variano con la distanza secondo una legge diversa da $1/r$. Solo nella « zona d'onda », quando la distanza del punto P dal centro d'emissione dF è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda, si può trascurare $1/r$ nell'espressione (43.8) rispetto a ik. Si ha allora

$$E_P = \frac{1}{4\pi} \oint \left(ikE \cos\alpha - \frac{\partial E}{\partial n} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \tag{43.9}$$

Grazie alla piccolezza delle lunghezze d'onda delle onde luminose si può utilizzare quest'espressione semplificata del principio di Huygens per la risoluzione di tutti i problemi concreti.

4. Per farsi un'idea più concreta delle onde secondarie, consideriamo la propagazione libera di un'onda sferica emessa da una sorgente puntiforme. Prendiamo come superficie F una sfera di raggio r_0 con centro nella sorgente puntiforme O (fig. 172). Rappresentiamo il campo sulla superficie F con
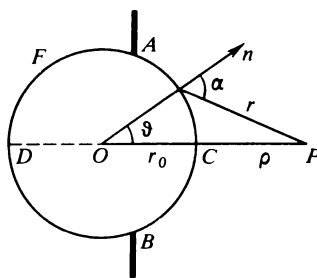
Fig. 172

l'espressione

$$E_0 = \frac{e^{i(\omega t - kr_0)}}{r_0}.$$

Supponendo che il raggio r_0 sia molto grande rispetto alla lunghezza d'onda, troviamo $\partial E/\partial n = \partial E_0/\partial r_0 = -ikE_0$. Sostituendo questo valore nella formula (43.9), otteniamo

$$E_P = \frac{ik}{4\pi}\oint(1 + \cos\alpha)E_0 \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \tag{43.10}$$

Il confronto di questa formula con la (43.7) dà

$$K(\alpha) = \frac{ik}{4\pi}(1 + \cos\alpha). \tag{43.11}$$

Questo è il « fattore d'attenuazione » $K(\alpha)$ introdotto ad hoc nel § 39. Dalla teoria si ottiene che questo fattore è puramente immaginario e con il crescere di α decresce monotonamente in valore assoluto. Esso s'annulla per $\alpha = \pi$, cioè nel punto D della sfera, punto diametralmente opposto al punto d'osservazione P.

Ora si può calcolare l'integrale (43.10), poiché esso non contiene alcuna funzione incognita. Facciamo questi calcoli, perché in tal modo si può ottenere una giustificazione rigorosa del metodo delle zone di Fresnel e dei risultati ottenuti per mezzo di questo metodo. Prendendo r come variabile d'integrazione ed utilizzando il valore di E_0, trasformiamo l'integrale (43.10) nella forma

$$E_P = \int_{r_1}^{r_2} A(r)e^{-ikr}\,dr, \tag{43.12}$$

dove viene introdotta la notazione

$$A(r) = \frac{ik(1 + \cos\alpha)}{2(\rho + r_0)}\, e^{i(\omega t - kr_0)}, \tag{43.13}$$

e con r_1 e r_2 sono indicati i valori massimo e minimo che assume r. Integrando la (43.12) per parti, otteniamo

$$E_P = -\frac{A(r)e^{-ikr}}{ik}\bigg|_{r_1}^{r_2} + \frac{1}{ik}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{dr}\, e^{-ikr}\,dr. \tag{43.14}$$

Qui la sola grandezza dipendente da r è $\cos\alpha$. Calcoliamo la sua derivata. Dalla figura 172 $(\rho + r_0)^2 = r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos\alpha$, da cui $\frac{d\cos\alpha}{dr} = -\left(\frac{1}{r_0} + \frac{\cos\alpha}{r}\right)$. Prendendo la derivata logaritmica rispetto a r ed uti-

lizzando la formula precedente, troviamo

$$\frac{1}{ik}\frac{dA}{dr}=\frac{i}{1+\cos\alpha}\left(\frac{1}{kr_0}+\frac{\cos\alpha}{kr}\right)A(r).$$

Questa quantità, e di conseguenza l'integrale della formula (43.14) può essere trascurata, come è stato già fatto nella deduzione della formula di partenza (43.9). Quindi, nella formula (43.14) resta soltanto il primo termine, cioè

$$E_P=\frac{A(r_1)e^{-ikr_1}-A(r_2)e^{-ikr_2}}{ik}. \tag{43.15}$$

È essenziale che il valore di E_P sia rappresentato dalla differenza dei valori di una stessa funzione per differenti valori della variabile indipendente r, ed inoltre se r varia di $\lambda/2$ la funzione cambia di segno. Questo è sufficiente per giustificare il risultato fondamentale (39.6) sul quale è basato il metodo delle zone di Fresnel. Infatti, applicando la formula (43.15) alla prima zona di Fresnel, troviamo che l'azione di questa zona può essere presentata nella forma $E_1=(u_1+u_2)$, quella della seconda nella forma $E_2=-(u_2+u_3)$, ecc. La forma esplicita delle quantità u_i non è importante per la dimostrazione. L'azione delle prime N zone sarà rappresentata dalla somma

$$E=(u_1+u_2)-(u_2+u_3)+\ldots+(-1)^{N+1}(u_N+u_{N+1}),$$

cioè

$$E=u_1+(-1)^{N+1}u_{N+1}.$$

Visto che per la loro grandezza le azioni di due zone vicine sono quasi identiche, si ha $u_{N+1}=u_N$. Con la stessa approssimazione $1/2E_1=u_1$, $1/2E_N=(-1)^{N+1}u_N=(-1)^{N+1}u_{N+1}$. Di conseguenza,

$$E=\frac{1}{2}(E_1+E_N).$$

§ 44. *Diffrazione di Fraunhofer da una fenditura*

1. I fenomeni di diffrazione alla Fraunhofer hanno in ottica una importanza pratica molto più grande di quelli alla Fresnel. Per realizzare una diffrazione di Fraunhofer la sorgente di luce S è disposta nel fuoco di una lente (fig. 173). (La lente L_1 diventa inutile se la sorgente di luce è un laser, poiché quest'ultimo emette un fascio di luce parallelo.) La diffrazione viene prodotta da un ostacolo AB interposto sul cammino dei raggi luminosi che hanno attraversato la lente L_1. La figura di diffrazione è osservata nel piano focale di un'altra lente L_2. Le figure di diffrazione si possono anche osservare in un cannocchiale puntato all'infinito. Ma nei ragionamenti teo-

rici è più comodo sopprimere tutti questi dispositivi ausiliari, supponendo che sull'ostacolo AB cada un fascio di raggi paralleli e che la diffrazione si osservi « all'infinito ».

Il calcolo più semplice, e molto importante nella pratica, è la diffrazione di Fraunhofer da una fenditura rettangolare lunga. Indichiamo con b la larghezza della fenditura che supponiamo di lunghezza infinita. Supponiamo che sulla fenditura cada normalmente un'onda monocromatica piana (fig. 174). Il campo luminoso dietro la fenditura può essere determinato applicando il principio di Huygens e risulta dall'interferenza delle onde secondarie coerenti emesse da diversi punti del fronte d'onda sulla fenditura.
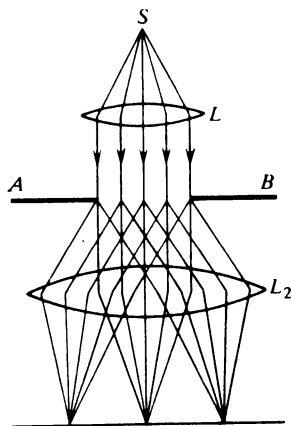
Fig. 173
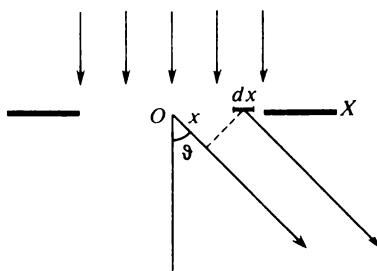
Fig. 174

Le onde secondarie emesse da una banda di larghezza dx del fronte d'onda, parallela alla fenditura, si sommano e producono un'onda cilindrica avente per asse questa banda. La dipendenza di quest'onda dalla sua direzione di propagazione determinata dall'angolo ϑ può essere trascurata, poiché il problema è risolto mediante il metodo di Fresnel, nel quale si suppone che l'angolo di diffrazione ϑ sia piccolo. Ma è necessario tener conto delle differenze di fase delle vibrazioni emesse da bande differenti. S'intende che si tratta delle fasi delle vibrazioni a distanza infinita dalla fenditura. Un'onda inviata da dx con un angolo ϑ presenta un anticipo di fase di $kx \sin \vartheta$ rispetto all'onda di uguale direzione emessa dal centro O della fenditura. Perciò il campo risultante all'infinito prodotto da tutta la fenditura è rappresentato dall'integrale

$$E = \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ikx \sin \vartheta} dx.$$

Qui sono stati trascurati tutti i fattori che non influenzano la ripartizione relativa del campo d'onda secondo le direzioni. Dopo aver calcolato l'integrale, otteniamo

$$E = b\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \tag{44.1}$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$\alpha = \frac{kb\sin\vartheta}{2} = \frac{\pi b\sin\vartheta}{\lambda}. \tag{44.2}$$

La ripartizione dell'intensità luminosa secondo le direzioni è data da

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \tag{44.3}$$

dove I_0 è l'intensità nella direzione dell'onda incidente. La figura 175 rappresenta i grafici delle funzioni $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ (curva tratteggiata) e $\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ (curva continua). Entrambe le funzioni hanno come valore massimo l'unità per $\alpha = 0$, mentre per $\alpha = m\pi$, dove $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, esse sono nulle, cioè in questi punti si osservano i minimi d'intensità. Tra due minimi vicini
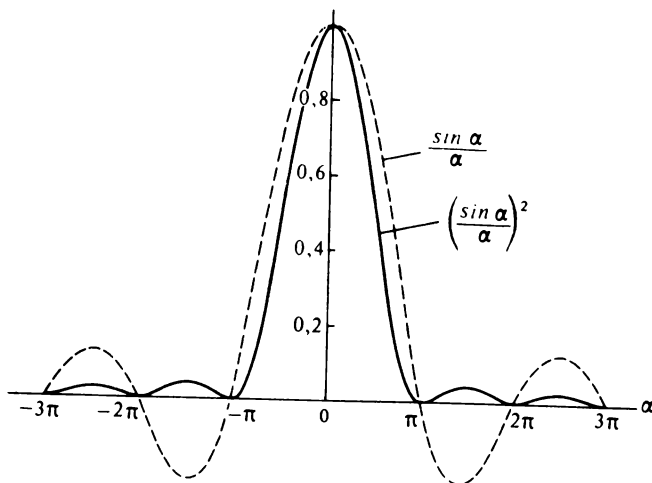
Fig. 175

si trovano massimi di differenti ordini. Le loro posizioni sono determinate dall'equazione trascendente $\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = 0$. Praticamente si può porre che i massimi siano al centro tra due minimi vicini.

2. La condizione di minimo $\alpha = m\pi$ può anche essere scritta nella forma

$$b \sin \vartheta = m\lambda. \qquad (44.4)$$

Questa condizione significa che la differenza di cammino tra le onde emesse da punti estremi della fenditura deve contenere un numero intero di lunghezze d'onda. Questo risultato può essere facilmente interpretato senza fare calcoli. Supponiamo dapprima che $b \sin \vartheta = \lambda$. Dividiamo la fenditura in due parti di uguale larghezza. Allora le onde prodotte da queste parti arrivano nel punto d'osservazione (a grande distanza) con fasi opposte e si distruggono mutuamente per interferenza, producendo un minimo d'intensità luminosa. Se $b \sin \vartheta = m\lambda$, si deve dividere la fenditura in $2m$ parti uguali. Le onde emesse dalle parti di ordine dispari arrivano con fasi opposte a quelle delle onde inviate dalle parti di ordine pari. Ma, visto che le parti della fenditura equidistanti dai suoi bordi sono per ragione di simmetria assolutamente equivalenti, è evidente che l'effetto dovuto alle parti dispari sarà distrutto dall'effetto dovuto a quelle pari.

Quest'interpretazione della formula (44.4) non solo è più semplice della precedente ma, il che è particolarmente importante, è anche più generale. Infatti, nella dimostrazione precedente la fenditura doveva essere supposta larga ($b \gg \lambda$), affinché si potesse applicare il metodo approssimato di Fresnel. Invece, quest'ultima dimostrazione utilizza soltanto le proprietà di simmetria della fenditura ed è applicabile a tutti gli angoli di diffrazione ϑ, a condizione che $b > \lambda$. Se questa condizione non è verificata dalla (44.4) otteniamo $\sin \vartheta > 1$ e tutti i minimi di diffrazione ad intensità nulla sarebbero impossibili.

3. Quando l'onda incidente è piana, tutti i raggi diffratti sono perpendicolari all'asse della fenditura. Se sul loro cammino è interposta una lente, ogni fascio di raggi paralleli diffratto viene focalizzato e produce una piccola macchia. Queste piccole macchie, che sono i massimi ed i minimi d'intensità luminosa, si distribuiscono su una retta perpendicolare all'asse della fenditura e contenuta nel piano focale della lente. Proprio in questo piano si deve porre lo schermo per osservare la diffrazione.

Se come sorgente di luce si prende una linea luminosa o la fenditura stretta illuminata di un collimatore, parallela alla fenditura sulla quale ha luogo la diffrazione, ogni punto della sorgente produrrà sullo schermo la figura di diffrazione descritta sopra. In conseguenza della sovrapposizione di queste figure di diffrazione ogni macchia di diffrazione si trasformerà in una frangia e si formerà il sistema di frange di diffrazione riportato nella figura 176. La frangia centrale è brillante e grosso modo due volte più larga di tutte le altre frange chiare e scure. Il massimo ordine di un minimo osservabile è dato dalla condizione $\sin \vartheta < 1$, cioè $m < b/\lambda$, conformemente alla formula (44.4). Più larga è la fenditura, più strette e luminose sono le frange di diffrazione e più grande è il numero di frange stesse. Quando la

fenditura è resa più stretta, la figura di diffrazione s'allarga e la sua luminosità diminuisce. Per $b = \lambda$ i minimi del primo ordine corrispondono a $\vartheta = \pi/2$ e spariscono con l'ulteriore diminuzione della larghezza della fenditura.

4. Se la luce cade sulla fenditura formando un angolo ϑ_0 (fig. 177) la differenza di cammino tra i raggi marginali interferenti AB e CD è uguale a $b(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)$. Pertanto la condizione di minimo di diffrazione (44.4)

Fig. 176

diventa

$$b(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda. \tag{44.5}$$

Se gli angoli ϑ e ϑ_0 sono piccoli, $b(\vartheta - \vartheta_0) \approx m\lambda$. La maggior parte della luce è concentrata nella frangia di diffrazione centrale, cioè tra i minimi di ordini $+1$ e -1. Questo fatto può essere usato per stimare la divergenza di fasci luminosi formati con un procedimento qualsiasi, per esempio facendo passare un'onda piana attraverso un diaframma. I raggi luminosi
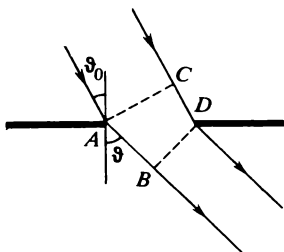
Fig. 177

che hanno attraversato il diaframma sono deviati rispetto alla loro direzione iniziale di un angolo

$$\delta\vartheta \sim \lambda/D, \tag{44.6}$$

dove D è la sezione trasversale del fascio (secondo la direzione nella quale la sezione è minima). Quest'allargamento del fascio dovuto alla diffrazione dipende dalla natura ondulatoria della luce e non può essere eliminato qua-

le che sia la larghezza del fascio. Per questa ragione non esistono fasci rigorosamente paralleli. Un fascio cilindrico è un'idealizzazione che suppone che la sezione trasversale del fascio sia infinitamente grande. Se un fascio percorre un cammino l, su questo cammino esso subisce un allargamento di diffrazione $\sim l\delta\vartheta = l\lambda/D$. Quest'allargamento può essere trascurato solo se esso è piccolo rispetto alla larghezza del fascio stesso, cioè se $l\lambda/D \ll D$ o se $l \ll D^2/\lambda$. Soltanto a queste distanze il fascio può essere assimilato ad un raggio dell'ottica geometrica (si veda il § 41, punto 3).

5. Supponiamo che la sorgente di luce sia un punto luminoso infinitamente lontano o una linea parallela alla lunghezza della fenditura. L'angolo ϑ corrispondente al minimo di diffrazione di ordine m è definito dalla (44.5). Il massimo più vicino a questo minimo è spostato di un angolo $\delta\vartheta$ tale che

$$b[\sin(\vartheta + \delta\vartheta) - \sin\vartheta_0] = m\lambda + \frac{\lambda}{2}.$$

Sottraendo da quest'espressione la (44.5) e sostituendo le differenze con i differenziali, otteniamo $b\cos\vartheta\cdot\delta\vartheta = \lambda/2$. Prendiamo un'altra sorgente identica (non coerente), ma spostata rispetto alla prima di un angolo $\delta\vartheta$. Allora i massimi di diffrazione di una di queste sorgenti si sovrappongono ai minimi dell'altra. Questa sovrapposizione provoca la scomparsa delle frange di diffrazione. La distanza angolare $\delta\vartheta$ tra le sorgenti puntiformi (o lineari) quando questo ha luogo è data dalla formula

$$\delta\vartheta = \lambda/2b \tag{44.7}$$

(a condizione che l'angolo ϑ sia piccolo).

Supponiamo ora che la sorgente di luce sia estesa ed abbia la forma di una banda uniformemente luminosa di larghezza angolare $\delta\Theta$. Dividiamo questa banda in due parti uguali e suddividiamo ogni parte in strisce infinitamente strette. Associamo queste strisce a coppie, spostate le une rispetto alle altre di un angolo $\delta\Theta/2$. Se $\delta\Theta/2 = \delta\vartheta$, le frange di diffrazione non si formano. Quindi, la condizione di scomparsa delle frange di diffrazione prodotte dalla sorgente estesa della forma considerata è

$$\delta\Theta = \lambda/b. \tag{44.8}$$

Dalle dimensioni angolari $\delta\Theta$ della sorgente è facile passare alle sue dimensioni lineari trasversali δl. Se la sorgente è sistemata nel fuoco principale di una lente avente distanza focale f, si ha $\delta l = f\delta\Theta$, cioè

$$\delta l = f\frac{\lambda}{b}. \tag{44.9}$$

6. Quando la larghezza della fenditura diventa uguale o inferiore alla lunghezza d'onda, non si può più utilizzare il metodo approssimato di Fre-

snel. In queste condizioni il campo d'onda nel piano della fenditura non è assimilabile al campo dell'onda incidente come si fa nel metodo di Fresnel. Questo problema deve essere risolto rigorosamente dal punto di vista matematico, utilizzando le equazioni di Maxwell e le corrispondenti condizioni al contorno.

Questo metodo è stato usato con successo nel 1896 da Sommerfeld (1868-1951) nel problema della diffrazione di un'onda piana sul bordo rettilineo di uno schermo. Sommerfeld ha considerato uno schermo perfettamente conduttore (e perciò opaco) di spessore trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda. Benché questo caso sia irrealizzabile in ottica, la soluzione di Sommerfeld è di grande importanza, perché permette di apprezzare la precisione ed i limiti di validità dei metodi di calcolo approssimato. Nel 1897 Rayleigh trovò una soluzione del problema della diffrazione su una fenditura stretta ($b \ll \lambda$) praticata in uno schermo infinitamente sottile e perfettamente conduttore. Non è possibile riprodurre qui questi calcoli [1], confrontiamo soltanto i loro risultati con quelli che dà il semplice metodo di Fresnel, proprio per fissarne i limiti di validità.

Supponiamo che il vettore elettrico dell'onda incidente sia parallelo alla fenditura. Come mostra un calcolo rigoroso, l'ampiezza dell'onda diffratta si conserva qualitativamente, ma è espressa da funzioni di Bessel. Con l'aumento di ϑ, la curva delle ampiezze decresce più rapidamente di quanto faccia la funzione precedente $(\sin\alpha)/\alpha$. Al massimo il valore dell'ampiezza è di $4\lambda/(b\pi^2)$ volte più piccolo di quello dato dalla formula (44.1). Per esempio, per $b = 1/10\lambda$ l'ampiezza diminuisce di quattro volte [2]. La differenza rispetto ai risultati forniti dalla teoria approssimata diminuisce se b aumenta.

I calcoli numerici eseguiti da Morse e Rubinstein (1938) hanno mostrato che, quando la larghezza della fenditura è uguale o superiore a λ, i risultati ottenuti per mezzo del metodo approssimato di Fresnel possono essere considerati sufficientemente precisi. Se ne conclude che, persino nel caso dei più fini reticoli di diffrazione moderni (larghezze delle fenditure comprese tra 1000 e 2000 nm) il metodo di Fresnel approssimato non conduce ad errori notevoli.

§ 45. *Diffrazione di Fraunhofer prodotta da piccole aperture*

1. Supponiamo che la luce cada perpendicolarmente su uno schermo opaco in cui siano praticati dei fori. (La generalizzazione al caso di un'inci-

---

[1] A. Sommerfeld, *Optik*, Wiesbaden, 1950.

[2] Se il vettore elettrico dell'onda incidente è perpendicolare alla lunghezza della fenditura, l'ampiezza diminuisce meno. È facile convincersene facendo riferimento all'esperimento di diffrazione di Hertz con un reticolo di fil di ferro (vol. III, § 142, punto 7).

denza obliqua non presenta alcuna difficoltà). Facciamo coincidere il piano coordinato XY con il piano dello schermo indicando con dF l'elemento d'area di questo piano e la direzione della luce diffratta con il vettore unitario $\mathbf{s}$ (fig. 178). La differenza di cammino tra i raggi emessi in questa direzione dall'elemento d'area dF e dall'origine delle coordinate O, cioè la lunghezza del segmento OA, è uguale a $(\mathbf{rs})$, dove $\mathbf{r}$ (x, y) è il raggio vettore di dF. La corrispondente differenza di fase è $k(\mathbf{rs})$. Il campo risultante sulla figura di diffrazione di Fraunhofer è data dall'integrale

$$E = \int e^{ik(\mathbf{sr})} dF, \tag{45.1}$$

esteso a tutti i fori.

Nel caso di un'apertura rettangolare è più comodo usare un sistema di
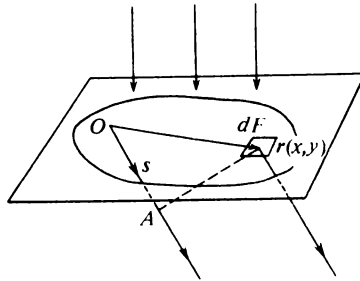
Fig. 178

coordinate rettangolari, imponendo che gli assi coordinati siano paralleli ai lati dell'apertura. Se a e b sono le lunghezze di questi lati, si ha

$$E = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ik(s_x x + s_y y)} dx\, dy. \tag{45.2}$$

Questi sono gli stessi integrali che comparivano nella formula concernente la diffrazione da una fenditura. Si trova dopo l'integrazione

$$E = ab \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right), \tag{45.3}$$

dove

$$\alpha = \frac{1}{2} kas_x = \frac{\pi a s_x}{\lambda}, \quad \beta = \frac{1}{2} kbs_y = \frac{\pi b s_y}{\lambda}. \tag{45.4}$$

Estendendo in uno degli integrali i limiti d'integrazione fino all'infinito, otteniamo il caso limite di una fenditura infinitamente lunga. L'intensità è data dalla formula

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2. \tag{45.5}$$

La figura di diffrazione può essere ottenuta per sovrapposizione di due figure di diffrazione reciprocamente perpendicolari, una prodotta per diffrazione da una fenditura di larghezza a e l'altra da una fenditura di larghezza b (fig. 179). La figura di diffrazione è allungata nella direzione parallela al lato più corto dell'apertura rettangolare.

In pratica il caso di un foro circolare è di maggior interesse, poiché tutte le montature delle lenti e degli obiettivi hanno generalmente forma circolare. In questo caso, per calcolare l'integrale (45.1), conviene usare coordinate polari. Per piccoli angoli di diffrazione l'integrale è espresso da una funzione di Bessel del primo ordine $J_1(\alpha)$, dove $\alpha = kR\vartheta = 2\pi R\vartheta/\lambda$ (R è il raggio del foro e ϑ l'angolo di diffrazione). Omettendo i calcoli, riportiamo i risultati finali. È naturale che la figura di diffrazione si presenti come
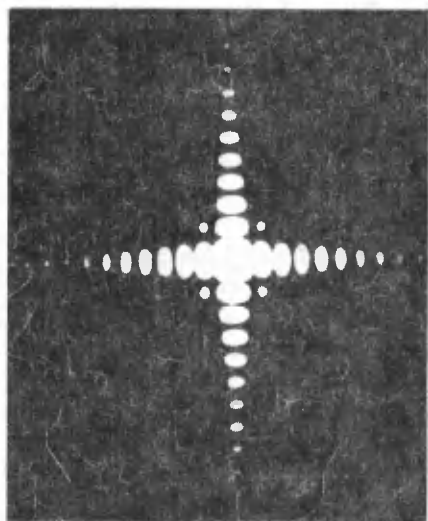
Fig. 179
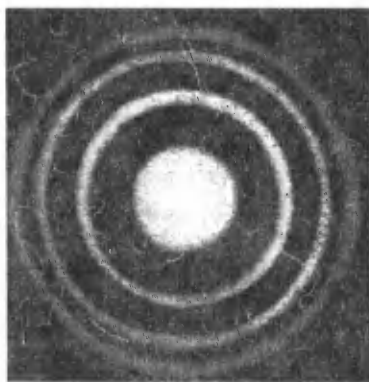
Fig. 180

una serie di anelli concentrici chiari e scuri (fig. 180). Il centro è brillante poiché tutte le onde secondarie vi arrivano con la stessa fase. La ripartizione delle ampiezze (curva tratteggiata) e quella delle intensità (curva continua) in funzione dell'angolo di diffrazione ϑ (o, il che è lo stesso, in funzione della distanza dal centro della figura di diffrazione) sono riportate nella figura 181. Le curve corrispondenti differiscono poco da quelle della figura 175 sia qualitativamente che quantitativamente. In modo approssimato i raggi angolari degli anelli scuri sono dati dalla formula

$$\vartheta_m = \left[0{,}61 + \frac{m-1}{2}\right]\frac{\lambda}{R}. \tag{45.6}$$

Nella tavola 5 sono riportati valori più precisi che mostrano che all'incirca il 98% dell'intensità luminosa è concentrato nel massimo centrale. Se escludiamo il massimo centrale, gli altri anelli chiari e scuri sono praticamente equidistanti.

Tavola 5

Minimi	Massimi	Intensità ai massimi
$\vartheta_1 = 0{,}61$	$\vartheta_1' = 0$	1
$\vartheta_2 = 1{,}12$	$\vartheta_2' = 0{,}81$	0,0175
$\vartheta_3 = 1{,}62$	$\vartheta_3' = 1{,}33$	0,0042
$\vartheta_4 = 2{,}12$	$\vartheta_4' = 1{,}85$	0,0016

2. Mediante lo stesso procedimento si può calcolare, almeno numericamente, la figura di diffrazione di Fraunhofer prodotta da un'apertura di forma qualsiasi. Risolvendo problemi simili è spesso utile basarsi su *considerazioni di similitudine*. Rappresentiamo il campo d'onda con un integrale del tipo (45.2) ma esteso al dominio F costituito dall'apertura considerata. Introduciamo nuove coordinate $x' = \mu x$ e $y' = y$, dove μ è una costante. Il dominio F del piano XY si trasforma nel dominio F' del piano
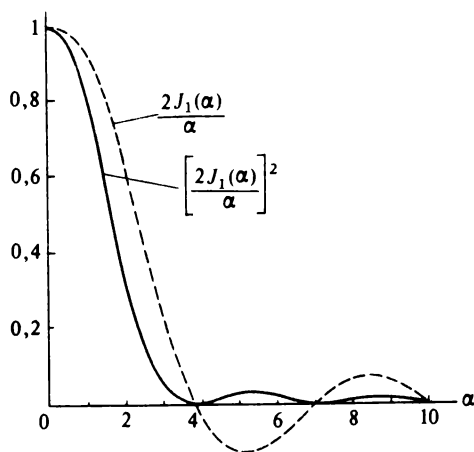
Fig. 181

$X'Y'$. Quest'ultimo dominio si ottiene da F mediante un'estensione uniforme di F di μ volte nella direzione dell'asse X. L'integrale (45.2) diventa

$$E(s) = \frac{1}{\mu} \int\int_{F'} e^{i(s_x' x' + s_y' y')} dx' dy',$$

dove il vettore unitario s' è definito dalle sue proiezioni $s_x' = s_x/\mu$, $s_y' = s_y$. (La costante μ deve essere tale che $s_x'^2 + s_y'^2 < 1$.) Ma l'ultimo integrale rappresenta il campo d'onda $E'(s')$ (nel nuovo sistema di coordinate) nella direzione del vettore unitario s' corrispondente alla diffrazione di Fraunhofer sull'apertura F', quindi

$$E'(s') = \mu E(s). \tag{45.7}$$

Quindi, conoscendo una figura di diffrazione da un'apertura data si può ottenere, senza molti calcoli, altre figure di diffrazione. Per farlo è necessario allungare (o comprimere) l'apertura nota in modo opportuno in una certa direzione. Allora, come è evidente dalle formule $x' = \mu x$, $s_x' = s_x/\mu$, la figura di diffrazione si comprimerà (o si allungherà) nella stessa direzione. Per esempio, quando un foro circolare è allungato ed acquista una forma ellittica, gli anelli di diffrazione si appiattiscono e prendono anche essi una forma ellittica. L'apertura, ovviamente, può essere allungata o compressa lungo due direzioni qualsiasi.

3. Consideriamo ora il caso in cui lo schermo possieda un gran numero N di aperture identiche di uguale orientamento. Il campo d'onda all'infinito è rappresentato dalla somma $E = \sum E_i$, dove E_i è il campo prodotto per diffrazione dalla sola apertura i-esima. L'intensità è allora

$$I = \overline{EE^*} = \sum I_i + \sum_{i \neq j} \sum \overline{E_i E_j^*}.$$

La ripartizione dell'intensità luminosa sulla figura di diffrazione alla Fraunhofer dipende dalla *direzione dei raggi* ma non dipende dalla posizione dei fasci luminosi. Se questi ultimi vengono spostati, l'intensità luminosa non cambia. *La ripartizione dell'intensità luminosa non cambia se si sposta lateralmente un'apertura senza modificare il suo orientamento.* Perciò tutte le intensità che figurano nell'ultima somma sono uguali: $I_i = I_1$.

Consideriamo due casi particolari: 1) le aperture sono distribuite caoticamente; 2) le aperture sono distribuite in modo regolare, con un ordine determinato. Nel primo caso tra i termini della doppia sommatoria per i quali $i \neq j$ si trovano in media tanti termini positivi quanti negativi. La somma di questi termini dà in media zero e quindi $I = NI_1$. Si ottiene una figura di diffrazione uguale a quella prodotta da una sola apertura, ma la sua intensità luminosa è N volte più grande. Le intensità di singole figure di diffrazione si addizionano aritmeticamente, ma le figure stesse non interferiscono tra loro. Al contrario, nel secondo caso i termini contenenti $i \neq j$ non si compensano reciprocamente. Essi possono interferire e questo modifica sostanzialmente la figura di diffrazione. Questo secondo caso sarà considerato nel seguente paragrafo, dedicato al reticolo di diffrazione.

È facile realizzare una esperienza dimostrativa del primo caso mediante una lamina di vetro ricoperta di spore (in polvere) di licopodio che hanno la forma di piccole sfere aventi praticamente gli stessi diametri. Quando la la-

mina è illuminata con un fascio di raggi paralleli, su uno schermo a grande distanza si forma una figura di diffrazione costituita da anelli concentrici. In luce bianca i bordi esterni degli anelli sono colorati in rosso e quelli interni in violetto. Questo dimostra la natura di diffrazione del fenomeno poiché le lunghezze d'onda dei raggi rossi sono più grandi di quelle dei raggi violetti.

4. Il fenomeno descritto si manifesta in natura sotto forma di *aureole.* Così si chiamano gli anelli chiari e nebulosi che si osservano sulla volta celeste attorno al Sole ed alla Luna. A volte le aureole si osservano attorno alle stelle più brillanti o ai pianeti, ed anche attorno alle sorgenti di luce terrestri. Le aureole nascono in conseguenza della diffrazione della luce sulle goccioline d'acqua (o sui piccoli cristalli di ghiaccio), quando davanti alla sorgente luminosa passa una nuvola semitrasparente o una nebbia. I raggi angolari delle aureole non sono generalmente superiori a 5°. La natura diffrattiva degli anelli che costituiscono le aureole è confermata dal fatto che i bordi esterni degli anelli sono colorati in rosso ed i loro bordi interni sono bluastri. Se l'atmosfera contiene goccioline di differenti dimensioni, gli anelli delle aureole si sovrappongono gli uni agli altri e formano un unico grande anello brillante attorno al disco dell'astro; se si tratta del Sole questo anello è detto *aureola solare*.

Oltre alle aureole si conoscono anche gli *aloni.* Così si chiama un gruppo di fenomeni ottici atmosferici dovuto alla rifrazione o alla riflessione di raggi del Sole o della Luna su piccoli cristalli di ghiaccio fluttuanti nell'atmosfera generalmente sotto forma di cirri. I raggi angolari degli aloni sono molto più grandi di quelli delle aureole e sono uguali a 22° o 46°. Il bordo esterno di questi anelli è bluastro ed il bordo interno è di colore rossastro: questo dimostra che il fenomeno è dovuto alla rifrazione (dispersione della luce). A differenza delle aureole, le cui dimensioni angolari possono variare con le dimensioni delle goccioline d'acqua, le dimensioni angolari degli anelli di un alone sono rigorosamente costanti, poiché dipendono soltanto dagli angoli formati dalle facce dei cristalli di ghiaccio, e questi angoli non variano con le dimensioni dei cristalli.

§ 46. *Reticolo di diffrazione*

1. Il *reticolo di diffrazione* è il più importante apparecchio spettrale concepito per realizzare la *decomposizione spettrale della luce e per la misura delle lunghezze d'onda*. Il reticolo di diffrazione è una superficie piana di vetro o di metallo sulla quale, per mezzo di una macchina a dividere sono tracciati moltissimi (fino a centinaia di migliaia) tratti rettilinei equidistanti. I reticoli in vetro possono essere utilizzati per le osservazioni sia in *luce trasmessa*, che in *luce riflessa*, quelli metallici soltanto in *luce riflessa*.

Sono utilizzati anche *reticoli metallici concavi* nei quali i tratti sono tracciati su sua superficie sferica concava.

Consideriamo un reticolo semplice ideale costituito da fenditure identiche parallele ed equidistanti praticate in uno schermo opaco. Sia b la larghezza della fenditura ed a la regione opaca di schermo tra due fenditure vicine. La quantità $d = a + b$ si dice *passo del reticolo*. Nel reticolo si realizza l'*interferenza a raggi multipli* dei fasci diffratti coerenti emessi dalle fenditure quando il reticolo è illuminato. La figura di diffrazione è osservata con il metodo di Fraunhofer, cioè su uno schermo all'infinito o nel piano focale di una lente interposta sul cammino della luce diffratta.

Supponiamo che sul reticolo, perpendicolarmente alla sua superficie, cada un'onda monocromatica piana (fig. 182). La differenza di cammino
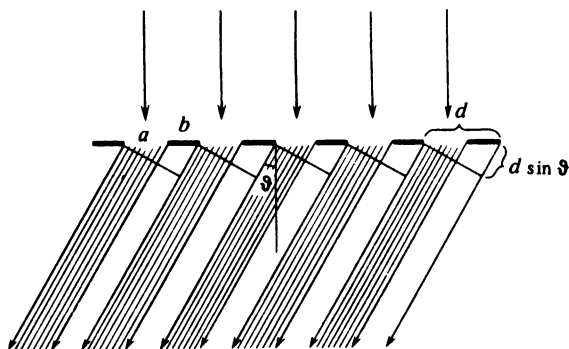
Fig. 182

tra le onde secondarie inviate da fenditure vicine è $d \sin \vartheta$ e la differenza di fase è $\delta = kd \sin \vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \vartheta$, dove ϑ è l'angolo di diffrazione. Indichiamo con E_1 il campo creato dalla prima fenditura nel punto d'osservazione, dato dalla formula $E_1 = b \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. I campi creati da tutte le altre fenditure sono rappresentati dalle espressioni

$$E_2 = E_1 e^{-i\delta}, \quad E_3 = E_1 e^{-2i\delta}, \ldots, \quad E_N = E_1 e^{-i(N-1)\delta},$$

dove N è il numero totale di fenditure. Il campo totale prodotto da tutte le fenditure è dato dalla somma

$$E = E_1[1 + e^{-i\delta} + e^{-2i\delta} + \ldots + e^{-i(N-1)\delta}] = E_1 \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}},$$

da cui

$$E = E_1 \frac{\sin (N\delta/2)}{\sin (\delta/2)} e^{-i(N-1)\delta/2}, \quad A = A_1 \frac{\sin (N\delta/2)}{\sin (\delta/2)}, \qquad (46.1)$$

dove A_1 è l'ampiezza reale dell'onda inviata da una sola fenditura ed A quella dell'onda inviata da tutto il reticolo. L'intensità della luce è

$$I = I_1 \left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right]^2. \tag{46.2}$$

Le formule (46.1) e (46.2) sono le formule di base della teoria del reticolo di diffrazione.

2. Quando $\vartheta = 0$, si ha $\delta = 0$ e le espressioni (46.1) e (46.2) prendono la forma indeterminata 0/0. Risolvendo questa forma, otteniamo

$$A_{pr} = NA_1, \quad I_{pr} = N^2 I_1. \tag{46.3}$$

Lo stesso risultato si ottiene per $\delta/2 = m\pi$, cioè per

$$d \sin\vartheta = m\lambda, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{46.4}$$

Nelle direzioni che soddisfano queste condizioni, si osservano massimi d'intensità; questi massimi sono N^2 volte più grandi dell'intensità dell'onda inviata da una sola fenditura nella stessa direzione. Questi massimi sono detti *principali*. Il numero intero m si dice *ordine del massimo principale* o *ordine di spettro*. La condizione (46.4) caratterizza le direzioni nelle quali le vibrazioni emesse da tutte le fenditure arrivano nel punto d'osservazione con la stessa fase e quindi si rafforzano reciprocamente. Per certi valori di m, in queste direzioni i massimi d'intensità possono mancare. Questi massimi sono assenti se $I_1 = 0$, cioè nelle direzioni in cui si trovano i minimi di diffrazione prodotti da una sola fenditura. Per esempio, se $a = b$, tutti i massimi principali di ordine pari mancano. Infatti, la condizione per ottenere un massimo principale di ordine $2n$ è della forma $d \sin\vartheta = 2n\lambda$. Per $d = 2b$ questa condizione diventa $b \sin\vartheta = n\lambda$, cioè la condizione di *minimo di diffrazione* su una fenditura. Dunque, nella direzione considerata nessuna fenditura, né l'intero reticolo invia luce.

3. Le espressioni (46.1) e (46.2) si annullano se $\sin(N\delta/2) = 0$ ma $\sin(\delta/2) \neq 0$, cioè per $N\delta/2 = (Nm + p)\pi$, o

$$d \sin\vartheta = \left(m + \frac{p}{N}\right)\lambda \quad (p = 1, 2, \ldots, N - 1). \tag{46.5}$$

Nelle corrispondenti direzioni si ottengono i minimi di diffrazione dove l'intensità luminosa è nulla. Tra due minimi vicini si ottiene un massimo. Questi massimi si dicono *secondari* o *supplementari*. Tra due massimi principali vicini si trovano $(N - 1)$ minimi e $(N - 2)$ massimi supplementari. Su questi massimi e minimi sono sovrapposti i minimi corrispondenti alla diffrazione su una fenditura individuale; in questi minimi E_1 si annulla.

I massimi secondari si trovano grosso modo al centro tra i corrispondenti minimi di diffrazione. Il valore di δ, che caratterizza la direzione in cui si trova un massimo secondario, può essere perciò calcolato per mezzo

della formula approssimata

$$N\frac{\delta}{2} = \frac{(Nm + p) + (Nm + p + 1)}{2}\pi,$$

o

$$\frac{\delta}{2} = \left(m + \frac{2p + 1}{2N}\right)\pi. \qquad (46.6)$$

Utilizzando questa formula si può stabilire un'espressione approssimata dell'intensità luminosa nei massimi secondari nelle vicinanze del corrispondente massimo principale (cioè per p piccoli). Nelle posizioni dei massimi secondari, i numeratori della formula (46.2) sono uguali all'unità. Se il numero N di fenditure del reticolo è molto grande e se il numero p del massimo secondario è piccolo, l'angolo $\delta/2$ sarà piccolo e si può porre

$$\sin\frac{\delta}{2} = \pm\sin\frac{2p + 1}{2N}\pi \approx \pm\frac{2p + 1}{2N}\pi.$$

Questo dà

$$I = \frac{I_1}{\pi^2}\left(\frac{2N}{2p + 1}\right)^2 = \frac{4}{(2p + 1)^2\pi^2}I_{pr}. \qquad (46.7)$$

Quindi le intensità del massimo principale e dei massimi secondari più vicini stanno tra loro nel rapporto

$$1 : \frac{4}{9\pi^2} : \frac{4}{25\pi^2} : \frac{4}{49\pi^2} : \ldots = 1 : 0{,}045 : 0{,}016 : 0{,}0083 : \ldots$$

I massimi secondari sono deboli rispetto ai massimi principali. Se il numero di fenditure è grande essi non hanno generalmente alcun'importanza. I massimi secondari creano un debole illuminamento più o meno uniforme sul quale risaltano i massimi principali stretti e netti in cui è praticamente concentrata tutta la luce diffratta. La ripartizione dell'intensità della luce diffratta è rappresentata nella figura schematica 183 per $N = 8$. Il valore del fattore I_1 che figura nella formula (46.2) non è indicato. Tra i massimi principali vicini si trovano $N - 2 = 6$ massimi secondari. Le intensità relative dei massimi principali e secondari sono definite dai numeri 100; 5,0; 2,25; 1,6; 1,6; 2,25; 5,0; 100.

Si può realizzare un bel esperimento dimostrativo, illuminando un reticolo con uno stretto fascio di luce emesso da un laser. Per diffrazione il fascio si divide in un gran numero di fasci brillanti, ben visibili nell'aria, che si spargono a ventaglio dal reticolo. Cadendo sul soffitto e sulle pareti dell'aula questi fasci creano macchie brillanti.

4. L'origine dei massimi e dei minimi secondari si spiega facilmente mediante i diagrammi vettoriali. Su un diagramma vettoriale le vibrazioni provenienti da singole fenditure del reticolo sono rappresentate da vettori

di uguale lunghezza. In conseguenza dello spostamento di fase, questi vettori sono ruotati l'uno rispetto all'altro di uno stesso angolo $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \vartheta$ (fig. 184), e l'insieme dei vettori forma una spezzata regolare. La risultante OA di questa spezzata rappresenta la vibrazione eccitata da tutto il reticolo. Se la spezzata è chiusa, $E = 0$, cioè si ottiene un minimo di diffrazione, il primo dei quali si ha per $\delta = 2\pi/N$, il secondo per $\delta = 4\pi/N$ ecc. È facile
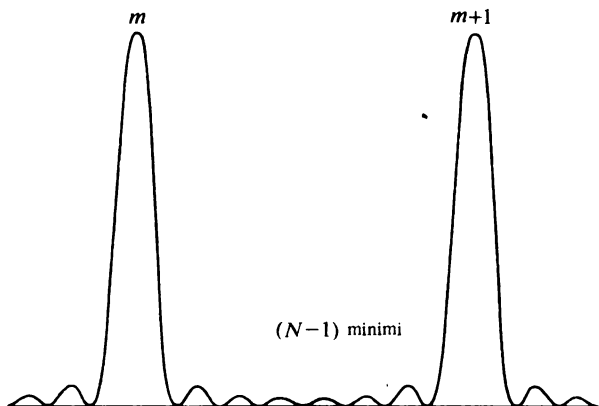
Fig. 183

vedere che in tal modo si ottiene la condizione per avere un minimo di diffrazione (46.5). Tutto ciò è illustrato nella figura 185 per $N = 3$ e nella figura 186 per $N = 4$.

Fig. 184
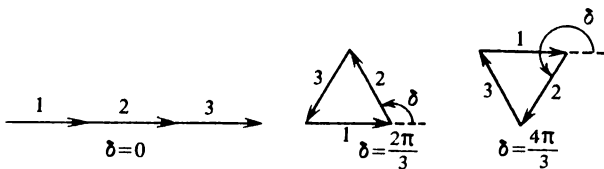
Fig. 185

5. Se l'onda cade sul reticolo inclinata di un angolo ϑ_0 (fig. 187), la differenza di cammino tra fasci vicini diventa uguale a $AD - CB = d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0)$. Il carattere della figura di diffrazione resta lo stesso; le posizioni dei massimi principali sono date dalla condizione

$$d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = m\lambda, \tag{46.8}$$

e quelle dei minimi di diffrazione da

$$d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = \left(m + \frac{p}{N}\right)\lambda \quad (p = 1, 2, \ldots, N-1). \qquad (46.9)$$

Conoscendo le posizioni dei massimi principali si può calcolare la lunghezza d'onda mediante la formula (46.4) o (46.8). Il reticolo di diffrazione
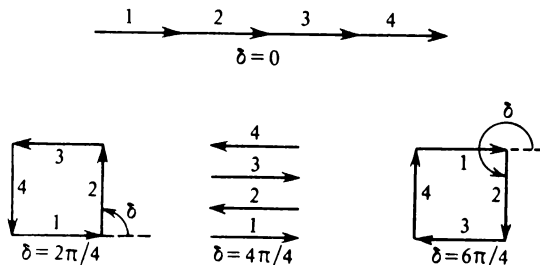
Fig. 186

è appunto lo strumento per misurare le *lunghezze d'onda* e non le frequenze delle vibrazioni come a volte si afferma.

6. La forma dei tratti incisi sul reticolo, il materiale utilizzato per fabbricarlo, ecc., si fanno sentire soltanto sulla forma dell'onda E_1 emessa *da un tratto singolo*. Le posizioni dei massimi principali dipendono esclusivamente dal passo del reticolo e quelle dei minimi dipendono dal passo e dal
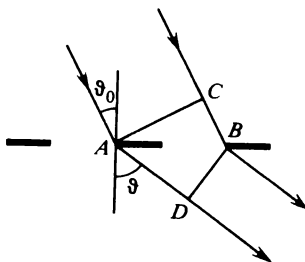
Fig. 187

numero N di tratti contenuti nel reticolo. Deducendo le formule (46.4), (46.8), (46.9) per mezzo del principio di Huygens-Fresnel non è necessario utilizzare metodi di calcolo approssimati. Dai ragionamenti del punto 4 segue che è essenziale soltanto la *periodicità del campo luminoso all'uscita del reticolo* (cioè sulla sua faccia posteriore) che a sua volta è dovuta alla periodicità della struttura del reticolo. Questa è la sola caratteristica del

campo d'uscita che è importante e quindi le formule ottenute sono *rigorosamente esatte*.

In senso lato si dice reticolo di diffrazione ogni struttura che possiede una *periodicità spaziale*. Se le proprietà della struttura cambiano periodicamente soltanto in una direzione, il reticolo è *unidimensionale* o *lineare*. Se, invece, la periodicità del reticolo si manifesta in due o tre direzioni, si dice che il reticolo è rispettivamente *bi-* o *tridimensionale*. Nell'ultimo caso esso si chiama anche *reticolo spaziale*. In questo e nei seguenti paragrafi sono considerati soltanto reticoli lineari.

Non è obbligatorio che l'ampiezza dell'onda cambi attraversando il reticolo, ma è importante che all'uscita del reticolo *il campo tutto intero* vari periodicamente. Si possono distinguere due casi limite: 1) il reticolo provoca variazioni periodiche dell'ampiezza dell'onda senza modificare la sua
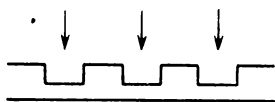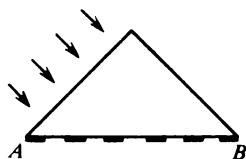
Fig. 188 Fig. 189

fase; quest'è il *reticolo d'ampiezza*; 2) il reticolo provoca variazioni periodiche della fase dell'onda senza esercitare alcuna azione sulla sua ampiezza; quest'è il *reticolo di fase*.

A rigore di termini ogni reticolo reale non è un reticolo puramente d'ampiezza o di fase, esso varia periodicamente sia l'ampiezza, sia la fase del campo d'onda. In modo approssimato il reticolo d'ampiezza è un insieme di fenditure equidistanti praticate in uno schermo opaco (fig. 187). Un reticolo di fase è approssimativamente realizzato da una lastra di vetro rappresentata nella figura 188. In entrambi i casi il passo del reticolo deve essere grande rispetto alla lunghezza d'onda. Un esempio di reticolo di fase a riflessione è il reticolo costruito da S.M. Rytov (nato nel 1908) e I.L. Fabelinskij (nato nel 1911). Questo reticolo è costituito da un prisma isoscele di vetro il cui angolo di rifrazione è uguale a 90° (fig. 189). Sulla faccia che corrisponde all'ipotenusa AB vengono depositate per polverizzazione bande d'argento strette, equidistanti e parallele allo spigolo rifrangente del prisma. La luce cade normalmente su una delle facce laterali. Quando la luce arriva alla faccia AB essa subisce una riflessione totale sulle bande non argentate, e si riflette su quelle argentate. Nell'ultimo caso la riflessione è praticamente ancora totale, grazie al grande coefficiente di riflessione dell'argento. In entrambi i casi la riflessione è accompagnata da variazioni di fase, che sono tutte differenti (si veda i §§ 66 e 73). L'ampiezza dell'onda non varia nella riflessione, mentre la fase subisce variazioni periodiche.

7. Non tutti i numeri interi m che compaiono nelle formule (46.4) e (46.8) sono ammissibili. Essendo $|\sin\vartheta| < 1$, m deve verificare la disuguaglianza

$$\left| m\frac{\lambda}{d} + \sin\vartheta_0 \right| \leqslant 1. \tag{46.10}$$

In particolare, per incidenza normale

$$|m| \leqslant d/\lambda. \tag{46.11}$$

Per $d < \lambda$ può apparire soltanto un massimo principale di ordine zero. Un'onda piana dopo aver attraversato il reticolo continua a restare piana e non si forma nessuna onda laterale. Il reticolo si comporta come una lastra piano-parallela, ma ciò è valido soltanto lontano dal reticolo. In uno strato superficiale sottile vicino al reticolo esistono onde evanescenti che si smorzano rapidamente quando ci si allontana dal reticolo (si veda il § 52).

8. Supponiamo che il passo del reticolo sia « grande » ($d \gg \lambda$) e che la luce cada su esso sotto un piccolo angolo ϑ_0. Allora gli angoli di diffrazione sono piccoli e la (46.8) può essere sostituita con l'espressione approssimata

$$d\cdot(\vartheta - \vartheta_0) = m\lambda. \tag{46.12}$$

Se il reticolo è molto grossolano è difficile rivelare la diffrazione, data la piccolezza degli angoli di diffrazione $(\vartheta - \vartheta_0)$. Ma si può ottenerla utilizzando l'incidenza radente della luce quando l'angolo d'incidenza è poco differente da 90°. Se la differenza $(\vartheta - \vartheta_0)$ è piccola la formula (46.8) può essere riscritta nella forma

$$d\cos\vartheta_0\cdot(\vartheta - \vartheta_0) = m\lambda. \tag{46.13}$$

Per il suo aspetto la formula (46.13) ha la stessa forma della (46.12). Il passo d è sostituito dalla quantità $d\cos\vartheta_0$ che può esser resa molto piccola. Ciò significa che utilizzare l'incidenza radente equivale a diminuire il passo del reticolo e ad aumentare gli angoli di diffrazione. In questo modo si riesce ad ottenere spettri di diffrazione netti persino da reticoli molto grossolani, per esempio dai dischi di grammofono. Questi ultimi, in un'aula per dimostrazioni, permettono di ottenere con luce bianca spettri di diffrazione di differenti ordini.

Il metodo dell'incidenza radente gioca un ruolo molto importante nella spettroscopia a raggi X. La fabbricazione di reticoli di diffrazione per la regione spettrale dei raggi X è molto difficile a causa dell'estrema piccolezza della lunghezza d'onda dei raggi X (0,1 nm o inferiore). Il metodo dell'incidenza radente permette di ottenere in questa gamma magnifiche figure di diffrazione utilizzando reticoli a riflessione per la regione visibile dello spettro. Il problema è facilitato dal fatto che l'indice di rifrazione dei raggi X è inferiore all'unità. Ciò permette di utilizzare angoli d'incidenza per i quali i raggi X subiscono una riflessione totale. Quindi con l'aiuto di un re-

ticolo di diffrazione ottico si può in modo preciso misurare la lunghezza d'onda di una radiazione monocromatica di raggi X. Studiando poi la diffrazione di questa radiazione su un cristallo naturale si può misurare in unità assolute la costante di reticolo di questo cristallo. Fatto ciò, questo cristallo può essere utilizzato in uno spettroscopio a raggi X per misurare le lunghezze d'onda dei raggi X in unità assolute (si veda il § 61).

Problemi

1. Dimostrare che per un reticolo di diffrazione a fenditure di tipo usuale $I_{dif} \leqslant 1/4 I_{inc}$, dove I_{inc} è l'intensità della luce incidente ed I_{dif} è l'intensità della luce diffratta in tutti i massimi di diffrazione ad eccezione del massimo di ordine zero. Il valore massimo dell'intensità della luce diffratta si ottiene quando la larghezza delle fenditure del reticolo è uguale alla metà del suo passo.

Soluzione. Se I_0 è l'intensità della luce concentrata nel massimo di ordine zero e I_{dif} è l'intensità della luce diffratta, si ha $I_{trans} = I_0 + I_{dif}$, dove I_{trans} è l'intensità della luce trasmessa attraverso il reticolo. Analogamente, per il reticolo complementare $I'_{trans} = I'_0 + I'_{dif}$. Per il teorema di Babinet $I_{dif} = I'_{dif}$. Inoltre,

$$\frac{I_{trans}}{I'_{trans}} = \frac{b}{d - b}, \quad \frac{I_0}{I'_0} = \left(\frac{b}{d - b}\right)^2.$$

Tenendone conto otteniamo

$$I_{dif} = \frac{b}{d} \frac{d - b}{d} I_{inc}.$$

Il massimo di quest'espressione si ottiene per $b = 1/2d$, e quindi $I_{dif} \leqslant 1/4 I_{inc}$.

2. Dire a quale condizione si può osservare una riflessione speculare da una superficie rugosa per angoli d'incidenza grandi e piccoli.

Soluzione. Indichiamo con ϑ l'angolo che formano i raggi incidenti con la normale al piano rappresentato nella figura 190 dalla linea tratteggiata. La differenza di cammino delle onde
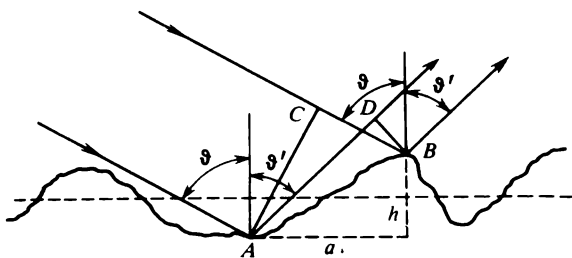
Fig. 190

secondarie emesse dalla superficie del corpo ad un angolo ϑ' rispetto alla normale è data dall'espressione

$$\Delta = AD - BC = a(\sin \vartheta' - \sin \vartheta) + h(\cos \vartheta' + \cos \vartheta).$$

Poiché a può assumere un valore qualsiasi, se $\vartheta' \neq \vartheta$, Δ può assumere anch'esso un valore

qualsiasi, ed inoltre per una superficie irregolare Δ può assumere valori sia positivi che negativi. Ne segue che una riflessione regolare, se essa è possibile, può aver luogo soltanto quando $\vartheta' = \vartheta$. In questo caso $\Delta = 2h \cos \vartheta$. Di conseguenza, quale che sia il valore di h, si può trovare un angolo ϑ sufficientemente grande per cui $\Delta \ll \lambda$. Se questa condizione è verificata, la riflessione sarà regolare. Sotto incidenza normale si ha che $\Delta = 2h$ ed una riflessione regolare è possibile solo se è verificata la condizione $h \ll \lambda$. Quindi, se l'angolo d'incidenza è vicino a $\pi/2$, una riflessione speculare si produce sempre. Se gli angoli d'incidenza sono piccoli, la riflessione speculare può esser prodotta solo se la rugosità della superficie è $\ll \lambda$.

3. Una struttura periodica unidimensionale trasparente il cui profilo è rappresentato nella figura 191 è illuminata dall'alto con un'onda monocromatica piana che incide normalmente sulla frontiera superiore. La larghezza dei denti è uguale a quella delle cavità. Per un valore
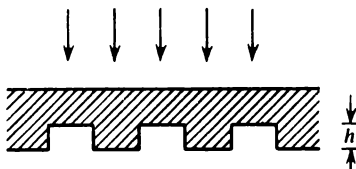
Fig. 191

dell'indice di rifrazione n dato, determinare la profondità h in modo che i massimi principali del primo ordine di una diffrazione di Fraunhofer abbiano la massima intensità. Quale sarà allora l'intensità del massimo principale di ordine zero?

Risposta. $h = \dfrac{2m - 1}{2(n - 1)} \lambda$, dove $m = 1, 2, 3, \ldots$

L'intensità del massimo di ordine zero è nulla.

4. Un sistema raggiante complesso è costituito da una fila finita di vibratori paralleli ravvicinati che emettono vibrazioni la cui fase varia con regolarità lungo la fila. Quale dev'essere la variazione temporale $\Delta\varphi$ della differenza di fase di due vibratori vicini affinché il ramo principale del diagramma di direttività di tutto il sistema descriva un percorso circolare con velocità angolare Ω costante (senza rotazione del sistema stesso)?

Risposta. Se l'angolo tra la normale alla fila di vibratori e la direzione del ramo principale è $\vartheta = \Omega t + \delta$, si ha

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin(\Omega t + \delta) + 2m\pi,$$

dove

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

5. Sopra il centro O_1 di un disco da grammofono è sistemata una sorgente puntiforme di luce monocromatica ad una altezza $h_1 = 1$ cm. L'occhio dell'osservatore si trova ad un'altezza $h_2 = 10$ cm e ad una distanza $a = 110$ cm dall'asse del disco. Oltre alla immagine geometrica della sorgente l'osservatore vede un sistema di frange di diffrazione sulla superficie del disco. Calcolare la distanza Δx tra le frange, se la distanza tra i solchi $d = 0{,}5$ mm. La lunghezza d'onda della luce usata è $\lambda = 550$ nm.

Soluzione. La condizione per avere un massimo di ordine m (fig. 192) è $d(\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2) = m\lambda$ e di ordine $(m + 1)$ è $d(\sin \vartheta_1' - \sin \vartheta_2') = (m + 1)\lambda$. Quando si passa da un massimo ad un altro gli angoli ϑ_1 e ϑ_2 ricevono gli incrementi $\Delta\vartheta_1$ e $\Delta\vartheta_2$ legati dalla relazione $d(\cos \vartheta_1 \Delta\vartheta_1 - \cos \vartheta_2 \Delta\vartheta_2) = \lambda$. Inoltre, $x_1 = h_1 \operatorname{tg} \vartheta_1, x_2 = h_2 \operatorname{tg} \vartheta_2$, e nello stesso tempo

$x_1 + x_2 = a =$ costante. Da questa condizione si ottiene la seconda relazione

$$\frac{h_1}{\cos^2 \vartheta_1} \Delta\vartheta_1 + \frac{h_2}{\cos^2 \vartheta_2} \Delta\vartheta_2 = 0.$$

Da queste due relazioni troviamo $\Delta\vartheta_1$ e $\Delta\vartheta_2$ e poi la distanza tra i massimi

$$\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{h_1}{\cos^2 \vartheta_1} \Delta\vartheta_1 = -\frac{h_2}{\cos^2 \vartheta_2} \Delta\vartheta_2.$$

Il risultato può essere semplificato, notando che gli angoli ϑ_1 e ϑ_2 differiscono poco dall'angolo d'incidenza ϑ_0, corrispondente a una riflessione speculare. Sostituendo questi an-
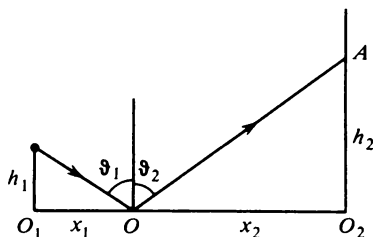
Fig. 192

goli con ϑ_0, si ottiene

$$\Delta x = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{\lambda}{d \cos^3 \vartheta_0}.$$

Con questo

$$\cos \vartheta_0 \approx \frac{h_1}{x_1} \approx \frac{h_2}{x_2}, \quad \text{o} \quad \cos \vartheta_0 = \frac{h_1 + h_2}{x_1 + x_2} = \frac{h_1 + h_2}{a} = \frac{1}{10}.$$

La sostituzione dei dati numerici dà $\Delta x = 1$ cm.

§ 47. *Reticolo di diffrazione come strumento spettrale*

1. Le posizioni dei massimi principali nel reticolo di diffrazione dipendono dalla lunghezza d'onda, eccezion fatta per i massimi principali di ordine zero ($m = 0$). La luce bianca, così come ogni luce composta, si può considerare come una sovrapposizione di onde monocromatiche di differenti lunghezze d'onda. Nel caso di diffrazione sul reticolo queste onde si comportano *indipendentemente*, e perciò il reticolo in ogni ordine $m \neq 0$ scomporrà la luce incidente in uno spettro in cui le singole componenti monocromatiche risultano spazialmente separate. I massimi di diffrazione principali corrispondenti a $m = 1$ formano uno *spettro del primo ordine* dopo il quale seguono gli *spettri del secondo* ($m = 2$), del *terzo* ($m = 3$) *ordine* e di *ordini superiori*. Se la luce incidente è bianca, lo spettro di ogni or-

dine si presenta sotto forma di una frangia colorata contenente tutti i colori dell'arcobaleno. In questa frangia più deviati sono i raggi rossi e meno deviati quelli violetti.

Le posizioni delle righe spettrali negli spettri ottenuti con un reticolo di diffrazione sono definite dalle relazioni semplici (46.4) o (46.8). Da questo punto di vista gli spettri di diffrazione sono preferibili a quelli ottenuti per scomposizione della luce con prismi di dispersione. Negli spettri da prismi le posizioni delle righe spettrali sono definite attraverso una complicata dipendenza dell'indice di rifrazione della sostanza del prisma dalla lunghezza d'onda. Lo spettro si dice *normale* se la coordinata x che caratterizza la posizione di una riga spettrale, è proporzionale alla lunghezza d'onda. Se gli angoli di diffrazione sono piccoli e si può quindi trascurare le variazioni del coseno dell'angolo ϑ, il reticolo di diffrazione fornisce uno spettro normale.

Le principali caratteristiche dei reticoli di diffrazione, come degli altri strumenti spettrali sono la *dispersione angolare*, il *dominio di dispersione* e il *potere risolutivo*.

2. Dispersione angolare. *La derivata $d\vartheta/d\lambda$ si chiama dispersione angolare.* Più grande è la dispersione angolare, più grande è la distanza tra due righe spettrali di lunghezza d'onda data. Differenziando la formula (46.8) con ϑ_0 costante, troviamo per il reticolo

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\vartheta} = \frac{\sin\vartheta - \sin\vartheta_0}{\lambda\cos\vartheta}. \tag{47.1}$$

Quindi, *la dispersione angolare non dipende dai parametri del reticolo, ma è determinata, oltre che dalla lunghezza d'onda, dagli angloi ϑ e ϑ_0*. Per d e m dati, la dispersione angolare cresce all'aumentare dell'angolo ϑ. La presenza del coseno dell'angolo ϑ nel denominatore spiega il vantaggio di un'incidenza radente (si veda la fine del paragrafo precedente).

3. Dominio di dispersione. Se gli spettri di ordini vicini si sovrappongono, lo strumento spettrale diventa inutilizzabile per lo studio del corrispondente dominio di spettro. *La larghezza massima $\Delta\lambda$ dell'intervallo spettrale per la quale non si verifica ancora la sovrapposizione, si dice dominio di dispersione di uno strumento spettrale.* Calcoliamo il dominio di dispersione di un reticolo di diffrazione. Supponiamo che le lunghezze d'onda della radiazione incidente siano comprese nell'intervallo spettrale tra λ e $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Supponiamo anche che l'estremità destra di uno spettro di ordine $(m + 1)$ per la lunghezza d'onda λ coincida in posizione con l'estremità sinistra di uno spettro di ordine m per la lunghezza d'onda λ' (si veda la fig. 182). Si ha allora

$$d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda',$$
$$d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = (m + 1)\lambda.$$

Di qui $m\lambda' = (m + 1)\lambda$ e quindi

$$\lambda' - \lambda \equiv \Delta\lambda = \lambda/m. \tag{47.2}$$

Questa formula definisce il dominio di dispersione di un reticolo di diffrazione nella regione considerata. Per una lunghezza d'onda data esso dipende soltanto dall'ordine m dello spettro. Più grande è m, più stretto è il dominio di dispersione. Nei reticoli di diffrazione quindi sono utilizzati gli spettri di *ordine inferiore* (m è generalmente uguale a 2 o a 3), e perciò i reticoli di diffrazione sono caratterizzati da domini di dispersione estesi e sono convenienti per gli studi di *regioni spettrali estese*. Questo è il principale vantaggio dei reticoli di diffrazione rispetto agli strumenti spettrali interferenziali i cui domini di dispersione sono molto stretti, il che è dovuto ai grandi ordini d'interferenza m.

4. Potere risolutivo. Uno strumento di grande dispersione non assicura automaticamente la risoluzione di due righe spettrali di due lunghezze d'onda poco differenti λ e $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ (cioè le righe osservate non sono risolte in due righe distinte). Ogni riga spettrale, per quanto fine, è rappresentata da un apparecchio spettrale non come una linea, ma come una figura di diffrazione più o meno degradata con massimi e minimi d'intensità luminosa. La dispersione dello strumento spettrale caratterizza la distanza tra i centri delle figure di diffrazione prodotte da due righe spettrali di differente lunghezza. Se le figure di diffrazione sono sfocate e larghe, e persino quando lo strumento produce un allargamento relativamente grande, la figura di diffrazione risultante creata dalla loro sovrapposizione sarà indistinguibile da quella creata da una sola riga spettrale. Quanto più sono strette le figure di diffrazione prodotte da due righe spettrali vicine, tanto più piccola può essere la distanza di cui è necessario disgiungere i loro centri affinché le righe siano risolte. *La più piccola differenza di lunghezze d'onda $\delta\lambda$ che lo strumento spettrale può risolvere, si chiama intervallo spettrale risolvibile e la grandezza $R = \lambda/\delta\lambda$ si dice potere risolutivo.*

L'intervallo spettrale risolvibile $\delta\lambda$ è una nozione definita imperfettamente e può essere conosciuto solo in modo approssimato. Per i reticoli di diffrazione Rayleigh ha proposto il seguente criterio di risoluzione spettrale. *Le righe spettrali di lunghezze d'onda poco differenti λ e λ' sono considerate risolte se il massimo principale della figura di diffrazione prodotta dalla riga di una lunghezza d'onda coincide con la posizione del primo minimo di diffrazione della figura dello stesso ordine prodotta da una riga di lunghezza d'onda differente.* Se questo criterio è verificato, in base alla formula (46.9) si può scrivere

$$d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda,$$

$$d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda'.$$

Di qui $(m + 1/N)\lambda = m\lambda'$ e, quindi, $\delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \lambda/(Nm)$,

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm. \tag{47.3}$$

Per dare una giustificazione del criterio di Rayleigh rappresentiamo graficamente (fig. 193) la ripartizione delle intensità luminose corrispondenti alle righe spettrali λ e λ' spostate l'una rispetto all'altra di $\delta\lambda$. Essendo le righe spettrali di differenti lunghezze d'onda non coerenti, l'intensità risultante è la somma delle intensità di entrambe le righe. Essa è rappresentata nella figura 193 dalla curva continua nel caso che le intensità di entrambe le righe siano le stesse e la distanza $\delta\lambda$ tra esse soddisfi il criterio di Rayleigh. Al centro della curva si trova un solco cioè un minimo la cui intensità, come è facile calcolare, è all'incirca l'80% dell'intensità massima.
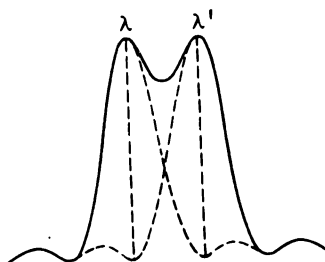
Fig. 193

Quando si osserva una figura con una tale cavità, l'occhio normale la percepisce generalmente come « una riga spettrale doppia » (doppietto).

5. Per aumentare il potere risolutivo si può aumentare il numero N di tratti o utilizzare un ordine d'interferenza m più elevato. Il primo metodo è utilizzato nei reticoli di diffrazione ed il secondo negli strumenti spettrali interferenziali. Nell'Unione Sovietica si producono reticoli di diffrazione piani e concavi di diverse dimensioni e con diverso numero di tratti per millimetro. Per le regioni ultravioletta e visibile vengono fabbricati reticoli di diffrazione con 1200 e 600 tratti per millimetro di dimensioni: $(100 \times \times 100)$ mm^2 e (150×150) mm^2; per la regione dell'infrarosso si producono reticoli da 300 a 1 tratto per millimetro e con dimensioni da $(150 \times \times 150)$ mm^2 fino a (300×300) mm^2. Il numero totale di tratti arriva grosso modo fino a 200 000 ed il potere risolutivo al secondo ordine può arrivare fino a 400 000. L'importante vantaggio dei reticoli di diffrazione è il piccolo ordine m degli spettri prodotti. Grazie a ciò i reticoli di diffrazione possiedono domini di dispersione $\Delta\lambda = \lambda/m$ estesi e permettono quindi di studiare *larghi intervalli spettrali*. Gli inconvenienti dei reticoli spettrali sono la scarsa luminosità e le difficoltà del loro uso.

Negli apparecchi spettrali interferenziali il numero N di fasci è relativamente piccolo (alcune decine; nell'interferometro di Michelson $N = 2$), mentre l'ordine m degli spettri è molto grande ($m \sim 10000$). Perciò gli apparecchi spettrali interferenziali possiedono domini di dispersione piccoli e possono essere utilizzati soltanto per lo studio di *intervalli spettrali molto stretti*, per esempio per lo studio della struttura di singole righe spettrali isolate mediante un altro apparecchio spettrale, avente un dominio di dispersione più grande ma un piccolo potere risolutivo. Questi apparecchi sono però di uso più semplice e la loro luminosità è più grande di quella dei reticoli di diffrazione.

6. I reticoli di diffrazione utilizzati in qualità di apparecchio spettrale di alta precisione debbono soddisfare esigenze molto severe. Per realizzare un reticolo di diffrazione è necessario tracciare decine o centinaia di migliaia di tratti assolutamente identici con una periodicità perfetta. Perciò la tecnica costruttiva ha avuto un'evoluzione abbastanza lenta. Si può supporre che il primo reticolo di diffrazione sia stato realizzato nel 1785 dall'astronomo americano Rittenhausen, ma né Rittenhausen, né altri lo utilizzarono per produrre e studiare spettri. Il principio del reticolo di diffrazione fu riscoperto nel 1821 da Fraunhofer che stabilì le basi della diffrazione dei raggi paralleli ed eseguì i primi studi con l'aiuto di uno spettroscopio a diffrazione (in particolare, scoprì righe scure nello spettro solare). Fraunhofer costruì reticoli di diffrazione aventi da 15 a 130 tratti per centimetro, facendo avvolgere un fil di ferro sottile su due viti parallele. Fino a poco tempo fa simili reticoli a fil di ferro venivano utilizzati per studiare la regione delle onde lunghe (infrarosse). Fraunhofer riuscì poi a costruire reticoli di migliore qualità incidendo tratti su uno strato d'oro depositato sulla superficie di un vetro e, infine incidendo i tratti direttamente sulla superficie del vetro stesso mediante una punta di diamante. I migliori reticoli di diffrazione sono stati preparati con quest'ultimo metodo. Il migliore reticolo aveva una larghezza di 12 mm circa ed un periodo uguale a $3 \cdot 10^{-3}$ mm (3300 tratti per centimetro).

Dopo Fraunhofer molti tecnici si dedicarono alla fabbricazione di reticoli di diffrazione. Occorre citare L.M. Rutherford, astronomo dilettante, che nel 1880 costruì numerosi reticoli di diffrazione i quali superavano notevolmente tutti i reticoli conosciuti a quell'epoca. Rutherford introdusse nella pratica i reticoli a riflessione incidendo, per mezzo di una macchina a dividere, dei tratti su una superficie metallica speculare. I metalli sono meno duri del vetro e perciò logorano meno la punta di diamante che, restando identica a sé stessa, produce reticoli di migliore qualità.

Ma i perfezionamenti più importanti nella fabbricazione dei reticoli furono apportati da Rowland (1848-1901). Rowland perferzionò il procedimento di fabbricazione delle viti per le macchine a dividere e fu il primo a fabbricare reticoli a riflessione concavi che assumono simultaneamente le funzioni di reticolo e di lente convergente. I reticoli di Rowland hanno fino a 8000 tratti per centimetro su una larghezza fino a 10 cm e sono di eccellente qualità. La loro utilizzazione permise di realizzáre importantissimi studi spettroscopici alla fine del XIX ed agli inizi del XX secolo.

Le macchine di Rowland furono perfezionate più tardi da Anderson e Wood che, dopo la morte di Rowland, lo sostituirono alla direzione del suo laboratorio. Questo laboratorio fino ad oggi produce i migliori reticoli di diffrazione che hanno fino a 12000 tratti per centimetro. Questi reticoli incisi sono usati come matrici per la fabbricazione di copie a buon mercato in materie plastiche. In URSS vengono fabbricati reticoli e repliche di buona qualità i cui parametri sono stati indicati sopra.

§ 48. *Reticolo a gradinata di Michelson e strumenti spettrali interferenziali*

1. Il reticolo di diffrazione, come è stato già indicato, è un apparecchio spettrale in cui si realizza un'interferenza a raggi multipli di fasci luminosi identici, in cui ogni fascio è spostato in fase rispetto a quello precedente di una quantità costante. A tutti gli apparecchi basati su questo principio sono applicabili i risultati esposti nei paragrafi precedenti. In particolare, il loro potere risolutivo spettrale è espresso dalla formula $\lambda/\delta\lambda = Nm$, cioè è uguale alla *differenza di cammino tra i raggi estremi misurata in lunghezze d'onda*. L'alto potere risolutivo si ottiene sia mediante l'aumento del numero di fasci che interferiscono, sia mediante l'aumento dell'ordine d'interferenza m. Nei reticoli di diffrazione il numero di fasci interferenti è molto grande (fino a 200 000 e più), mentre l'ordine d'interferenza m è piccolo (non superiore a 3). Al contrario, nei cosiddetti *apparecchi spettrali interferenziali* l'ordine d'interferenza m è molto elevato (fino a 10^5 e più) ed il numero di fasci è relativamente piccolo (20-40). A questo tipo di apparecchi appartiene il *reticolo a gradinata di Michelson*.

2. Il reticolo a gradinata di Michelson è composto da parecchie lastre (30-40) fabbricate con un vetro molto omogeneo il cui spessore h è uguale a
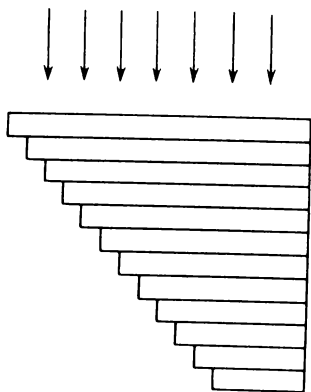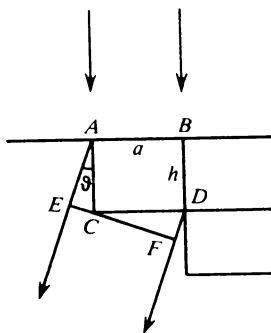
Fig. 194 Fig. 195

1-3 cm. Lo spessore di tutte le lastre deve essere lo stesso a meno di un centesimo di lunghezza d'onda, perciò vengono tagliate da una stessa lamina a facce piane e parallele il cui spessore è controllato mediante metodi interferenziali. Le lastre sono messe insieme nella forma di una scala a gradini (fig. 194). La larghezza a di un gradino deve'essere la stessa su tutta l'estensione della « scala ». L'insieme si comporta come un blocco di vetro

omogeneo la cui superficie a gradini agisce come un reticolo di diffrazione. Supponiamo che sul reticolo cada normalmente un fascio di raggi paralleli. La differenza di cammino tra le onde secondarie di Huygens, emesse sotto un angolo ϑ da gradini vicini, che arrivano nello stesso punto della figura di diffrazione di Fraunhofer, è $(BDF) - AE = nh + a\sin\vartheta - h\cos\vartheta$ (fig. 195). Le posizioni dei massimi principali sono definite dalla condizione

$$nh + a\sin\vartheta - h\cos\vartheta = m\lambda, \tag{48.1}$$

dove m è un numero intero.

Derivando la (48.1), troviamo la dispersione angolare

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{a\cos\vartheta + h\sin\vartheta}, \tag{48.2}$$

da cui, essendo piccolo l'angolo ϑ, $d\vartheta/d\lambda = m/a$, ossia

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{h(n-1)}{a\lambda}. \tag{48.3}$$

Dato che $h \sim a$, la dispersione angolare del reticolo a gradinata è relativamente grande e quindi per piccole variazioni di λ si ottengono notevoli variazioni dell'angolo di diffrazione ϑ.

Il dominio di dispersione del reticolo a gradinata è definito dall'espressione

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{h(n-1)}. \tag{48.4}$$

Questo dominio è molto piccolo ed in questo risiede il principale difetto del reticolo a gradinata. Per esempio, per $h = 1$ cm, $n = 1{,}5$, $\lambda = 600$ nm si ottiene $\Delta\lambda \approx 0{,}07$ nm, valore circa 10 volte inferiore alla distanza tra le componenti della riga D gialla del sodio.

Il potere risolutivo è dato dalla formula

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm = \frac{Nh(n-1)}{\lambda}, \tag{48.5}$$

dove N è il numero di lastre. Per $N = 40$ con i parametri dell'esempio precedente si ottiene $\lambda/\delta\lambda \approx 3{,}3 \cdot 10^5$. Con un reticolo a tratti nello spettro del primo ordine, tale potere risolutivo si potrebbe realizzare se il numero di tratti fosse uguale a 300 000.

Precisiamo la formula (48.5), tenendo conto della dispersione dell'indice di rifrazione del vetro. Supponiamo che per un angolo di diffrazione ϑ si ottenga un massimo di diffrazione di ordine m per la lunghezza d'onda $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$. Si ottiene allora

$$hn' + a\sin\vartheta - h\cos\vartheta = m\lambda' = m(\lambda + \delta\lambda),$$

dove n' è l'indice di rifrazione del vetro per la stessa lunghezza d'onda. Secondo Rayleigh $\delta\lambda$ sarà uguale alla distanza spettrale risolvibile se per la lunghezza d'onda λ nella stessa direzione si ottiene il primo minimo di diffrazione, cioè

$$hn + a \sin \vartheta - h \cos \vartheta = m\lambda + \lambda/N.$$

Sottraendo quest'espressione dalla precedente, otteniamo

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = N\left(m - h\frac{dn}{d\lambda}\right), \tag{48.6}$$

o, sostituendo $m = h(n - 1)/\lambda$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{Nh}{\lambda}\left[(n - 1) - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right]. \tag{48.7}$$

Poiché nella regione trasparente dello spettro $dn/d\lambda < 0$ (dispersione normale), la dispersione dell'indice di rifrazione fa alzare il potere risolutivo del reticolo a gradinata.

Ragionando in modo analogo, è facile stabilire le seguenti espressioni per l'estensione del dominio di dispersione e per la dispersione angolare:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m - h(dn/d\lambda)}, \tag{48.8}$$

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m - h(dn/d\lambda)}{a \cos \vartheta + h \sin \vartheta}. \tag{48.9}$$

La dispersione dell'indice di rifrazione aumenta la dispersione angolare del reticolo a gradinata ma diminuisce l'estensione del suo dominio di dispersione.

L'intensità della luce, nella figura di diffrazione, è evidentemente data dalla formula generale (46.2), dove $I_1(\vartheta)$ indica l'intensità che si otterrebbe se la diffrazione fosse assicurata da un solo gradino di larghezza a. La funzione $I_1(\vartheta)$ è la stessa che nel caso di diffrazione da una fenditura. Perciò tutta la luce diffratta è praticamente concentrata nell'intervallo degli angoli ϑ compresi tra $\vartheta_1 = -\lambda/a$ e $\vartheta_2 = +\lambda/a$. Una intensità notevole è concentrata solo nei massimi principali che appartengono a questo intervallo. Essendo l'angolo ϑ piccolo, si può trascurare il suo quadrato, rappresentando la formula (48.1) nella forma $(n - 1)h + a\vartheta = m\lambda$, o

$$\vartheta = \frac{m\lambda - (n - 1)h}{a}. \tag{48.10}$$

Supponiamo che l'indice di rifrazione sia tale che per un m determinato il numeratore in questa formula s'annulli. L'intervallo considerato conterrà allora soltanto tre massimi principali i cui ordini sono rispettivamente

$(m - 1), m, (m + 1)$. I massimi estremi si trovano ai limiti dell'intervallo e le loro intensità sono nulle. Perciò la luce diffratta sarà concentrata soltanto nello spettro di ordine m. Se, invece, il numeratore della formula (48.10) non è nullo, si vedranno gli spettri dei due ordini vicini le cui intensità sono generalmente diverse. Le loro intensità saranno uguali quando il numeratore della formula (48.10) sarà uguale in valore assoluto a $\lambda/2$. Sono quindi possibili posizioni del reticolo a gradinata tali che nell'una esiste un solo massimo di diffrazione e nell'altra si trovano due massimi simmetrici con la stessa intensità. Per passare da una posizione all'altra il reticolo è generalmente posto in una camera ermetica dove variano la pressione e con essa anche l'indice di rifrazione n relativo fino a che non saranno ottenute condizioni di lavoro convenienti.

A Michelson appartiene l'idea di utilizzare il reticolo a gradinata come reticolo a riflessione. Questo reticolo è stato costruito nel 1933 da Williams con lastre di quarzo. Le lastre di quarzo pulite con gran cura vengono poste in contatto ottico le une con le altre e riscaldate fino ad una temperatura notevolmente inferiore alla temperatura di fusione del quarzo. Nel corso di questo trattamento le lastre aderiscono l'una all'altra in modo tanto solido che dopo il raffreddamento si possono separare soltanto applicando uno sforzo notevole. I gradini riflettenti del reticolo a gradinata vengono ricoperti d'alluminio mediante il procedimento di polverizzazione sotto vuoto.

3. Nel reticolo a gradinata di Michelson i fasci interferenti sono prodotti dalla diffrazione sui gradini. Negli spettroscopi puramente interferenziali, l'interferometro di Fabry-Pérot e la lastra di Lummer-Gehrcke, i fasci interferenti si formano in conseguenza delle riflessioni della luce. Questi apparecchi sono stati già descritti nel § 36. Lo spettro di un ordine dato ottenuto in questi apparecchi non è altro che una frangia d'interferenza di uguale inclinazione. Il dominio di dispersione è definito dalla formula generale (47.2). Per l'interferometro di Fabry-Pérot l'ordine m dello spettro può essere calcolato mediante la formula $m = 2h/\lambda$, dove h è la distanza tra le superfici riflettenti dell'interferometro. Nel caso della lastra di Lummer-Gehrcke m può essere calcolato con la formula (36.7), sostituendo in essa ψ con l'angolo limite di riflessione totale

$$m = \frac{2h\sqrt{n^2 - 1}}{\lambda}. \tag{48.11}$$

Diamo qualche indicazione relativa al potere risolutivo degli apparecchi di Fabry-Pérot e di Lummer-Gehrcke. In questi apparecchi interferiscono fasci le cui intensità decrescono lentamente con il crescere del numero del fascio. Se il numero di fasci fosse infinito, come si supponeva nel § 36, lo spettro conterrebbe soltanto massimi principali (si veda la fig. 141) senza alcun massimo o minimo supplementare [1]. In questo caso il criterio di riso-

[1] In realtà questi massimi e minimi sono presenti il che è dovuto al numero limitato di fasci che interferiscono.

luzione spettrale di Rayleigh cessa di essere valido e perciò nel § 36 è stato definito un altro criterio. Per l'interferometro di Fabry-Pérot questo criterio conduce alla formula (36.5) che ha la stessa forma della formula (47.3). Il numero N di fasci interferenti è dato dalla quantità $N = 2\pi\sqrt{R}/(1 - R)$ che è praticamente uguale a $2\pi/(1 - R)$. Infatti è naturale aspettarsi intuitivamente che la diminuzione d'intensità sia equivalente ad una limitazione del numero di fasci attivi senza tener conto del loro indebolimento. Il numero di questi fasci attivi è evidentemente proporzionale a $1/(1 - R)$.

Quanto alla lastra di Lummer-Gehrcke, per calcolare il suo potere risolutivo è necessario introdurre nella formula (36.5) una correzione tenendo conto sia della dipendenza dell'indice di rifrazione n del vetro dalla lunghezza d'onda λ, che del numero finito di fasci interferenti. Perciò ripeteremo la dimostrazione della formula (36.5) tenendo conto di questa circostanza, considerando prima un numero di fasci interferenti infinito. Conservando le notazioni della dimostrazione precedente, scriviamo come prima $\delta\Phi = (1 - R)/\sqrt{R}$, ed inoltre nel massimo di ordine m, $\Phi = 2\pi m$, mentre in tutti gli altri punti $\Phi = (4\pi dn \cos\psi)/\lambda$. Ma ora le grandezze n e ψ hanno diversi valori per λ e λ'. Poiché l'angolo d'incidenza è lo stesso (dato che la luce incidente si trova fuori della lastra) $n \sin\psi = n' \sin\psi' =$ $= \sin\varphi$. Dunque, deve essere

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi} = \frac{\delta n}{n} - \frac{\sin\psi\,\delta\psi}{\cos\psi} - \frac{\delta\lambda}{\lambda}$$

a condizione che

$$\frac{\delta n}{n} + \frac{\cos\psi}{\sin\psi}\,\delta\psi = 0.$$

Eliminando $\delta\psi$ otteniamo

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi} = \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\delta n}{n} - \frac{\delta\lambda}{\lambda}.$$

Sostituiamo qui i valori di $\delta\Phi$, $\Phi = 2m\pi$, e $\delta n = (dn/d\lambda)\delta\lambda$. Si ha allora

$$\left|\frac{\lambda}{\delta\lambda}\right| = \frac{2\pi\sqrt{R}m}{1 - R}\left(1 - \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right). \tag{48.12}$$

Questa formula è stata ricavata per un numero infinito di fasci che interferiscono. Essa sarebbe applicabile all'interferometro di Fabry-Pérot se in esso lo spazio tra gli specchi riflettenti fosse riempito con un mezzo omogeneo il cui indice di rifrazione fosse differente dall'unità (per un tale interferometro si potrebbe porre $\cos\varphi = 1$). Per la lastra di Lummer-Gehrcke la formula è inapplicabile a causa di un numero limitato di fasci interferenti. In questo caso, come è evidente da quanto esposto sopra, la formula

(48.12) deve essere sostituita con la seguente formula:

$$\left|\frac{\lambda}{\delta\lambda}\right| = Nm\left(1 - \frac{1}{\cos^2\psi}\,\frac{\lambda}{n}\,\frac{dn}{d\lambda}\right). \tag{48.13}$$

Dopo aver sostituito i valori di N, m e $\cos\psi$, si ottiene

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = L\left(\frac{n^2 - 1}{\lambda} - n\,\frac{dn}{d\lambda}\right). \tag{48.14}$$

Analogamente, per il dominio di dispersione si ha

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2h\sqrt{n^2 - 1}\left(1 - \dfrac{\lambda n}{n^2 - 1}\,\dfrac{dn}{d\lambda}\right)}. \tag{48.15}$$

A causa della dispersione dell'indice di rifrazione del vetro, il potere risolutivo della lastra di Lummer-Gehrcke aumenta ed il dominio di dispersione diminuisce.

§ 49. *Potere risolutivo di un prisma*

1. L'azione del prisma usato come strumento spettrale è basata sulla dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda. Per determinare il potere risolutivo di un prisma è necessario tener conto della diffrazione della luce sui bordi del diaframma o del prisma stesso, che limitano la larghezza del fascio incidente. Supponiamo che sul prisma cada un fascio monocromatico di raggi paralleli delimitato dal diaframma AA' (fig. 196).
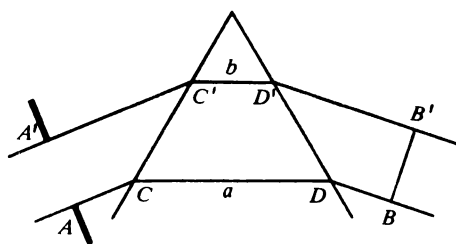
Fig. 196

Ammettiamo che il fronte d'onda dell'onda incidente coincida con il piano del diaframma AA'. Prendiamo dietro il prisma un fronte d'onda BB' arbitrario. Per definizione di fronte d'onda le lunghezze ottiche $(ACDB)$ e $(A'C'D'B')$ sono uguali

$$AC + na + DB = A'C' + nb + D'B', \tag{49.1}$$

dove a e b sono le lunghezze geometriche dei segmenti CD e $C'D'$ percorse dalla luce all'interno del prisma.

Se spostiamo in modo infinitesimale i punti B e B' lungo il piano BB' e li congiungiamo ad A ed A' con raggi virtuali infinitamente vicini a quelli reali, in virtù del principio di Fermat l'uguaglianza (49.1) è ancora verificata a meno di termini di ordine superiore rispetto a questi spostamenti laterali. Ciò conduce alla seguente regola di costruzione di un fronte d'onda. È necessario tracciare, dai punti di un fronte d'onda iniziale raggi, reali o virtuali, infinitamente vicini ai raggi reali e prendere su questi raggi segmenti di uguale lunghezza ottica. Il luogo geometrico degli estremi di questi segmenti definisce la nuova posizione del fronte d'onda. Nel caso in cui il fronte d'onda sia piano, è sufficiente costruire i raggi estremi $ACDB$ e $A'C'D'B'$. Per costruire fronti d'onda le cui direzioni differiscono infinitamente poco si possono utilizzare gli stessi cammini ottici, benché i cammini ottici reali siano differenti. La stessa costruzione si applica anche per fasci luminosi le cui lunghezze d'onda differiscono infinitamente poco. Questo verrà utilizzato nel seguito per semplificare i calcoli.

Teniamo conto della diffrazione della luce sui bordi del diaframma AA' e determiniamo, dietro al prisma, le direzioni lungo le quali si trovano il massimo di diffrazione di ordine zero ed i minimi di diffrazione. Tracciamo i raggi marginali $ACDB$ e $A'C'D'B'$ che possono essere reali o virtuali, infinitamente vicini ai raggi reali, ed intersechiamoli con un piano arbitrario BB'. (Il piano BB' non è necessariamente perpendicolare ai raggi luminosi.) Se la differenza tra le lunghezze ottiche $(ACDB)$ e $(A'C'D'B')$ è nulla, il piano BB' è un fronte d'onda. La normale a questo piano è la direzione verso il massimo principale, cioè verso il massimo di ordine zero. Se, invece, queste lunghezze ottiche differiscono di un multiplo intero della lunghezza d'onda, la normale al piano BB', come nel caso della diffrazione su una fenditura, è diretta verso il minimo di diffrazione del corrispondente ordine. In particolare, se le lunghezze ottiche differiscono di λ, il minimo è del primo ordine.

2. Ora è facile dedurre la formula del potere risolutivo di un prisma. Supponiamo che sul diaframma cada un fascio di raggi paralleli di lunghezze d'onda λ e λ'. Sia il piano BB' il fronte d'onda corrispondente alla lunghezza d'onda λ'. La normale a BB' definisce la direzione verso il massimo di ordine zero per la lunghezza d'onda λ'. Supponiamo inoltre che la stessa direzione sia la direzione verso il minimo di diffrazione del primo ordine per la lunghezza d'onda λ. Secondo il criterio di Rayleigh la differenza $\delta\lambda = \lambda' - \lambda$ è la più piccola distanza che può essere separata dal prisma. In base a quanto detto sopra si ha

$$AC + n(\lambda')a + DB = A'C' + n(\lambda')b + D'B',$$
$$AC + n(\lambda)a + DB = A'C' + n(\lambda)b + D'B' + \lambda.$$

Sottraendo membro a membro, otteniamo

$$(a - b)[n(\lambda') - n(\lambda)] = -\lambda,$$

ossia

$$(a - b)\frac{dn}{d\lambda}\,\delta\lambda = -\lambda.$$

Otteniamo di qui il potere risolutivo di un prisma

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = -(a - b)\frac{dn}{d\lambda}. \tag{49.2}$$

Dalla dimostrazione è evidente che λ indica la lunghezza d'onda nel vuoto. Si suppone che la dispersione del vetro sia normale cioè $dn/d\lambda < 0$.

Il potere risolutivo di un prisma dipende solo dalla dispersione dell'indice di rifrazione $dn/d\lambda$ e dalla differenza di cammino a e b dei raggi marginali nel prisma. Perciò per utilizzare completamente il potere risolutivo è necessario che il fascio incidente copra tutta la faccia laterale del prisma usato. In questo caso $b = 0$ ed a è la lunghezza della base del prisma. Per esempio, per un prisma in flint pesante, nella regione gialla dello spettro si ha $dn/d\lambda \approx -956\ \text{cm}^{-1}$. Il potere risolutivo del prisma per $a = 1$ cm in questa regione spettrale risulta uguale a $\lambda/\delta\lambda \approx 956$. Quest'è il valore minimo del potere risolutivo per il quale si separa la riga doppia del sodio ($\lambda =$ $= 589{,}0$ nm, $\lambda' = 589{,}6$ nm).

Per un prisma composto di parecchi prismi semplici messi l'uno dopo l'altro, la formula (49.2) deve essere sostituita con la formula

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = -\sum_i (a_i - b_i)\frac{dn_i}{d\lambda}, \tag{49.3}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i prismi semplici.

3. Ogni prisma può essere considerato come il caso limite del reticolo a gradinata di Michelson (figg. 194 e 195). Supponiamo che la larghezza e l'altezza di un gradino del reticolo tendano a zero, mentre il numero totale di gradini tende all'infinito. In questo caso spariranno successivamente gli spettri di ordini superiori, fino a che non resterà il solo spettro di ordine zero. A partire da quest'istante il reticolo a gradinata agirà come un prisma. Per $m = 0$ la formula (48.6) si trasforma nella formula (49.2), essendo Nh la lunghezza di base del prisma. Per il dominio di dispersione la formula (48.8) dà in questo caso $\Delta\lambda = \infty$. Ciò era prevedibile perché tutta la luce uscente dal prisma è concentrata nello spettro di ordine zero, e quindi non sorge la questione della sovrapposizione di spettri di ordini diversi.

Problemi

1. Quale dev'essere il potere risolutivo di un apparecchio spettrale per poter risolvere il doppietto della riga D del sodio ($\lambda_1 = 589{,}0$ nm, $\lambda_2 = 589{,}6$ nm)? Calcolare il numero minimo di tratti di un reticolo il quale può risolvere questo doppietto nello spettro di ordine uno. Quale dev'essere la lunghezza minima della base a di un prisma di vetro, avente dispersione $dn/d\lambda = -956\ \text{cm}^{-1}$, che permette di ottenere lo stesso risultato?

Risposta. 1) $\lambda/\delta\lambda > 1000$; 2) $N \sim 1000$; 3) $a \approx 1$ cm.

2. Dire se il potere risolutivo di un reticolo varia con il variare dell'inclinazione del fascio incidente primario.

Risposta. Il potere risolutivo non cambia.

3. Dire se il potere risolutivo ed il dominio di dispersione di un reticolo, fissato il cannocchiale con cui si osservano gli spettri, varia allorché si coprono tutti i tratti pari o dispari del reticolo.

Risposta. Il potere risolutivo non cambia. L'estensione del dominio di dispersione si dimezza.

4. Su un reticolo a riflessione piano contenente $N = 50\,000$ tratti cade normalmente la luce del doppietto del sodio ($\lambda_1 = 589{,}0$ nm, $\lambda_2 = 589{,}6$ nm). Il numero di tratti per centimetro di lunghezza è uguale a $n = 5000$. Dire quale è il più grande ordine m di spettro che questo reticolo permette di ottenere e quale è la più piccola distanza $\delta\lambda$ tra le righe spettrali che può essere risolta con questo reticolo nella regione di spettro considerata. Lo spettro di ordine massimo è fotografato su una lastra mediante un obiettivo a distanza focale $f = 50$ cm. Quale sarà la distanza Δx tra le righe spettrali λ_1 e λ_2 sulla lastra fotografica?

Risposta. $m = 3$; $\delta\lambda = \dfrac{\lambda}{Nm} = 0{,}004$ nm; $\Delta x = \dfrac{fm\delta\lambda}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}} = 1$ mm.

5. Come variano il potere risolutivo ed il dominio di dispersione di una lastra di Lummer-Gehrcke se 1) il suo spessore è raddoppiato e la lunghezza resta la stessa; 2) la sua lunghezza è raddoppiata e lo spessore resta invariato?

Risposta. 1) Il potere risolutivo non cambia e l'estensione del dominio di dispersione si dimezza. 2) Il potere risolutivo raddoppia e l'estensione del dominio di dispersione resta invariata.

6. Quale lunghezza minima deve avere una lastra di Lummer-Gehrcke ($n = 1{,}5$) per poter risolvere le righe del doppietto H_α dell'idrogeno ($\lambda = 656{,}3$ nm)? La differenza di lunghezza d'onda del doppietto è uguale a 0,014 nm. Trascurare $dn/d\lambda$.

Risposta. $L = \dfrac{\lambda^2}{(n^2 - 1)\delta\lambda} = 2{,}5$ cm.

7. Quale figura d'interferenza si osserva, se illuminiamo con luce monocromatica due lastre di Lummer-Gehrcke incrociate, cioè due lastre sovrapposte che formano tra loro un angolo di 90°?

Risposta. Si osserverà un sistema di macchie luminose disposte nei nodi di un reticolo rettangolare.

8. Quale dev'essere la lunghezza a della base di un prisma di vetro perché quest'ultimo abbia lo stesso potere risolutivo di una lastra di Lummer-Gehrcke di lunghezza $L = 20$ cm? L'indice di rifrazione della lastra è $n = 1{,}5$. La dispersione dell'indice di rifrazione del prisma $dn_{pr}/d\lambda = -956\ \text{cm}^{-1}$; $\lambda = 600$ nm.

Risposta. $a = -\dfrac{L(n - 1)}{\lambda dn_{pr}/d\lambda} = 1{,}75$ m.

9. Un reticolo a gradinata di Michelson è composto di $N = 30$ lastre di vetro d'indice di rifrazione $n = 1{,}5$; lo spessore di ogni lastra è $h = 1$ cm. Quale dev'essere la lunghezza a della base di un prisma di vetro perché quest'ultimo abbia lo stesso potere risolutivo del reticolo a gradinata di Michelson? La dispersione dell'indice di rifrazione del prisma è $dn_{pr}/d\lambda = 956\ \text{cm}^{-1}$; $\lambda = 600$ nm.

Risposta. $a = \dfrac{Nh(n-1)}{\lambda dn_{pr}/d\lambda} = 2{,}6$ m.

10. Un prisma di vetro con la base $a = 10$ cm è fabbricato in flint pesante la cui dispersione nelle vicinanze di $\lambda = 600$ nm è uguale a $dn/d\lambda = 1000\ \mathrm{cm}^{-1}$. Quale potere risolutivo massimo può avere un reticolo di diffrazione, la cui parte tratteggiata è uguale alla lunghezza a della base del prisma? Confrontare il potere risolutivo di un tale reticolo con quello del prisma considerato.

Soluzione. Dalla formula del reticolo $d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda$ segue $m\lambda \leqslant 2d$. Moltiplicando per $N = a/d$, otteniamo il potere risolutivo massimo del reticolo

$$R_{ret} = Nm = 2a/\lambda = 3\cdot 10^5 \quad \text{e} \quad \frac{R_{ret}}{R_{pr}} = \frac{2/\lambda}{dn/d\lambda} = 33.$$

Quest'esempio mostra che, a parità di dimensioni geometriche, il potere risolutivo di un reticolo è in generale molto più grande di quello di un prisma.

11. Stimare la larghezza che deve avere la fenditura di un collimatore per la quale è praticamente utilizzato tutto il potere risolutivo teorico di un prisma.

Soluzione. Il potere risolutivo limite di un prisma è dato dalla formula (49.2) ove si pone $b = 0$. Supponiamo che sul prisma cada un'onda piana contenente le lunghezze d'onda λ e λ',
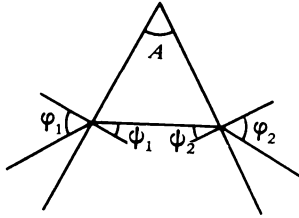
Fig. 197

la cui distanza $\delta\lambda$ sia uguale alla distanza minima risolta. La differenza degli indici di rifrazione corrispondente a queste lunghezze d'onda è $\delta n = (dn/d\lambda)\delta\lambda$. Sostituendo qui $\delta\lambda = \lambda\Big/\left(a\dfrac{dn}{d\lambda}\right)$, otteniamo $\delta n = \lambda/a$. Uscendo dal prisma il fascio inizialmente parallelo diventa divergente a causa della dispersione della luce. Calcoliamo l'angolo di divergenza del fascio uscente. Come si vede dalla figura 197, $\sin\varphi_1 = n\sin\psi_1$. Derivando con $\varphi_1 =$ costante, otteniamo $\delta n \sin\psi_1 + n\cos\psi_1\cdot\delta\psi_1 = 0$. Essendo $\psi_1 + \psi_2 = A =$ costante e quindi $\delta\psi_1 + \delta\psi_2 = 0$, si ha $\delta n\sin\psi_1 = n\cos\psi_1\cdot\delta\psi_2$. Dalla legge di rifrazione $\sin\varphi_2 = n\sin\psi_2$; l'angolo di divergenza del fascio è

$$\delta\varphi_2 = \frac{\sin\psi_2}{\cos\varphi_2}\delta n + \frac{n\cos\psi_2}{\cos\varphi_2}\delta\psi_2 = \left(\frac{\sin\psi_2}{\cos\varphi_2} + \frac{n\cos\psi_2}{\cos\varphi_2}\,\frac{\sin\psi_1}{n\cos\psi_1}\right)\delta n.$$

Il prisma deve essere in posizione di deviazione minima, da cui $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$,

$$\delta\varphi_2 = 2\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\delta n = 2\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\,\frac{\lambda}{a}.$$

Se h è la larghezza della fenditura ed f la distanza focale del collimatore, la larghezza angolare della fenditura è $\alpha = h/f$. Per poter utilizzare completamente il potere risolutivo del prisma l'angolo α deve essere piccolo rispetto a $\delta\varphi_2$. In pratica è sufficiente che l'angolo α sia inferio-

re alla metà dell'angolo $\delta\varphi_2$. Questo dà

$$h < \frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\frac{f\lambda}{a}. \tag{49.4}$$

Essendo $\psi = A/2$, si ha

$$h < \frac{\sin(A/2)}{\sqrt{1 - n^2\sin^2(A/2)}}\cdot\frac{f\lambda}{a}. \tag{49.5}$$

Per $a = 10$ cm, $A = 60°$, $n = 1{,}73$, $f = 25$ cm, $\lambda = 500$ nm, quest'ultima formula dà $h <$ $< 1{,}2\cdot 10^{-3}$ mm.

§ 50. *Azione esercitata da un apparecchio spettrale sugli impulsi luminosi*

1. Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato l'apparecchio spettrale come un *analizzatore* che separa spazialmente onde monocromatiche che sono già presenti (secondo il teorema di Fourier) nella perturbazione luminosa che attraversa l'apparecchio. Ma un apparecchio spettrale può anche essere considerato come un *generatore* il quale sotto l'azione di perturbazioni non periodiche (impulsi) produce perturbazioni periodiche e le separa

Fig. 198 Fig. 199

spazialmente. Per illustrare quest'approccio consideriamo il comportamento di un reticolo di diffrazione.

Supponiamo che il reticolo sia composto da un numero infinito di fenditure equidistanti praticate in uno schermo opaco. Facciamo cadere su questo reticolo sotto incidenza normale una perturbazione piana non periodica la cui forma non importa per le considerazioni che seguono. Per concretizzare, la rappresentiamo con un impulso rettangolare infinitamente breve (fig. 198). Dopo aver raggiunto all'istante t_0 il reticolo l'impulso ecciterà onde secondarie cilindriche emesse dalle fenditure del reticolo. Al posto dell'impulso unico, dietro il reticolo apparirà un numero infinito di impulsi successivi spazialmente separati a fronti d'onda cilindrici (fig. 199). Le sezioni dei fronti d'onda con il piano della figura in un istante dato t sono circonferenze di ugual raggio $c(t - t_0)$ aventi come centro le fenditure del reticolo (fig. 200). A grandi distanze dal reticolo piccole porzioni dei fronti d'onda possono essere considerate come piani che si succe-

dono l'uno all'altro ad intervalli di tempo uguali

$$\tau = \frac{d \sin \vartheta}{c}. \tag{50.1}$$

A queste distanze la perturbazione può essere rappresentata da una funzione periodica $E(t)$, il cui periodo τ dipende dall'angolo ϑ, cioè dalla direzione di propagazione della radiazione. Partendo da un impulso non periodico, il reticolo crea perturbazioni periodiche di periodi diversi e spazialmente separate, eccezion fatta per gli impulsi che si propagano dietro il reticolo ad un angolo $\vartheta = 0$. In questo caso non c'è scomposizione. Queste perturbazioni periodiche in generale non sono sinusoidali, ma come tutte le funzioni periodiche possono essere sviluppate in serie di Fourier di periodo
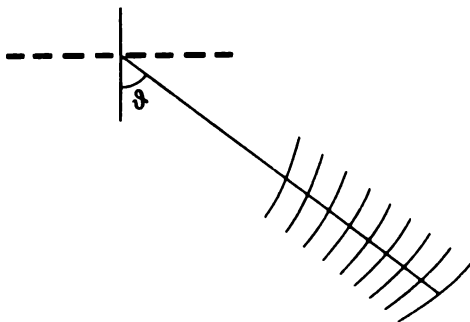
Fig. 200

fondamentale τ. Non è necessario effettuare questo sviluppo per comprendere il principio d'azione del reticolo, ma è conveniente farlo quando i ricevitori della radiazione dello spettroscopio o dello spettrografo sono selettivi, come ad esempio l'occhio o la lastra fotografica. Questi ricevitori agiscono come un insieme di oscillatori armonici aventi frequenze proprie diverse.

La serie di Fourier nella quale può essere sviluppata la perturbazione periodica $E(t)$ contiene generalmente un'onda monocromatica di periodo fondamentale τ ed armoniche di periodi $\tau/2$, $\tau/3$, ... Il ricevitore non può captare tutte queste armoniche. Nel caso più semplice una sola di queste armoniche, per esempio quella di periodo τ/m, agisce sul ricevitore. Indichiamo il suo periodo con T. Si avrà allora $T = \frac{\tau}{m} = \frac{d \sin \vartheta}{cm}$, da cui

$$d \sin \vartheta = m\lambda. \tag{50,2}$$

Questa è la formula fondamentale del reticolo di diffrazione. Ma possono esistere casi in cui lo sviluppo di Fourier contiene due e più armoniche agenti sul ricevitore. In questo caso si ha una sovrapposizione degli spettri

di diversi ordini. Questo è però possibile se la radiazione incidente copre un intervallo spettrale la cui larghezza è superiore all'estensione del dominio di dispersione del reticolo.

Consideriamo ora l'azione su un reticolo di un'onda monocromatica singola di periodo T. Le onde secondarie emesse, in questo caso, dalle fenditure del reticolo, così come la loro sovrapposizione, sono onde monocromatiche con lo stesso periodo T. Quindi, un'onda monocromatica dopo aver attraversato l'apparecchio spettrale resta monocromatica senza cambiare il suo periodo. Da questo risultato e dal principio di sovrapposizione, segue che *nello spettro ottenuto da un reticolo non possono apparire componenti monocromatiche aventi frequenze assenti nello spettro della radiazione incidente.* Se la regione spettrale occupata dalla radiazione incidente non è superiore all'estensione del dominio di dispersione, non avrà luogo nessuna sovrapposizione degli spettri di differenti ordini. Nel caso di un reticolo illimitato, nello spettro di ogni ordine ad ogni direzione dei raggi corrisponde una lunghezza d'onda rigorosamente determinata λ. Non avrà luogo nessuna sovrapposizione di frequenze differenti, il che significa che il potere risolutivo di un reticolo illimitato è infinitamente grande.

2. Supponiamo ora che la lunghezza L ed il numero N di tratti del reticolo siano finiti. In questo caso le perturbazioni periodiche prodotte dal reticolo saranno composte di N impulsi che si succedono l'uno all'altro a intervalli di tempo $\tau = (d \sin \vartheta)/c$. Il tempo

$$\Theta = N\tau = \frac{Nd \sin \vartheta}{c} = \frac{L \sin \vartheta}{c} \tag{50.3}$$

è approssimativamente uguale all'intervallo di tempo che esiste tra l'apparizione del primo e del N-esimo impulso. Esso si chiama *tempo di « sparpagliamento »* [1] *dell'impulso*, poiché dietro il reticolo al posto di un breve impulso singolo si ha un processo ondulatorio di durata Θ. Il tempo Θ è anche detto *tempo di stabilizzazione dell'apparecchio spettrale*, poiché dopo questo intervallo di tempo diventano attivi tutti gli N tratti del reticolo. La perturbazione ondulatoria nel punto d'osservazione può essere rappresentata nella forma

$$E(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_N(t),$$

dove i termini del secondo membro rappresentano gli impulsi inviati dai singoli tratti. Visto che questi impulsi sono in ritardo l'uno rispetto all'altro di τ e per il resto sono identici, si ha $f_2(t) = f_1(t - \tau)$, $f_3(t) = f_1(t - 2\tau)$, ecc. La perturbazione risultante può essere rappresentata nella forma

$$E(t) = f_1(t) + f_1(t - \tau) + \dots + f_1[t - (N - 1)\tau].$$

---

[1] Non esiste in italiano un termine specifico: si usa il vocabolo « sparpagliamento » per indicare la distribuzione dell'impulso iniziale in N parti (N.d.R.)

Sviluppiamola in integrale di Fourier

$$E(t) = \int_0^\infty A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{dove} \quad A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Sostituendo l'espressione per $E(t)$ e tenendo conto del fatto che $f_1(t - \tau) = f_1(t)$, otteniamo

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} [1 + e^{-i\omega\tau} + \dots + e^{-i\omega(N-1)\tau}] \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= F(\omega) \frac{\sin (N\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}, \qquad (50.4)$$

dove è stata introdotta la notazione

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} e^{-i(N-1)\omega\tau/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt.$$

La quantità $|F(\omega)|^2 d\omega$ rappresenta, a meno di un fattore costante, l'intensità dell'impulso incidente riferito all'intervallo di frequenze $(\omega, \omega + d\omega)$. Lo stesso significato ha la quantità $|A(\omega)|^2 d\omega$ per la radiazione uscente dal reticolo con un angolo ϑ. Ora la radiazione diffratta, che si propaga dal reticolo in una determinata direzione, è composta non da una sola onda monocromatica, come avviene con un reticolo illimitato, ma è ripartita con continuità sullo spettro delle frequenze. I massimi principali in questa ripartizione corrispondono alle frequenze per le quali il denominatore dell'espressione (50.4) s'annulla, cioè $\omega\tau/2 = m\pi$. Questo ci riporta alla relazione (50.2). I massimi principali mancano se $F(\omega) = 0$, cioè quando l'impulso incidente non contiene la radiazione di questa frequenza. Il più vicino minimo, nella ripartizione dell'intensità secondo le frequenze, corrisponde alla frequenza definita dalla condizione $N\omega\tau/2 = Nm\tau + \pi$, poiché per questa frequenza il numeratore della formula (50.4) s'annulla. La quantità

$$\delta\omega = \frac{2\pi}{N\tau} = \frac{2\pi}{\Theta} \qquad (50.5)$$

caratterizza l'ordine di larghezza della regione spettrale occupata dalle onde inviate dal reticolo in una stessa direzione. Per il suo contenuto la relazione (50.5) coincide evidentemente con il significato della formula (29.8) stabilita e dettagliatamente analizzata in precedenza.

Supponiamo ora che la perturbazione che arriva sul reticolo sia costituita da una sola sinusoide illimitata. Allora la frequenza ω della formula

(50.4) è fissa, ma siccome l'angolo ϑ è variabile, questa formula rappresenta la dipendenza dell'ampiezza della luce diffratta dall'angolo ϑ. Visto che $\omega\tau = (2\pi/\lambda)\, d \sin\vartheta$, questa dipendenza è espressa dalla formula

$$A(\vartheta) = F(\vartheta) \frac{\sin N \dfrac{\pi d \sin\vartheta}{\lambda}}{\sin \dfrac{\pi d \sin\vartheta}{\lambda}}, \tag{50.6}$$

identica alla (46.1), e perciò non sono necessari ulteriori ragionamenti. Osserviamo soltanto che il potere risolutivo R è legato al tempo di stabilizzazione Θ dalla relazione

$$R = \Theta/T. \tag{50.7}$$

3. Tutti gli apparecchi spettrali funzionano in accordo con queste condizioni. Questo è evidente per gli apparecchi spettrali interferenziali, ma non lo è per un prisma. Nel caso di un prisma il tempo di propagazione della luce da un fronte d'onda AB ad un altro fronte $A'B'$ è lo stesso per tutti i raggi (fig. 201). Ma si tratta della *fase dell'onda* e questo non implica che
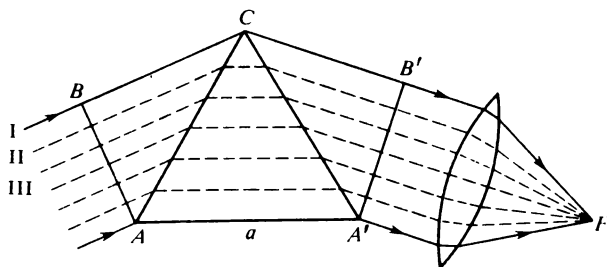
Fig. 201

l'impulso luminoso arriverà interamente nel punto d'osservazione (il che avrebbe luogo, se il materiale del prisma non presentasse dispersione), e non sarà diviso in una successione di impulsi identici. In un mezzo dispersivo gli impulsi inviati simultaneamente da diversi punti del fronte d'onda AB non arrivano simultaneamente nei corrispondenti punti del fronte d'onda $A'B'$. L'impulso s'allunga nel tempo e si può parlare di tempo di sparpagliamento Θ.

Il procedimento più semplice per studiare il funzionamento di un prisma consiste nel considerare il caso in cui l'impulso incidente sia un gruppo di onde che occupa una stretta regione di frequenze. Questo è sufficiente per analizzare la più importante questione, quella del potere risolutivo del prisma. Come è noto (si veda il § 8), quando un gruppo d'onde si propaga in un mezzo dispersivo esso si deforma continuamente, ristabilendo perio-

dicamente la sua forma dopo un tempo $\tau = d\lambda/dv$. Dividiamo il fascio incidente mediante piani equidistanti, paralleli ai raggi del fascio stesso, per formare dei fasci I, II, III, ... Facciamo questa divisione in modo che ogni fascio arrivi nel fuoco F con un ritardo τ rispetto all'arrivo del fascio precedente. Allora gli impulsi ondulatori legati ai fasci considerati, dopo esser usciti dal prisma avranno la stessa forma. Attraverso il fuoco F passeranno in successione impulsi luminosi identici che si susseguono l'uno all'altro a intervalli di tempo uguali a τ. Il prisma ha trasformato l'impulso incidente in una successione di impulsi equidistanti, cioè in una perturbazione periodica; il prisma ha assunto quindi la funzione di un apparecchio spettrale. Il tempo di sparpagliamento è evidentemente uguale a $\Theta = AA'/u - BCB'/c$. Per definizione di fronte d'onda $BCB'/c = AA'/v = a/v$. Qui v indica la velocità di fase ed u la velocità di gruppo della luce nel prisma. Quindi,

$$\Theta = a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) = a\,\frac{v - u}{uv},$$

o, in base alla formula (8.8)

$$\Theta = -a\,\frac{\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}}{v\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)} = -\frac{a}{v}\,\frac{\lambda\,dn}{d(n\lambda)}. \tag{50.8}$$

Dividendo quest'espressione per T, troviamo il potere risolutivo del prisma

$$R = -a\,\frac{dn}{d(n\lambda)}. \tag{50.9}$$

Qui λ è la lunghezza d'onda nel prisma, mentre nella formula (49.2) la stessa lettera denota la lunghezza d'onda nel vuoto. Indicando quest'ultima con λ_0, otteniamo

$$R = -a\,\frac{dn}{d\lambda_0}, \tag{50.10}$$

che per il suo contenuto equivale alla formula (49.2). Dal punto di vista esposto è particolarmente chiara l'azione di un sistema di prismi in contatto il cui potere risolutivo è espresso dalla formula (49.3).

§ 51. *Reticolo di Rowland*

1. La luce che è stata diffratta da un reticolo piano ordinario a tratti equidistanti deve essere inviata su una lente o su un altro strumento focalizzante per ottenere nel suo piano focale un sistema di righe spettrali nette.

Ma si può anche fare a meno della lente se i tratti sulla superficie piana sono tracciati in modo non uniforme, aumentando o diminuendo gli intervalli tra i tratti in modo monotono. Si può anche dare alla superficie del reticolo una forma sferica concava e tracciare su questa superficie tratti equidistanti, ottenendo lo stesso risultato.

L'azione focalizzante di molti reticoli era stata notata già da tempo, ma prima delle ricerche di Rowland quest'effetto era considerato come un difetto del reticolo. Rowland riuscì a trasformarlo in un vantaggio costruendo *reticoli a riflessione concavi.* Insieme con l'interferometro di Fabry-Pérot, questi reticoli sono finora gli apparecchi spettrali più largamente utilizzati nelle ricerche spettroscopiche di alta precisione. Le righe spettrali prodotte mediante i reticoli a riflessione concavi sono molto più nette di quelle fornite da reticoli nei quali la focalizzazione è realizzata per mezzo di lenti.

2. Sia G_0G (fig. 202) una superficie sferica riflettente di raggio ρ con centro C, sulla quale sono tracciati dei tratti mediante piani equidistanti
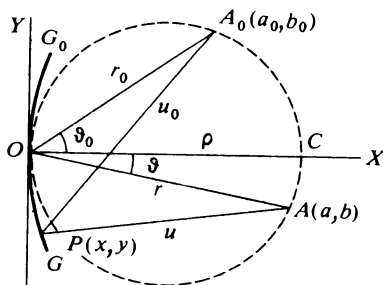
Fig. 202

perpendicolari al piano della figura e paralleli al diametro OC; sia d la distanza tra questi piani (passo del reticolo). Mettiamo la sorgente di luce nel punto A_0 e cerchiamo di determinare in quali condizioni lo spettro di ordine m può essere focalizzato in un punto dato A del piano A_0OC. Nello studio ci limitiamo a considerare raggi contenuti nello stesso piano, prendendolo come piano coordinato XY. L'origine delle coordinate viene posta nel centro O del reticolo e dirigiamo l'asse X lungo il diametro OC e l'asse Y lungo la tangente alla sfera contenuta nel piano A_0OC. Sia $P(x, y)$ un punto sulla superficie del reticolo che si trova vicino ad un tratto. Introduciamo le seguenti notazioni: $A_0O = r_0$, $AO = r$, $A_0P = u_0$, $AP = u$. Per focalizzare lo spettro di ordine m nel punto A è necessario e sufficiente che la differenza di cammino tra i raggi che arrivano da tratti vicini sia uguale a $m\lambda$. Supponendo (il che non influisce sul risultato finale) che l'origine delle coordinate O si trovi anch'essa vicino ad un tratto, scriviamo questa condizione nella forma $u_0 + u = r_0 + r \pm nm\lambda$, dove n è il numero del tratto P.

Segnando i tratti mediante il procedimento descritto sopra, si ha $n = \pm y/d$ e quindi dev'essere, per y qualsiasi

$$u_0 + u = r_0 + r \pm \frac{m\lambda}{d} y. \tag{51.1}$$

Indichiamo con a_0 e b_0 le coordinate del punto A_0 e con a e b quelle del punto A. Si ha allora

$$u_0^2 = (y - b_0)^2 + (x - a_0)^2 = r_0^2 + x^2 + y^2 - 2b_0 y - 2a_0 x. \tag{51.2}$$

L'equazione della circonferenza, che è la sezione tra la superficie del reticolo con il piano della figura, ha la forma

$$x^2 + y^2 = 2\rho x. \tag{51.3}$$

Portando l'espressione di $2x$ tratta dalla (51.3) nella (51.2) ed utilizzando la relazione $r_0^2 - b_0^2 = a_0^2$, troviamo

$$u_0^2 = \left(r_0 - \frac{b_0 y}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{a_0}{r_0^2} - \frac{1}{\rho}\right) a_0 y^2 + \left(1 - \frac{a_0}{\rho}\right) x^2. \tag{51.4}$$

Il secondo termine è una quantità del secondo ordine e l'ultimo termine è del quarto ordine in y. Conservando soltanto i termini del secondo ordine, otteniamo

$$u_0 = r_0 - \frac{b_0 y}{r_0} + \frac{1}{2r_0}\left(\frac{a_0}{r_0^2} - \frac{1}{\rho}\right) a_0 y^2. \tag{51.5}$$

Analogamente,

$$u = r - \frac{by}{r} + \frac{1}{2r}\left(\frac{a}{r^2} - \frac{1}{\rho}\right) a y^2. \tag{51.6}$$

Sostituiamo queste espressioni nella formula (51.1) ed uguagliamo a zero i termini di primo e di secondo grado in y. Si ottengono allora due condizioni

$$\frac{b_0}{r_0} + \frac{b}{r} = \mp \frac{m\lambda}{d}, \tag{51.7}$$

$$\frac{a_0}{r_0}\left(\frac{a_0}{r_0^2} - \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a}{r}\left(\frac{a}{r^2} - \frac{1}{\rho}\right) = 0, \tag{51.8}$$

le quali, se verificate, assicurano con la precisione adottata che il reticolo possiede le proprietà focalizzanti richieste.

3. La condizione (51.7) definisce le *direzioni lungo le quali si trovano i massimi di diffrazione d'ordine m*. Infatti, se l'angolo ϑ_0 è l'angolo d'incidenza del raggio centrale sul reticolo e ϑ l'angolo tra il corrispondente raggio diffratto e la normale al reticolo (fig. 202), si ha $\sin \vartheta_0 = b_0/r_0$, $\sin \vartheta =$

$= b/r$, e l'equazione (51.7) assume la forma

$$d(\sin\vartheta + \sin\vartheta_0) = \pm m\lambda, \tag{51.9}$$

che è identica alla formula di un reticolo a riflessione piano.

La seconda condizione, (51.8), definisce la distanza r tra il punto A ed il centro O del reticolo. Le equazioni (51.8) e (51.9) definiscono in modo univoco la posizione del punto A se è nota la posizione A_0 della sorgente di luce. Utilizzando le relazioni $a_0 = r_0 \cos\vartheta_0$ ed $a = r\cos\vartheta$, l'equazione (51.8) può essere rappresentata nella forma

$$\frac{\cos^2\vartheta_0}{r_0} + \frac{\cos^2\vartheta}{r} = \frac{\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta}{\rho}. \tag{51.10}$$

Se gli angoli ϑ_0 e ϑ sono piccoli, si ottiene l'equazione ben nota di uno specchio concavo di raggio ρ. Dunque, quale che sia la posizione A_0 della sorgente di luce, esiste sempre un punto A in cui convergono approssimativamente i raggi diffratti. Ma si possono ottenere maggior precisione e maggior semplicità della disposizione del reticolo ed anche una migliore nettezza delle righe spettrali, se la scelta della posizione di A_0 è fatta in modo che nell'espressione (51.4) spariscano i termini di secondo ordine. Per farlo, dev'essere $\frac{a_0}{r_0^2} - \frac{1}{\rho} = 0$. Allora, in virtù della (51.8), si avrà $\frac{a}{r^2} - \frac{1}{\rho} = 0$. Queste relazioni si possono scrivere nella forma

$$r_0^2 = a_0\rho, \quad \text{o} \quad r_0 = \rho\cos\vartheta_0; \tag{51.11}$$

$$r^2 = a\rho, \quad \text{o} \quad r = \rho\cos\vartheta. \tag{51.12}$$

La relazione (51.11) significa che la sorgente di luce deve trovarsi su una circonferenza di diametro ρ tangente alla superficie del reticolo nel punto O. Dalla (51.12) segue allora che i raggi diffratti vengono focalizzati nel punto A appartenente alla stessa circonferenza. Questa circonferenza è detta *cerchio di Rowland* (cerchio tratteggiato nella figura 202).

La dispersione angolare del reticolo $d\vartheta/d\lambda = m/(d\cos\vartheta)$ non dipende dall'angolo ϑ se gli spettri si ottengono per valori vicini a $\vartheta = 0$. In questo caso $\cos\vartheta \approx 1$ e l'angolo ϑ è una funzione lineare della lunghezza d'onda, cioè si ottiene lo *spettro normale*. Di solito il reticolo è disposto in modo che lo spettro studiato si formi vicino al suo asse ottico principale.

I grandi reticoli al primo ordine hanno un potere risolutivo uguale all'incirca a 200 000. La distanza angolare tra le righe spettrali che può essere risolta dal reticolo, è uguale a $m\delta\lambda/(d\cos\vartheta) = m\lambda/(Rd\cos\vartheta)$ e la corrispondente distanza lineare è

$$\Delta x = \frac{m}{d\cos\vartheta}\frac{\rho\lambda}{R} \approx \frac{m}{d}\frac{\rho\lambda}{R}. \tag{51.13}$$

Per utilizzare in modo conveniente il potere risolutivo di un reticolo è ne-

cessario che Δx sia superiore ad un certo valore limite. Poniamo $\Delta x =$ $= 0{,}01$ mm, $m = 1$, $R = 200000$, $\lambda = 500$ nm, $d = 1/600$ mm. Allora, utilizzando la formula precedente, troviamo che il raggio di curvatura ρ del reticolo deve essere non inferiore a ≈ 7 m, cioè molto grande.

4. I calcoli riportati sopra sono applicabili soltanto ai raggi contenuti nel piano della figura. Uno studio più dettagliato mostra che i raggi uscenti da questo piano formano *immagini astigmatiche*: l'immagine di una sorgente puntiforme posta in A_0 è data da un segmento perpendicolare al piano della figura e passante per il punto A. L'astigmatismo aumenta a misura che cresce l'angolo d'incidenza ϑ_0, cioè con il crescere dell'ordine dello spettro. Quando la sorgente di luce è una fenditura, la presenza di astigmatismo conduce alla diminuzione della nettezza delle immagini e ad un abbassamento del potere risolutivo se la fenditura è disposta in modo non del tutto parallelo ai tratti del reticolo. Per questa ragione è necessario assicurare una disposizione esatta della fenditura affinché essa sia parallela ai tratti del reticolo. Per la stessa ragione non si devono fare tratti troppo lunghi. Generalmente sono tracciati tratti corti su zone di grande larghezza invece di cercare di coprire un'area molto estesa, come nel caso del reticolo piano privo di astigmatismo.

5. A Rowland appartiene anche il più perfetto (dal punto di vista teorico) metodo di disposizione dei reticoli di diffrazione rappresentato nella figura 203. Il reticolo G_0G e la macchina fotografica sono posti alle estremità
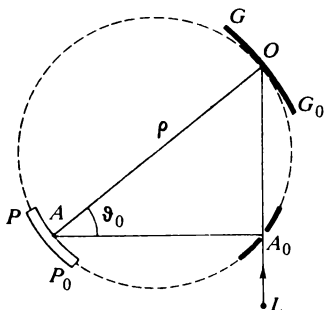
Fig. 203

opposte di un perno rigido OA la cui lunghezza è uguale al raggio di curvatura ρ del reticolo. Questi apparecchi possono scivolare lungo le rotaie A_0O ed A_0A, reciprocamente perpendicolari, su slitte collegate a cerniera con il perno OA. Per migliorare la nettezza delle immagini la lastra fotografica P_0P ha lo stesso raggio di curvatura del cerchio di Rowland. La fenditura luminosa è sistemata nel punto d'intersezione A_0 delle direttrici delle rotaie. Fotografando gli spettri di ordini diversi, nonché diverse regioni di uno stesso spettro, la fenditura A_0 e la sorgente di luce L restano fisse. Vi-

sto che i punti O, A_0, A si trovano sul cerchio di Rowland, l'immagine della fenditura A_0 si formerà nel punto A se il perno OA occupa una posizione opportuna. Se le estremità si spostano lungo le rotaie, nel punto A sfilano successivamente i fuochi di differenti lunghezze d'onda dello spettro dell'ordine considerato. Dato che nella disposizione di Rowland $\vartheta = 0$, si ha $d \sin \vartheta_0 = m\lambda$. D'altra parte, $OA_0 = \rho \sin \vartheta_0$. Combinando queste due formule, troviamo

$$OA = \frac{\rho m}{d} \lambda. \tag{51.14}$$

Sul perno legato alle rotaie si può riportare una scala regolare delle lunghezze d'onda. Allora la lunghezza d'onda corrispondente al centro A del campo visivo può essere letta direttamente su questa scala.

Con il metodo di Rowland, il volume occupato dallo strumento è tanto grande che in esso è difficile mantenere la temperatura costante, il che è necessario per le esposizioni di lunghe durate; inoltre, lo strumento di Rowland è notevolmente oneroso. Per quanto esposto e per altre ragioni il dispositivo di Rowland viene raramente utilizzato. Paschen, Eagl ed altri hanno elaborato altri metodi le cui descrizioni si possono trovare nei manuali speciali concernenti la tecnica spettroscopica.

§ 52. *Diffrazione da un reticolo trattata come un problema ai limiti*

1. Nei paragrafi precedenti il campo d'onda dietro il reticolo è stato calcolato mediante una *sommatoria su tutte le onde* inviate dai tratti del reticolo. In alcuni casi è preferibile utilizzare un altro metodo. Supponiamo che il reticolo sia illimitato. Chiamiamo la sua faccia anteriore *entrata* e quella posteriore *uscita*. Questa terminologia è applicabile anche ad un reticolo a riflessione, ma l'entrata e l'uscita coincidono con la faccia anteriore del reticolo. Senza perdere di generalità, si può ragionare come se il reticolo fosse infinitamente sottile. Prendiamo il piano del reticolo come piano coordinato XY. L'asse X è diretto perpendicolarmente ai tratti e l'asse Z nel senso di propagazione della luce diffratta (fig. 204). Come prima, astraiamo dal carattere vettoriale del campo d'onda, ammettendo che sia scalare. Ciò si può far sempre se il vettore elettrico o magnetico dell'onda incidente è parallelo ai tratti del reticolo: è soltanto necessario nel primo caso caratterizzare il campo di luce con il vettore elettrico e nel secondo caso con quello magnetico. Nel caso generale l'onda incidente può essere scomposta in due componenti, una polarizzata nel piano d'incidenza e l'altra polarizzata in un piano perpendicolare al primo. In questo caso il pro-

blema della diffrazione si riduce a due problemi indipendenti che si distinguono tra loro dallo stato di polarizzazione della luce incidente.

Rappresentiamo l'onda incidente nella forma

$$E_0 = Ae^{i(\omega t - kr)}. \tag{52.1}$$

Ponendo $z = 0$, troviamo il campo E_{entr} all'entrata del reticolo. In virtù della linearità delle equazioni che descrivono la propagazione delle onde, il
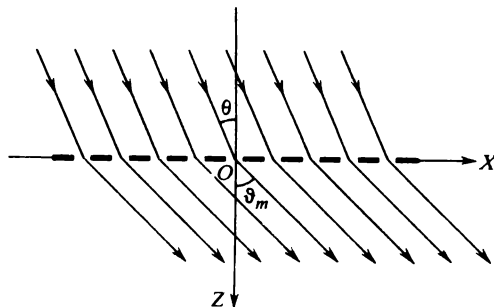
Fig. 204

campo totale delle onde trasmessa (riflessa) e diffratta all'uscita dal reticolo può essere rappresentato nella forma $E_{usc} = DE_{entr}$. Il coefficiente D dipende generalmente dalla lunghezza d'onda e si dice *trasparenza del reticolo*. Quest'è una caratteristica del *reticolo stesso*. Per un reticolo bidimensionale la grandezza $D = D(x, y)$ è una funzione di due coordinate, per un reticolo unidimensionale $D = D(x)$ dipende da una sola coordinata.

Il problema della diffrazione su un qualsiasi reticolo si riduce al calcolo della trasparenza del reticolo. Infatti, quando è nota questa grandezza si può calcolare il campo all'uscita del reticolo e ciò è sufficiente per calcolare il campo dell'onda diffratta utilizzando il principio di Huygens-Fresnel. Per trovare la soluzione stessa non è necessario applicare questo principio, poiché è sufficiente risolvere l'equazione d'onda

$$\Delta E + k^2 E = 0, \tag{52.2}$$

la quale nel piano $z = 0$ deve diventare la funzione $E_{usc}(x, y) = D(x, y)F_{entr}(x, y)$ e soddisfare alcune condizioni supplementari dipendenti dalle condizioni fisiche del problema. Questo metodo è noto nella letteratura sotto il nome di *metodo di Rayleigh*, benché esso sia soltanto un caso particolare del *metodo generale dei problemi ai limiti* della fisica matematica. Applicheremo questo metodo ad un reticolo di diffrazione unidimensionale.

2. Poiché per ogni reticolo la grandezza D è una funzione periodica di x

di periodo d, si può rappresentarla con la serie di Fourier

$$D = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m e^{-impx} \quad \left(p = \frac{2\pi}{d}\right). \tag{52.3}$$

Si ottiene perciò

$$E_{\text{usc}} = DE_{\text{entr}} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} AD_m e^{i[\omega t - (k_x + mp)x]}. \tag{52.4}$$

Questa relazione dev'essere considerata come la *condizione ai limiti* che deve essere verificata, dietro il reticolo, da ogni soluzione dell'equazione (52.2). Una soluzione particolare di quest'equazione è l'onda piana $E = ae^{i(\omega t - qr)}$ il cui vettore d'onda q verifica la condizione $q^2 = k^2$. Il vettore d'onda può essere reale (onda omogenea) o complesso (onda non omogenea o evanescente). Mediante la sovrapposizione di tali soluzioni si può ottenere la soluzione generale

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(\omega t - q_m r)}. \tag{52.5}$$

Perché la condizione ai limiti (52.4) sia verificata, è necessario porre

$$q_{mx} = k_x + mp, \quad q_{my} = 0. \tag{52.6}$$

Si avrà allora $q_{mz} = \sqrt{k^2 - q_{mx}^2}$. Considerazioni fisiche permettono di scartare una radice e di ottenere un risultato univoco. Ai valori reali di q_{mz} corrispondono onde omogenee che possono soltanto *allontanarsi dal reticolo* e non arrivare ad esso. Questa condizione è soddisfatta soltanto da valori positivi di q_{mz}. Ai valori immaginari corrispondono onde non omogenee; allontanandosi dal reticolo queste onde devono *smorzarsi*. Perciò il coefficiente della parte immaginaria deve essere negativo. Quindi, la relazione (52.6) deve essere completata dalle condizioni

$$q_{mz} = +\sqrt{k^2 - q_{mx}^2} \quad \text{e} \quad q_{mz} = -i\sqrt{k^2 - q_{mx}^2}, \tag{52.6a}$$

dove le radici quadrate hanno *significato aritmetico*. In queste condizioni i vettori d'onda q_m sono definiti in modo univoco e per il campo all'uscita si può scrivere

$$E_{\text{usc}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(\omega t - q_{mx} x)}.$$

Il confronto di quest'espressione con la (52.4) ci dà

$$a_m = AD_m, \tag{52.7}$$

questo risolve il problema posto.

3. Ponendo nella (52.6) $k_x = (2\pi/\lambda)\sin\theta$, $q_{mx} = (2\pi/\lambda)\sin\vartheta_m$, $p =$ $= 2\pi/d$, otteniamo

$$d(\sin\vartheta_m - \sin\theta) = m\lambda, \tag{52.8}$$

cioè la formula principale del reticolo di diffrazione. Ma la soluzione ottenuta contiene anche nuovi risultati. Primo, tutto lo spettro dietro il reticolo è composto solamente di *massimi principali*, non esistono massimi secondari. Questo risultato è evidentemente dovuto al fatto che abbiamo supposto il reticolo illimitato. Secondo, nella formula (52.5) insieme con le onde omogenee figurano anche *onde non omogenee* e quindi essa definisce il campo d'onda *a tutte le distanze dal reticolo* e non solo nella zona d'onda come nel caso della formula (46.2). Nel caso di un'incidenza normale il massimo ordine m delle onde omogenee è dato dalla condizione $m \leqslant d/\lambda$. Per $m > d/\lambda$ la componente q_{mz} è immaginaria e la corrispondente onda non omogenea si smorza in modo esponenziale secondo la legge $\exp(-\varkappa_m z)$, dove

$$\varkappa_m = \sqrt{k^2 - q_{mx}^2} = \frac{2\pi}{d}\sqrt{m^2 - (d/\lambda)^2}. \tag{52.9}$$

Alla distanza $z = 1/\varkappa_m$ l'ampiezza dell'onda diminuisce di e volte ed il suo quadrato di e^2 volte. La più grande di queste distanze è dell'ordine di d e perciò per $z \gg d$ il campo dietro al reticolo contiene soltanto onde omogenee.

In particolare, se $d < \lambda$, per un'incidenza normale il campo in lontananza dal reticolo contiene soltanto un'onda piana di ordine zero ($m = 0$) e non compaiono massimi di diffrazione laterali. Lo studio dell'onda trasmessa o riflessa per $z \gg \dfrac{\lambda d}{2\pi\sqrt{\lambda^2 - d^2}}$ o praticamente alla distanza $z \gg \lambda$ non fornisce alcuna informazione sulla struttura del reticolo. Osservando il reticolo al microscopio, non scopriremo alcun tratto. Per la stessa ragione la luce che si propaga in un mezzo trasparente, per esempio in un cristallo, non è deviata, benché il mezzo sia costituito da atomi e da molecole discreti: il cristallo è una struttura periodica ed in questo senso può essere considerato come un reticolo di diffrazione (la diffusione della luce osservata in realtà è dovuta a non omogeneità del mezzo ed a fluttuazioni termiche). Dal punto di vista ottico il cristallo si comporta come un mezzo omogeneo continuo, il che è dovuto al fatto che il periodo della struttura molecolare del cristallo è inferiore alla lunghezza d'onda. Ma se questa condizione cessa di essere verificata, si vedono comparire massimi di diffrazione e nasce la diffusione interferenziale di onde. Questo caso è realizzato nella regione dei raggi X.

4. Nelle immediate vicinanze del reticolo il campo d'onda ha una forma

molto complicata. A distanza $z \gg 1/\varkappa_m$ il campo diventa più semplice, poiché non ha più onde evanescenti, ma resta ancora piuttosto complicato poiché le onde omogenee che costituiscono questo campo si sovrappongono. Se ci si allontana dal reticolo esiste una certa distanza minima alla quale le onde piane di differenti ordini si separano spazialmente. A distanze relativamente piccole dal reticolo si può applicare l'ottica geometrica alle onde di differenti ordini separate spazialmente. Le direzioni dei massimi principali sono quelle lungo le quali le onde emesse da diverse fenditure del reticolo si rinforzano reciprocamente per interferenza, sia che questo avvenga nel fuoco di una lente convergente, oppure ad una distanza infinita. Dato che il campo delle onde diffratte è rappresentato in ogni punto da una sovrapposizione di onde piane, la condizione del loro rafforzamento per interferenza determina la direzione di propagazione delle onde piane ***ad ogni distanza dal reticolo.***

5. Se nello sviluppo in serie di Fourier della trasparenza D del reticolo manca un termine qualsiasi, mancherà anche il massimo principale del corrispondente ordine nel campo d'onda dietro il reticolo. A titolo d'esempio consideriamo un reticolo sinusoidale detto anche reticolo di Rayleigh. La sua trasparenza è definita dall'espressione

$$D = \alpha + \beta \cos px = \alpha + \frac{\beta}{2} (e^{ipx} + e^{-ipx})$$

dove α, β e p sono costanti. In questo caso il campo luminoso dietro il reticolo è costituito da tre onde omogenee piane: un'onda non deviata (massimo di ordine zero) d'ampiezza $a_0 = \alpha A$ e due massimi laterali del primo ordine di ampiezze $a_1 = a_{-1} = 1/2\beta A$. Non esistono altri massimi principali. Se la superficie di un corpo ha forma sinusoidale, con un'ampiezza piccola rispetto alla lunghezza d'onda, questa superficie si comporterà approssimativamente come un reticolo di Rayleigh. Wood riuscì a realizzare un tale reticolo sottoponendo un reticolo di diffrazione in vetro ad un attacco chimico di corta durata (all'incirca 10 s) con una debole soluzione di acido fluoridrico. I normali reticoli di vetro producono generalmente spettri poco netti, poiché i tratti prodotti da una punta di diamante sono stretti rispetto agli intervalli chiari tra essi. Se i tratti vengono allargati bagnando la superficie di vetro con una debole soluzione di acido fluoridrico, si riesce ad ottenere un aumento dell'intensità degli spettri di parecchie volte (fino a dieci).

Esistono anche strutture le quali si possono formalmente considerare come reticoli di diffrazione che danno un solo massimo, ad esempio il prisma. Se su una delle facce laterali del prisma cade un'onda monocromatica piana, la fase del campo d'onda all'uscita (altra faccia del prisma) varia con la coordinata secondo una legge lineare. La corrispondente condizione ai limiti sarà verificata soltanto da un'onda piana che s'allontana dal pri-

sma. Quest'è proprio l'onda che ha attraversato il prisma ed è stata deviata da quest'ultimo. Il problema della riflessione e della rifrazione della luce su una frontiera di separazione piana tra due mezzi può essere trattato come un problema ai limiti mediante il metodo di Rayleigh. In un tale approccio, la frontiera di separazione piana si comporta come un reticolo di diffrazione che produce un solo massimo.

6. Un reticolo limitato può anche essere studiato mediante il metodo di Rayleigh. Nei limiti del reticolo, la sua trasparenza è periodica e si annulla fuori del reticolo. Se sviluppiamo la trasparenza in integrale di Fourier, otteniamo

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{-ifx}\, df. \qquad (52.10)$$

Il campo all'uscita del reticolo è rappresentato dall'espressione

$$E_{\text{usc}} = A \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{-i(k_x+f)x}\, df.$$

La soluzione che verifica tutte le condizioni del problema è della forma

$$E = A \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{-iqr}\, df, \qquad (52.11)$$

dove $q_x = k_x + f$, $q_y = 0$ e q_z è data dalla formula (52.6a). Definiamo ora la trasparenza del reticolo con l'espressione

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\infty < x < -L, \\ \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} D_m e^{-impx}, & \text{se} \quad -L < x < +L, \\ 0, & \text{se} \quad +L < x < +\infty. \end{cases} \qquad (52.12)$$

Calcolando il coefficiente di Fourier $C(f)$, otteniamo

$$C(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(x) e^{ifx}\, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m \frac{\sin L(f - mp)}{f - mp}.$$

Il campo dietro il reticolo è del tipo

$$E = \Sigma E_m \qquad (52.13)$$

dove

$$E_m = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_m \frac{\sin L(f - mp)}{f - mp} e^{-iqr}\, df =$$

$$= \frac{Ad}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_m \frac{\sin [(N/2)(fd - 2m\pi)]}{fd - 2m\pi} e^{-iqr}\, df. \qquad (52.14)$$

Come prima, il campo d'onda dietro il reticolo è composto da onde di ordini m differenti. Ma l'onda E_m non si riduce ad un'unica onda piana di direzione determinata, essa è composta della sovrapposizione di una *moltitudine continua* di onde piane aventi direzioni diversi. La ripartizione in varie direzioni dell'intensità di un'onda E_m è descritta dalla stessa curva che descrive un'onda diffratta da una fenditura (si veda la fig. 175). L'intensità diventa massima quando il denominatore s'annulla, cioè quando $q_x = k_x + mp = 0$. Questa condizione definisce la direzione del massimo principale di ordine m. Nel caso considerato

$$\frac{\sin[(N/2)(fd - 2m\pi)]}{fd - 2m\pi} = \frac{N}{2},$$

e quindi l'intensità dell'onda E_m nel massimo principale è proporzionale a N^2. Quando $\sin[(N/2)(fd - 2m\pi)] = 0$, ma $fd - 2m\pi \neq 0$, l'intensità dell'onda s'annulla. Questa condizione definisce le direzioni dei minimi di diffrazione, il cui numero, tra due massimi principali vicini, è uguale a $N - 1$. Dunque, si ottengono tutti i risultati già ottenuti mediante il metodo di sommatoria delle onde.

§ 53. *Esempi d'applicazione del metodo di Rayleigh*

In quanto segue si suppone che il passo del reticolo sia molto più grande della lunghezza d'onda luminosa, cosicché la trasparenza $D(x)$ può essere calcolata nell'approssimazione dell'ottica geometrica.

1. Consideriamo dapprima un reticolo d'ampiezza piano composto di fenditure trasparenti di larghezza b separati da intervalli opachi di larghezza a. Nell'approssimazione dell'ottica geometrica la trasparenza $D(x)$ è uguale all'unità su una fenditura ed è zero sugli intervalli tra le fenditure. Allora il coefficiente di Fourier D_m è rappresentato dall'espressione

$$D_m = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{+d/2} D(x)e^{impx}\,dx = \frac{1}{d}\int_{-b/2}^{+b/2} e^{impx}\,dx = \frac{b}{d}\,\frac{\sin(\pi mb/d)}{\pi mb/d}. \tag{53.1}$$

Calcolando l'intensità di un fascio diffratto si dovrebbe, in linea di principio, tener conto della variazione della sua sezione trasversale, dovuta all'inclinazione del fascio sul piano del reticolo. Ma se lo facessimo, otterremmo una precisione superiore a quella che può dare il nostro metodo di calcolo, il quale è valido solo per angoli di diffrazione così piccoli che $\cos\vartheta \approx 1$. In quest'approssimazione l'intensità relativa dell'm-esimo fascio diffratto è $I_m = D_m^2$. (L'intensità dell'onda incidente è presa come unità.) Per lo spettro di ordine zero $D_0 = b/d$, $I_0 = (b/d)^2$. L'intensità totale della luce trasmessa attraverso il reticolo è $I_{\text{trasm}} = b/d$. La differenza tra queste due grandezze rappresenta l'intensità totale della luce corrispondente agli altri spettri

$$\frac{b}{d} = \frac{b^2}{d^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin^2\frac{\pi mb}{d}. \tag{53.2}$$

(Questa è una relazione puramente matematica dimostrata nella teoria delle serie di Fourier.)

La quantità relativa di luce diffratta è

$$\frac{I_{\text{trasm}} - I_0}{I_{\text{trasm}}} = 1 - \frac{b}{d}. \tag{53.3}$$

Essa tende al suo valore massimo (l'unità) quando $b/d \to 0$. Ma in questo caso l'intensità stessa I_{trasm} tende a zero. L'intensità del fascio diffratto di ordine m è uguale a

$$I_m = D_m^2 = I_0 \left[\frac{\sin(\pi m b/d)}{\pi m b/d}\right]^2. \tag{53.4}$$

Quando $b/d \to 0$, le intensità di tutti i fasci diffratti diventano equivalenti ed uguali a I_0. Ma, come è stato già detto prima, in questo caso ciascuna di queste intensità tende a zero.

Se $\pi m b/d = n\pi$, cioè $b/d = n/m$, dove n è un intero inferiore a m, essendo m e n primi tra loro, s'annullano gli spettri di ordine m, $2m$, $3m$, ... Per esempio, per $b/d = 1/2$ spariscono tutti gli spettri di ordine pari. Abbiamo già indicato al § 46 che il significato di questo risultato diventa evidente, se osserviamo che la condizione di formazione del massimo principale di ordine m data da $d \sin \vartheta = m\lambda$ moltiplicata per $b/d = n/m$ viene trasformata in $b \sin \vartheta = n\lambda$, cioè nella condizione di formazione dell'n-esimo minimo di diffrazione da una sola fenditura. Ne risulta che nessuna fenditura, e perciò neppure il reticolo, invia luce nella direzione definita dall'angolo ϑ.

2. Consideriamo un caso più generale. Supponiamo che sui segmenti di lunghezza b la trasparenza del reticolo sia uguale a β, mentre sui segmenti di lunghezza a essa sia uguale ad α. Le grandezze α e β sono costanti ma possono anche essere complesse. Quindi, il reticolo è di tipo misto, di *ampiezza-fase*. Quando α e β sono numeri reali, il reticolo è di tipo *ampiezza* e quando queste grandezze sono della forma $e^{i\rho}$ (ρ è una quantità reale), il reticolo è di tipo *fase*. Il reticolo misto ampiezza-fase considerato è equivalente ad una lamina piano-parallela di trasparenza α sovrapposta ad un reticolo di diffrazione. La trasparenza di questo reticolo sui segmenti b è uguale a $(\beta - \alpha)$ e sui segmenti a è nulla. È evidente che le grandezze α e β, a e b si possono permutare ed ottenere un secondo sistema equivalente. Dal punto di vista matematico i due sistemi differiscono tra loro soltanto nelle notazioni e perciò è sufficiente considerarne uno solo, per esempio il primo.

Il calcolo dei coefficienti di Fourier D_m si riconduce a quello del problema precedente. Per una lamina piano-parallela tutti i coefficienti di Fourier s'annullano, eccetto quello di ordine zero, uguale ad α. Per questa ragione, mettendo l'origine delle coordinate al centro di un segmento b ed utilizzan-

do la formula (53.1), otteniamo

$$D_m = (\beta - \alpha)\frac{b}{d}\frac{\sin(\pi mb/d)}{\pi mb/d} + \alpha\delta_m, \tag{53.5}$$

dove $\delta_m = 1$ per $m = 0$ e $\delta_m = 0$ per $m \neq 0$. Per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ si ottengono i risultati del problema precedente.

3. Consideriamo ora i casi particolari dei reticoli d'ampiezza e di fase propriamente detti. Per un reticolo d'ampiezza le grandezze α e β sono reali e positive. Tutti i coefficienti D_m sono reali anch'essi. I segni di questi coefficienti sono alternativamente positivi e negativi a partire da $m = \pm 1$. I coefficienti di ordine zero e di ordine uno possono essere dello stesso segno o di segni opposti a seconda del rapporto tra le trasparenze α e β. Nel caso di un reticolo di fase propriamente detto le trasparenze α e β sono della forma $e^{i\rho}$. Essendo importante soltanto la differenza di fase tra le onde emesse da a e da b, senza perdere di generalità si può porre $\alpha = 1$ e $\beta = e^{i\rho}$. Allora dalla formula (53.5) troviamo

$$D_m = (e^{i\rho} - 1)\frac{b}{d}\frac{\sin(m\pi b/d)}{m\pi b/d} \quad (m \neq 0), \tag{53.6}$$

$$D_0 = (e^{i\rho} - 1)\frac{b}{d} + 1. \tag{53.7}$$

Come nel caso di un reticolo d'ampiezza, i coefficienti di Fourier D_m a partire da $m = \pm 1$ sono alternativamente positivi e negativi. Non esiste alcun spostamento di fase tra questi coefficienti.

La differenza qualitativa tra il reticolo d'ampiezza e quello di fase consiste nel fatto che in quest'ultimo si osserva uno spostamento di fase supplementare φ tra lo spettro di ordine zero e gli spettri di tutti gli altri ordini. Per trovare questo sfasamento, calcoliamo dalle formule (53.6) e (53.7) il rapporto complesso D_m/D_0. La variabile indipendente di questo numero complesso rappresenta φ. Un calcolo semplice dà

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b+a}{b-a}\frac{\sin\rho}{1-\cos\rho}. \tag{53.8}$$

Lo spostamento di fase è lo stesso per tutti gli ordini m. Visto che dopo la diffrazione sul reticolo gli spettri di diversi ordini si separano spazialmente in fasci indipendenti, si può agire su ciascuno di questi fasci senza modificare le ampiezze e le fasi di tutti gli altri fasci. Per esempio, se sul tragitto del fascio di ordine zero viene interposta una lamina trasparente che cambia la sua fase di φ, le relazioni di fase tra i fasci diffratti saranno uguali a quelle di un reticolo d'ampiezza. Con l'introduzione di questa lamina il reticolo di fase agisce come un reticolo d'ampiezza. Su questo fatto è basato il *metodo del contrasto di fase* utilizzato in microscopia (si veda il § 59).

Evidenziamo due casi particolari. Il primo caso si ha quando $a = b$. La

formula (53.8) dà allora $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, cioè $\varphi = \pi/2$. Il secondo caso si ha per piccoli valori di ρ. Si ha allora

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{b + a}{b - a} \frac{2}{\rho},$$

cioè $\operatorname{tg} \varphi$ è molto grande e l'angolo φ è praticamente uguale a $\pi/2$. In entrambi i casi, per trasformare un reticolo di fase in uno d'ampiezza, è sufficiente introdurre sul tragitto del fascio di ordine zero, o sul tragitto di tutti gli altri fasci diffratti, una lamina che porta una differenza di fase supplementare uguale a $\pm \pi/2$.

4. Consideriamo infine il reticolo di fase avente tratti a dente di sega (fig. 205). La sezione trasversale di un tratto ha forma triangolare; un lato del triangolo è lungo e di debole pendenza, mentre l'altro è corto e di forte
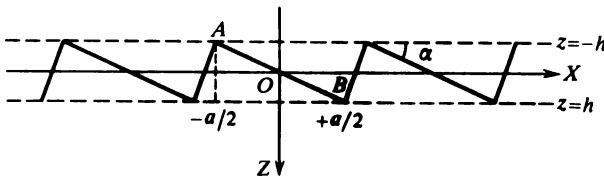
Fig. 205

pendenza. Questo reticolo è interessante per il fatto che, in certe condizioni, esso può concentrare la maggior parte della luce nello spettro di un solo ordine. Il reticolo può funzionare sia per trasmissione che per riflessione. Consideriamo il reticolo funzionante per trasmissione.

Mettiamo l'origine delle coordinate O al centro del lato lungo AB. Siano a la lunghezza della proiezione del lato lungo e b quella del lato corto sull'asse X. Se $b \ll a$, si può trascurare il contributo che apporta il lato corto all'integrale (53.1). In quest'approssimazione si può porre $a = d$ e calcolare la trasparenza del reticolo solo sulla parte a. L'influenza della trasparenza della parte b sul risultato è praticamente nulla. Supponiamo che l'onda incidente arrivi perpendicolarmente al piano XY e sia rappresentata nell'aria dall'espressione $E = E_0 e^{-ikz}$. All'entrata, cioè nel piano $z = -h$, il campo è rappresentato dall'espressione $E_{entr} = E_0 e^{ikh}$. Per calcolare il campo all'uscita, per $z = +h$, si può, essendo piccolo l'angolo d'inclinazione α, trascurare la rifrazione. Se z_0 è la coordinata corrente di un punto sulla retta AB, il campo all'uscita in un punto situato al di sotto di questa retta è

$$E_{usc} = E_0 e^{-ikz_0} \cdot e^{-ikn(h - z_0)} = e^{i\delta} e^{ik(n-1)z_0} E_{entr},$$

dove δ è una costante. Il fattore di fase costante non gioca alcun ruolo e può essere omesso. Quindi la trasparenza del reticolo è $D = e^{ik(n-1)z_0}$ e do-

po la sostituzione di $z_0 = x \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha x$ si ha

$$D(x) = e^{ik(n-1)\alpha x}.$$

I coefficienti di Fourier D_m vengono calcolati mediante la formula (53.1) e troviamo

$$D_m = \frac{\sin \pi[m + (d/\lambda)(n - 1)\alpha]}{\pi[m + (d/\lambda)(n - 1)\alpha]}. \tag{53.9}$$

Quando il denominatore di quest'espressione diventa nullo, quasi tutta la luce è concentrata nello spettro di ordine m. Per questo deve essere $m +$ $+ (d/\lambda)(n - 1)\alpha = 0$. D'altro canto, $d \sin \vartheta = m\lambda$, o, essendo piccolo l'angolo di diffrazione, $d \cdot \vartheta = m\lambda$. Eliminando m, otteniamo

$$\vartheta = -(n - 1)\alpha. \tag{53.10}$$

Questa formula mostra che l'angolo ϑ è uguale all'angolo di deviazione dei raggi rifratti da un prisma di angolo rifrangente α piccolo. Dunque, quasi tutta la luce può essere concentrata in una sola direzione, che coincide con quella dei raggi rifratti. La concentrazione della luce si produrrà quando la differenza di cammino tra i raggi rifratti da denti vicini del reticolo contiene un numero intero di lunghezze d'onda. Abbiamo già costatato l'esistenza di una tale concentrazione della luce prodotta dal reticolo di Michelson (§ 48).

§ 54. *Olografia*

1. Applichiamo il metodo di Rayleigh per spiegare il principio dell'*olografia* che è un procedimento di formazione delle immagini ottiche fondato sulla *ricostituzione del fronte d'onda*, senza utilizzare lenti. Il principio dell'olografia fu suggerito e confermato sperimentalmente dal fisico polacco M. Wolfke (1883-1947). La sua opera fu pubblicata nel 1920, ma fu dimenticata. L'idea dell'olografia fu riscoperta nel 1947 dall'ingegnere e fisico inglese Gabor (nato nel 1900) il quale ne è giustamente considerato l'inventore. Ma passarono ancora 15 anni di ricerche prima di poter realizzare praticamente l'olografia. La ragione di questo ritardo consiste nel fatto che in olografia sono necessarie sorgenti di luce *con un grado molto elevato di coerenza spaziale e temporale*. Nel 1947 non esistevano ancora tali sorgenti. La situazione cambiò con l'invenzione del laser nel 1960 e con la sua introduzione nella tecnica di laboratorio. Le prime immagini olografiche furono ottenute nel 1962 dagli americani Leith ed Upatnieks.

Quando un ogetto è illuminato o attraversato dalla luce, esso emette un'onda diffusa o un'onda di trasmissione. (Per fissare le idee, nel seguito si suppone che l'oggetto sia illuminato e non attraversato dalla luce, benché non ci sia, nella nostra considerazione, differenza di principio tra questi

due casi.) Dopo essersi staccata dall'oggetto, l'onda diffusa ha un'*esistenza propria* e contiene informazioni complete sulla forma e sulle altre proprietà dell'oggetto che possono essere ottenute illuminandolo. Penetrando nell'occhio o in una macchina fotografica, quest'onda forma sulla retina o su una lastra fotografica un'immagine dell'oggetto. Se quest'onda è riprodotta con un procedimento qualunque, questa nuova onda produrrà evidentemente gli stessi effetti dell'onda iniziale diffusa dall'oggetto. L'olografia è basata su quest'ultima asserzione.

Il processo di formazione delle immagini in olografia si divide in due tappe successive. Nella prima tappa si prepara un *ologramma*, cioè una lastra fotografica per mezzo della quale si può riprodurre l'onda che è stata diffusa dal corpo. La seconda tappa è costituita dalla *riproduzione* stessa di quest'onda e dalla formazione dell'immagine ottica.

2. Supponiamo che un oggetto A (fig. 206) sia illuminato da un fascio di raggi paralleli provenienti da un laser. I raggi diffusi cadono sulla lastra
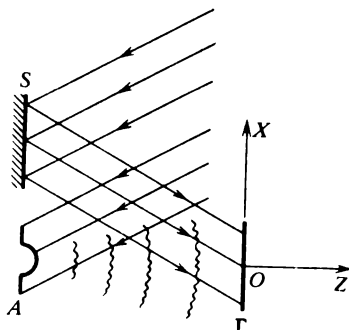
Fig. 206

fotografica Γ. Dopo averla sviluppata si può giudicare, in base al grado di annerimento, dell'ampiezza dell'onda diffusa in tutti i punti della lastra raggiunti da quest'onda. Da questo punto di vista la lastra esposta e poi sviluppata conserva tutta l'informazione concernente l'ampiezza del campo d'onda. Per la riproduzione del campo d'onda questa sola informazione è di certo insufficiente; è necessario disporre anche dei dati sulla *fase* dell'onda: la lastra non li contiene, poiché il grado di annerimento dipende soltanto dall'intensità del campo e non dalla fase dell'onda. Gabor mostrò che i dati concernenti la fase si possono ottenere e registrare sulla stessa lastra Γ, illuminandola con un altro fascio di luce proveniente dallo stesso laser ed obbligandolo ad interferire con il fascio diffuso dall'oggetto. Praticamente questo può essere fatto allargando preliminarmente il fascio laser e dividendolo poi in due. Uno di questi fasci (*fascio oggetto*) è diretto sull'oggetto A e l'altro (*fascio di riferimento*) è riflesso da uno specchio

piano S. Entrambi i fasci sono diretti verso la lastra Γ dove interferiscono. In questo modo viene fotografata la figura d'interferenza. La fotografia così ottenuta si dice *ologramma*.

Dato che l'onda diffusa dall'oggetto viene prodotta per riflessione e per diffrazione sui dettagli *macroscopici* di un oggetto di forma complicata, un ologramma reale rappresenta una figura d'interferenza molto complicata con dettagli molto fini indiscernibili a occhio nudo. (Su esso sono generalmente visibili grandi anelli di diffrazione che non hanno niente a che fare con l'olografia, poiché appaiono per diffrazione accidentale sui grani di polvere che s'incontrano sul tragitto di propagazione della luce.)

La figura formata sull'ologramma non assomiglia assolutamente all'oggetto. Esaminandola al microscopio, è difficile trovare su di essa qualche regolarità, tuttavia la disposizione, la forma e l'intensità delle macchie di diffrazione dell'ologramma sono completamente determinate dalla forma geometrica e dalle proprietà fisiche della superficie riflettente dell'oggetto. L'ologramma contiene, *in una forma codificata*, *tutte le informazioni* concernenti l'ampiezza e le fasi dell'onda diffusa; queste informazioni sono sufficienti per poter riprodurre l'onda diffusa e per ottenere ancora l'immagine ottica dell'oggetto. Il termine « olografia » trae origine dalle parole greche « holos » (intero) e « graphein » (scrivo) il che corrisponde ad una « registrazione completa ».

3. La differenza di cammino tra l'onda di riferimento e le onde diffuse dall'oggetto è molto grande e può essere di parecchi metri. Perciò per registrare un ologramma, il tempo di coerenza della luce deve essere molto grande (non inferiore a 10^{-5}-10^{-7} s). Anche la lunghezza di coerenza deve essere molto grande (non meno di 1-10 m). Nessuna sorgente di luce, oltre ai laser, può assicurare un così alto grado di coerenza spaziale e temporale. Inoltre, sono necessarie l'*immobilità* (con una precisione a meno di frazioni di lunghezza d'onda) ed una grande *nettezza* della figura d'interferenza formata nella regione di sovrapposizione dei fasci oggetto e di riferimento durante l'esposizione. Anche per questo sono necessarie un'alta coerenza della luce ed una grande *rigidità meccanica* di tutti gli elementi del sistema olografico.

Il necessario grado di monocromaticità della luce è definito mediante la formula generale $\lambda/\delta\lambda \gtrsim m$, dove m è l'ordine massimo d'interferenza che si osserva nell'olografia. Disponendo in modo razionale la sorgente luminosa e gli altri apparecchi, quest'ordine si può stimare per mezzo della formula $m \sim L/\lambda$, dove L è la dimensione lineare dell'oggetto. Quindi, dev'essere $\delta\lambda < \lambda^2/L$. Già per un oggetto di piccole dimensioni ~ 10 cm e per $\lambda = 500$ nm questa formula dà $\delta\lambda < 10^{-3}$ nm. Le righe spettrali di una lampada a vapori di mercurio a bassa pressione hanno una larghezza dell'ordine di 30 nm. La sorgente di luce deve soddisfare condizioni ancor più severe. Per ottenere un'alta nettezza della figura d'interferenza sull'ologramma, le dimensioni trasversali Δx della sorgente di luce (cioè le

dimensioni parallele al piano dell'ologramma) debbono essere piccole rispetto alla larghezza di una frangia d'interferenza λ/α, dove α è l'angolo di convergenza tra i raggi estremi che interferiscono (si veda il § 28). L'ordine di grandezza di questo angolo è $\alpha = h/l$, dove h è la larghezza del fascio di riferimento e l la distanza tra l'oggetto e l'ologramma. Se $h = 3$ cm ed $l =$ $= 30$ cm, dev'essere $\Delta x < \lambda l/h = 5$ μm.

Si è cercato di soddisfare queste esigenze utilizzando sorgenti di luce ordinarie (per esempio lampade ad arco di mercurio); si faceva passare la luce attraverso diversi monocromatori, focalizzandola poi su un diaframma di piccola apertura. Solo una piccola parte del flusso luminoso attraversava il diaframma e raggiungeva l'oggetto illuminandolo. Il tempo d'esposizione per ottenere un ologramma avrebbe dovuto essere all'incirca un anno. Per questa ragione Gabor riuscì ad ottenere ologrammi di oggetti microscopici semplici con un tempo d'esposizione di parecchie ore. I laser hanno eliminato i procedimenti descritti ed il principio dell'olografia potè essere realizzato in pratica.

4. Rappresentiamo il campo dell'onda diffusa dall'oggetto A nella forma

$$u = a(r)e^{i[\omega t - \Phi(r)]}, \tag{54.1}$$

ed il campo dell'onda riflessa dallo specchio piano S con l'espressione

$$v = be^{i(\omega t - kr)} \tag{54.2}$$

dove b e k sono costanti. Entrambi i campi sono scritti in forma scalare. Questa semplificazione non è essenziale, poiché le variazioni di polarizzazione delle onde non giocano un ruolo importante nei processi che ci interessano. In questo modo le grandezze $a(r)$, $\Phi(r)$ e b si possono considerare reali. L'intensità del campo risultante sulla lastra Γ e davanti ad essa è rappresentata dall'espressione

$$I = (u + v)(u^* + v^*) = v^*u + vu^* + v^*v + u^*u.$$

Poniamo l'origine delle coordinate in un punto O qualunque sul piano della lastra Γ. Facciamo coincidere con lo stesso piano il piano coordinato XY e dirigiamo l'asse Y perpendicolarmente alla direzione del fascio di riferimento, riflesso dallo specchio S ($k_y = 0$). L'asse Z sarà allora normale al piano della lastra Γ; orientiamolo nel senso di propagazione del fascio di riferimento. L'intensità I_0 del campo di luce nel piano della lastra Γ si deduce dall'espressione precedente sostituendo in tutte le funzioni i loro valori per $z = 0$

$$I_0 = ba(x, y, 0)e^{i[k_x x - \Phi(x, y, 0)]} + ba(x, y, 0)e^{-i(k_x x - \Phi(x, y, 0)]} + \\ + b^2 + a^2(x, y, 0). \tag{54.3}$$

Supponiamo ora che, mediante il metodo di contatto, sia stato preparato un positivo dell'ologramma in condizioni di sviluppo tali che la traspa-

renza D del positivo risulti proporzionale ad I_0. Per brevità il coefficiente di proporzionalità può essere preso uguale all'unità, cioè $D = I_0$. Ciò è sempre possibile con una scelta conveniente delle unità di misura. Questo ologramma positivo può essere utilizzato per ricostruire l'onda diffusa $u(\mathbf{r}, t)$. A questo scopo, dopo aver allontanato l'oggetto A, l'ologramma è illuminato con lo stesso fascio di riferimento $v(\mathbf{r}, t)$ che è stato utilizzato per registrare l'ologramma. Questo fascio sarà diffratto dall'ologramma come lo sarebbe da un reticolo di diffrazione. Il problema si riduce al calcolo della figura di diffrazione dietro l'ologramma. Per la sua risoluzione si può applicare il metodo di Rayleigh. Indichiamo con $E(\mathbf{r}, t)$ il campo d'onda dietro l'ologramma. All'uscita dell'ologramma questo campo sarà rappresentato dall'espressione

$$E_{\text{usc}} = Dv(x, y, 0) = I_0 b e^{i(\omega t - k_x x)}. \tag{54.4}$$

È necessario trovare una soluzione dell'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0, \tag{54.5}$$

che verifica la condizione al contorno (54.4). Essendo quest'equazione e la condizione (54.4) lineari ed omogenee, questo problema può essere diviso in quattro problemi indipendenti. Rappresentiamo la funzione E con la somma

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \tag{54.6}$$

ed imponiamo che i termini E_1, E_2, E_3, E_4 siano soluzioni dell'equazione (54.5) e verifichino le seguenti condizioni al contorno:

$$E_{1\,\text{usc}} = b^2 a(x, y, 0) e^{i[\omega t - \Phi(x, y, 0)]}, \tag{54.7}$$

$$E_{2\,\text{usc}} = b^2 a(x, y, 0) e^{i[\omega t + \Phi(x, y, 0) - 2k_x x]}, \tag{54.8}$$

$$E_{3\,\text{usc}} = b^3 e^{i(\omega t - k_x x)}, \tag{54.9}$$

$$E_{4\,\text{usc}} = b a^2(x, y, 0) e^{i(\omega t - k_x x)}. \tag{54.10}$$

Qui si deve aggiungere la condizione fisica che le onde diffratte sull'ologramma *si allontanino*. Ciò assicura l'*unicità della soluzione*.

5. È molto più facile trovare la funzione E_3, cioè la soluzione del problema che verifica la condizione al contorno (54.9). Data la costanza di b, questa soluzione è evidentemente

$$E_3 = b^3 e^{i(\omega t - kr)} = b^2 v(\mathbf{r}, t). \tag{54.9a}$$

Se non teniamo conto del fattore d'ampiezza b^2, la (54.9a) rappresenta l'onda di riferimento che illumina l'ologramma e si propaga al di là di quest'ultimo.

6. L'interesse principale nell'olografia è rappresentato dalla soluzione E_1 che verifica la condizione al contorno (54.7). Visto che b è una costante,

si può anche indicare subito la forma di questa soluzione, e cioè

$$E_1 = b^2 a(x, y, z) e^{i[\omega t - \Phi(x, y, z)]} = b^2 u(r, t). \tag{54.7a}$$

Infatti, la funzione E_1 verifica l'equazione d'onda (54.5) e rappresenta un'onda che si allontana dall'ologramma e che, per $z = 0$, si trasforma nella (54.7). Ma quest'onda, a meno di un fattore costante non essenziale, è identica all'onda u diffusa dall'oggetto. Essa riproduce dunque esattamente l'onda diffusa e forma un'*immagine virtuale* (IV) dell'oggetto allo stesso posto dove si trovava quest'ultimo durante la preparazione dell'ologramma (fig. 207,*a*). Queste considerazioni spiegano il principio dell'olografia.
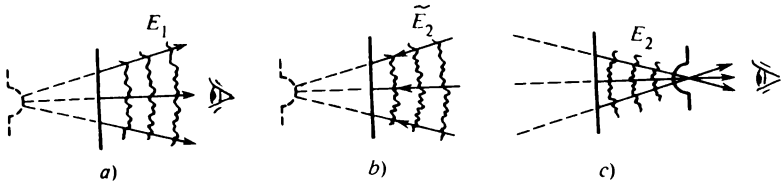
Fig. 207

7. Per trovare l'onda E_2, cioè la soluzione dell'equazione d'onda che verifica la condizione al contorno (54.8), consideriamo prima il caso particolare in cui il fascio di riferimento e quindi il fascio illuminante siano perpendicolari al piano dell'ologramma. In questo caso $k_x = 0$ e la condizione al contorno (54.8) diventa

$$E_{2\,\text{usc}} = b^2 a(x, y, 0) e^{i[\omega t + \Phi(x, y, 0)]}. \tag{54.11}$$

L'onda

$$\tilde{E}_2(x, y, z) = b^2 a(x, y, z) e^{i[\omega t + \Phi(x, y, z)]} \tag{54.12}$$

soddisfa evidentemente questa condizione al contorno. Quest'è un'onda che si ottiene dall'onda (54.7*a*) per inversione del senso di propagazione e perciò soddisfa anche l'equazione d'onda (54.5). L'onda $\tilde{E}_2(r, t)$ potrebbe formare un'immagine virtuale dell'oggetto davanti all'ologramma esattamente allo stesso posto dove si trovava l'oggetto stesso quando si registrava l'ologramma. Ma quest'onda si propaga verso l'ologramma e non s'allontana da esso e per questa ragione non può rappresentare la soluzione del problema considerato. Per trovare una soluzione conveniente osserviamo che l'equazione d'onda (54.5) non cambia per inversione del segno di una o più coordinate. Per esempio, se si cambia il segno della coordinata z l'equazione (54.5) si scrive

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial (-z)^2} + k^2 E = 0. \tag{54.5a}$$

Quest'equazione ha evidentemente per soluzione $\tilde{E}_2(x, y, -z)$ e siccome essa è identica all'equazione (54.5), quest'ultima ha la stessa soluzione, cioè

$$E_2 = b^2 a(x, y, -z) e^{i[\omega t + \Phi(x, y, -z)]}. \tag{54.11a}$$

Questa soluzione soddisfa evidentemente la condizione al contorno (54.11) e si deduce dalla (54.12), se si scambiano gli spazi davanti e dietro l'ologramma. La soluzione (54.11a) rappresenta un'onda che *s'allontana dall'ologramma* e quindi essa è la soluzione del problema. L'onda risultante converge dietro l'ologramma e forma là un'*immagine reale* (IR) dell'oggetto. La posizione di quest'immagine è specularmente simmetrica della posizione dell'oggetto stesso rispetto al piano dell'ologramma (fig. 207,*c*). Ma l'occhio può vedere l'immagine reale solo se la osserva dalla parte posteriore, cioè se l'immagine si trova tra l'ologramma e l'occhio. Ne segue che l'immagine reale sarà *pseudoscopica*. Le concavità dell'immagine vengono percepite come convessità e viceversa. (Se l'immagine reale è proiettata su uno schermo essa non sarà pseudoscopica.) Se si esamina l'ologramma perpendicolarmente alla sua superficie, l'immagine reale nasconde l'immagine virtuale, poiché entrambe le immagini si trovano su una stessa linea visiva. La stessa influenza nociva viene esercitata dai raggi diretti del fascio illuminante poiché anch'essi penetrano nell'occhio. Questi inconvenienti sono eliminati utilizzando fasci inclinati (fascio di riferimento e fascio illuminante).

Nel caso dei fasci inclinati, $k_x \neq 0$ ed è necessario trovare una soluzione E_2 che verifichi la condizione al contorno generale (54.8). Ma questo caso è facilmente ricondotto al caso particolare di incidenza normale esaminato sopra. Infatti, se la condizione al limite avesse la forma particolare (54.11), si potrebbe passare alla condizione al contorno generale (54.8), sovrapponendo sull'ologramma un reticolo di diffrazione supplementare avente una trasparenza d'ampiezza $D = e^{-2ik_x x}$. Quest'è un reticolo di fase che produce soltanto uno spettro di ordine meno uno (si veda il § 52, punto 5). Esso si comporta come un prisma, cioè modifica soltanto la direzione del fascio incidente. In conseguenza di ciò l'immagine reale si sposta da un lato, come è indicato nella figura 208,*a*. Questo spostamento deforma naturalmente l'immagine nello stesso modo in cui verrebbe deformato un oggetto esaminato attraverso un prisma. Se l'inclinazione del fascio di riferimento (e quindi di quello illuminante) è troppo forte, si rischia di non ottenere l'immagine reale.

8. Si può evitare la distorsione dell'immagine reale se il fascio illuminante è diretto verso l'ologramma con lo stesso angolo d'inclinazione e nello stesso piano d'incidenza di quello del fascio di riferimento, ma dall'altro lato della normale al piano dell'ologramma. Si avrà allora

$$v_{\text{ill}} = b e^{i(\omega t + k_x x - k_z z)},$$

ed al posto delle condizioni al contorno (54.7) e (54.8) si ottiene rispettiva-

mente

$$E_{1\,\text{usc}} = b^2 a(x, y, 0) e^{i[\omega t - \Phi(x, y, 0) + 2k_x x]}, \tag{54.7b}$$

$$E_{2\,\text{usc}} = b^2 a(x, y, 0) e^{i[\omega t + \Phi(x, y, 0)]}. \tag{54.8b}$$

L'immagine reale si trova ora nella posizione specularmente simmetrica (rispetto al piano dell'ologramma) della posizione occupata dall'oggetto stesso durante la registrazione dell'ologramma. Quest'immagine sarà come prima pseudoscopica ma non deformata. L'immagine virtuale, invece, si sposterà da un lato (fig. 208,b) e sarà deformata come lo sarebbe un oggetto esaminato attraverso un prisma.

9. Dobbiamo ora chiarire il ruolo dell'onda E_4, che deve verificare la condizione al contorno (54.10). È impossibile trovare in questo caso una
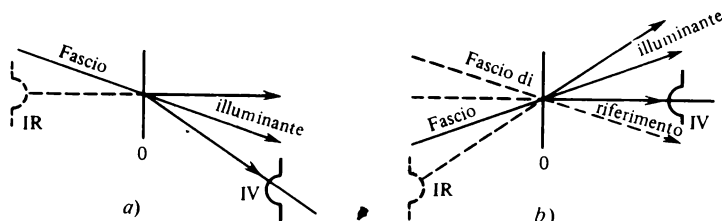
Fig. 208

soluzione senza concretizzare la forma della funzione $a(x, y, 0)$, poiché nella condizione (54.10) figura il suo quadrato. Per trovare E_4 conviene sviluppare nel caso generale la funzione $a^2(x, y, 0)$ in un integrale di Fourier e poi rappresentare mediante il metodo standard (si veda il § 52) l'onda E_4 nella forma di una sovrapposizione di onde piane che si propagano in diverse direzioni. Dietro l'ologramma compare dunque un campo d'onda che crea uno sfondo sul quale si formano le immagini reale e virtuale. L'intensità di questo sfondo dipende dal quadrato dell'ampiezza $a(x, y, z)$ dell'onda diffusa dall'oggetto durante la registrazione dell'ologramma. Perciò per diminuire l'influenza nociva di questo sfondo l'intensità dell'onda di riferimento deve essere molto più grande di quella dell'onda oggetto.

Visto che lo spessore dello strato sensibile sul quale è stato registrato l'ologramma è piccolo, durante la ricostituzione dell'immagine l'ordine delle interferenze sarà più piccolo di quello ottenuto nella registrazione. Per questa ragione si può ottenere un'immagine soddisfacente illuminando l'ologramma con la luce di una lampada a mercurio.

10. Più grandi sono gli angoli sotto i quali convergono i raggi che interferiscono, più fini sono i dettagli della figura d'interferenza, più grande è il potere risolutivo dell'ologramma (si veda il § 57). Al limite del potere risolutivo, la finezza dei dettagli è confrontabile con la lunghezza d'onda. Ma anche se gli angoli di convergenza dei raggi sono di qualche grado la figura

d'interferenza registrata sull'ologramma è ancora molto fine. Per poter registrare tutta la finezza dei dettagli è necessario utilizzare un'emulsione fotosensibile di qualità molto alta. Le esigenze sono particolarmente severe quando si tratta della fotografia a colori di Denissuk dove le onde di riferimento ed oggetto si propagano l'una incontro all'altra (si veda il punto 13). Le lastre fotografiche moderne a grana fine utilizzate in olografia hanno una risoluzione da 1000 a 10 000 tratti per millimetro (distanza tra i tratti uguale a 1000-100 nm). È però da notare che l'aumento del potere risolutivo di un'emulsione è in generale accompagnato da una diminuzione della sua sensibilità.

11. Per ottenere un'immagine non è necessario produrre un ologramma positivo; l'ologramma negativo funziona altrettanto bene. Questo risultato deriva direttamente dal teorema di Babinet. La differenza delle figure di diffrazione formate sugli ologrammi positivi e negativi riguarda soltanto la parte di fascio illuminante trasmessa dietro l'ologramma e non influenza assolutamente i campi d'onda E_1 ed E_2 che forniscono le immagini reale e virtuale. In entrambi i casi la ricostituzione del fronte d'onda fornisce immagini identiche.

È evidente che nella registrazione di un ologramma la condizione $D \sim I_0$, che abbiamo supposto verificata, non può essere esattamente realizzata. Se questa condizione non è verificata, appaiono *immagini supplementari*. Questo è molto facile da spiegare con un esempio in cui le onde oggetto e di riferimento sono piane tutt'e due e cadono sulla lastra fotosensibile con angoli differenti (scegliamo come oggetto un punto luminoso infinitamente lontano). Allora, se la condizione $D \sim I_0$ è verificata, l'ologramma è un reticolo di diffrazione a trasparenza d'ampiezza sinusoidale. Quando questo reticolo viene attraversato dalla luce, accanto allo spettro di ordine zero (cioè parte del fascio trasmesso dietro l'ologramma) si vedono apparire spettri di ordine più uno e meno uno, dei quali uno è l'immagine virtuale e l'altro quella reale dell'oggetto. Se, invece, la condizione $D \sim I_0$ non è verificata, lo sviluppo della funzione $D(x)$ in serie di Fourier contiene armoniche di ordine superiore. Quando l'ologramma è illuminato, insieme con gli spettri dei primi ordini appariranno spettri di ordine superiore, cioè immagini reali e virtuali supplementari. Ma se queste immagini supplementari sono deboli e si formano a grande distanza dall'immagine principale, esse non sono troppo nocive.

Per ottenere una maggior brillanza di un'immagine vengono utilizzati i cosiddetti *ologrammi imbiancati*, preparati da ologrammi ordinari sottoposti ad un trattamento con soluzioni imbiancanti speciali che formano composti trasparenti con l'argento precipitato nell'emulsione dell'ologramma. Si ottiene un ologramma di fase trasparente la cui trasparenza varia in funzione dello spessore e dell'indice di rifrazione dello strato imbiancato. Tale ologramma conserva la sua capacità di formare immagini ottiche. È estremamente importante per le applicazioni pratiche sapere in qua-

le misura l'imbiancamento dell'ologramma e gli scarti dalla condizione $D \sim I_0$ esercitano un'azione sulla qualità delle immagini, ma queste questioni sono difficili da trattare con la teoria e sono di natura tale che non possono essere incluse in un corso di fisica generale.

12. Rispetto alle fotografie ordinarie le immagini olografiche possiedono il vantaggio di essere *tridimensionali*. Le immagini virtuali riproducono senza alcuna deformazione la disposizione spaziale degli oggetti. Se durante l'esame di un ologramma un certo oggetto è occultato da un altro, è sufficiente spostare l'occhio da un lato per vedere anche gli oggetti occultati. Una parte d'ologramma si comporta come un ologramma intero; ad esempio, per ricostruire l'immagine dell'oggetto può essere utilizzato ogni pezzetto di un ologramma rotto. Se si diminuiscono le dimensioni dell'ologramma, vengono indebolite la nettezza (potere risolutivo) e l'impressione di volume dell'immagine. Questa particolarità del metodo olografico è dovuta al fatto che, di regola, durante l'esposizione tutte le parti della lastra fotosensibile sono soggette all'azione della luce diffusa *da tutti i punti dell'oggetto*. Perciò in ogni parte dell'ologramma si conserva in forma codificata l'immagine di tutto l'oggetto. La questione del potere risolutivo degli ologrammi sarà discussa al § 57 (punto 5) come un caso particolare della questione generale del potere risolutivo degli strumenti ottici.

Su una stessa lastra fotosensibile si possono registrare successivamente parecchie immagini ed inoltre ricostituire ognuna di esse senza che le altre disturbino l'immagine. Si può, per esempio, esporre parecchie volte la stessa lastra con lo stesso fascio di riferimento, olografando ogni volta un solo oggetto. Affinché le immagini ricostituite non si sovrappongano, gli oggetti olografati debbono essere sistemati in posti diversi. Si possono anche mettere gli oggetti nello stesso posto a condizione di modificare la direzione del fascio di riferimento. Si possono ottenere immagini a colori, illuminando l'oggetto con tre sorgenti di luce di differenti lunghezze d'onda, scelte in modo che il colore dell'oggetto sia ricostituito in modo più completo. Le stesse tre sorgenti formano i fasci di riferimento, i quali insieme con le onde diffuse dall'oggetto registrano un ologramma unico su una lamina fotosensibile in nero e bianco. Per ricostituire l'immagine, questo « ologramma a tre componenti » viene messo nello stesso posto occupato dall'oggetto durante l'esposizione, ed è simultaneamente illuminato da tre fasci identici ai fasci di riferimento. Ciascun fascio fornisce tre immagini reali e tre immagini virtuali. Queste tre immagini virtuali di colori differenti coincidono nello spazio formando un'immagine a colori. Le altre immagini si formeranno in posizioni diverse e non nocciono all'immagine principale.

13. Gli ologrammi discussi sopra si possono chiamare *bidimensionali*, poiché essi sono costituiti da lastre fotosensibili a strati sottili. Nel 1962 il fisico sovietico Ju.N. Denissuk (nato nel 1927) riuscì ad ottenere ologrammi *tridimensionali*, *di volume*, utilizzando lastre ricoperte con uno *strato fotosensibile spesso*. Il metodo di Denissuk unisce con successo i principi

dell'olografia e della fotografia a colori di Lippmann. Lo spessore dello strato fotosensibile è da 15 a 20 μm, cioè uguale a 30-40 lunghezze d'onda della radiazione verde. Lo strato fotosensibile è tanto trasparente che può trasmettere la luce per illuminare l'oggetto olografato. L'onda monocromatica piana di riferimento, emessa da un laser, cade sulla lastra dal lato del vetro (fig. 209). Dopo aver attraversato la lastra quest'onda illumina l'oggetto da olografare. L'onda diffusa dall'oggetto si propaga incontro all'onda di riferimento interferendo con essa nella massa dello strato fotosensibile. La figura d'interferenza è costituita da onde stazionarie alle quali si sovrappone un complicato disegno formato da massimi e minimi, poiché
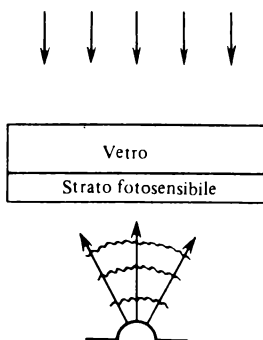
Fig. 209

tra le onde interferenti solo l'onda di riferimento è piana. Dopo aver eseguito lo sviluppo ed il fissaggio, la lastra presenta un ologramma spaziale di Denissuk. Si potrebbe dire che essa è composta da parecchie decine di ologrammi bidimensionali ripartiti nello spessore dell'emulsione.

La ricostituzione dell'onda di riferimento è eseguita per mezzo di un fascio divergente di *luce bianca*. Ogni strato di argento precipitato agisce come un ologramma bidimensionale formando deboli immagini dell'oggetto una virtuale ed una reale. Per interferenza ad onde multiple ha luogo il rafforzamento delle onde la cui lunghezza è uguale a quella della radiazione laser, e nelle direzioni lungo le quali la differenza di fase tra le onde emesse da strati d'argento adiacenti è uguale a 2π. In definitiva appaiono immagini dello stesso colore di quello dei raggi laser. Le altre immagini si distruggono reciprocamente per interferenza.

Questo significa che l'ologramma rende *monocromatica* la luce bianca con la quale è illuminato. È chiaro che questa monocromatizzazione è relativamente non molto alta a causa del piccolo numero di strati d'argento precipitati e per il debole potere risolutivo spettrale dell'ologramma. Inoltre, il colore dell'immagine può essere sostanzialmente differente da quello

della radiazione laser. Ciò è dovuto alla variazione delle distanze tra gli strati anneriti durante lo sviluppo, il fissaggio e l'essiccazione della lastra.

Il metodo di Denissuk, similmente alla fotografia a colori, permette di ottenere immagini *a colori naturali*. A questo scopo su una stessa lastra si forma l'ologramma dell'oggetto mediante tre laser le cui radiazioni sono di differenti lunghezze d'onda. Queste lunghezze d'onda sono scelte in modo che la loro composizione permetta di riprodurre il colore dell'oggetto. Un tale ologramma si comporta come tre ologrammi i quali, illuminati con luce bianca, forniscono immagini sovrapposte di tre colori. Il colore dell'immagine risulta simile a quello dell'oggetto.

Attualmente l'olografia costituisce una branca indipendente della scienza, della tecnica e dell'arte e si sviluppa rapidamente.

§ 55. *Campo luminoso in prossimità di un fuoco*

1. Secondo l'ottica geometrica il campo d'onda al centro di un'onda sferica convergente (fuoco) diventa infinito. Questo testimonia il fatto che l'ottica geometrica cessa di essere valida nel fuoco e nelle sue immediate vicinanze.
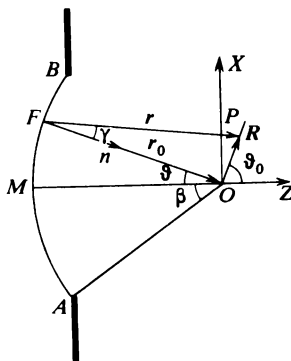
Fig. 210

Consideriamo il problema del campo d'onda nelle vicinanze di un fuoco dal punto di vista dell'ottica ondulatoria. Supponiamo che sul tragitto di un'onda sferica convergente sia interposto un diaframma con apertura *AB* (fig. 210). La parte scoperta *F* del fronte d'onda sia la superficie ausiliaria dalla quale sono emesse le onde secondarie di Huygens. Applicando il metodo approssimato di Fresnel (§ 41), scriviamo il campo sulla superficie

F nella forma

$$E_F = \frac{1}{r_0} e^{i(\omega t + kr_0)}.$$

Se trascuriamo la dipendenza delle ampiezze delle onde secondarie dall'angolo γ (che è piccolo), il campo nel punto d'osservazione è rappresentato dall'integrale

$$E_P \sim e^{i\omega t} \int \frac{e^{ik(r_0 - r)}}{r_0 r} dF,$$

esteso a tutta la superficie scoperta del fronte d'onda. Se il punto P si trova vicino al fuoco O, le distanze r_0 e r del denominatore dell'espressione integranda si possono considerare costanti. Si deve tener conto della differenza tra queste distanze soltanto nel fattore $e^{ik(r_0 - r)}$ che caratterizza la fase. Come si vede nella figura 210, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{R}$. Eleviamo quest'uguaglianza al quadrato, teniamo conto del fatto che $R \ll r_0$, e poi estraiamo la radice quadrata conservando soltanto i termini di primo e di secondo grado in R

$$r - r_0 = \frac{(\boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{R})}{r_0} + \frac{R^2}{2r_0} - \frac{(\boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{R})^2}{r_0^3} = (\boldsymbol{n}\boldsymbol{R}) + \frac{R^2}{2r_0} \sin(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n}),$$

dove $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_0 / r_0$ è il vettore unitario della normale alla superficie F puntato verso il fuoco O. Nel seguito in quest'espressione conserviamo soltanto il termine lineare. Questo si può fare se l'errore introdotto dal termine quadratico è molto piccolo rispetto a π, cioè quando

$$R^2/r_0 \ll \lambda. \tag{55.1}$$

Tenendo conto di quanto esposto, il campo d'onda nel punto P (in unità convenzionali) è dato da

$$E_P = \int e^{i(\omega t - k\boldsymbol{n}\boldsymbol{R})} d\Omega, \tag{55.2}$$

dove $d\Omega = dF/r_0^2$ è l'angolo solido sotto il quale si vede l'elemento di superficie dF dal punto O.

Quando il diaframma viene allontanato all'infinito e la distanza R resta finita, si ha $R^2/r_0 = 0$. Con ciò si elimina la limitazione (55.1) e la (55.2) rappresenta una soluzione esatta del problema, come mostra la struttura stessa dell'espressione (55.2). Infatti, $d\Omega e^{i(\omega t - k\boldsymbol{n}\boldsymbol{R})}$ è un'onda piana che si propaga nella direzione del vettore d'onda $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n}$, e quindi quest'espressione verifica l'equazione d'onda (43.1). L'integrale (55.2) è una sovrapposizione di onde piane di diverse direzioni e quindi è una soluzione esatta della (43.1). Questa soluzione esatta permette di discutere tutti i fenomeni legati al passaggio di un'onda sferica attraverso un fuoco.

2. Se il punto P si trova nel fuoco O, cioè $R = 0$, tutte le onde secondarie arrivano nel punto O con le stesse fasi e quindi l'intensità di luce in que-

sto punto è massima. La formula (55.2) in questo caso dà $E_O = \Omega e^{i\omega t}$. La questione più importante è quella della ripartizione dell'intensità nel piano focale, cioè nel piano passante per il fuoco O perpendicolarmente all'asse MO del fascio. Perché l'integrazione della (55.2) sia facile, supporremo piccolo l'angolo solido Ω, il che permette di sostituire la parte scoperta del fronte d'onda sferico con una superficie piana. Supponiamo anche che il diaframma sia rettangolare di lati $2a$ e $2b$. Le dimensioni angolari di questi lati osservati dal punto O sono rispettivamente uguali a $2\alpha = 2a/r_0$ e $2\beta = = 2b/r_0$. L'origine delle coordinate sia nel punto O e gli assi X e Y siano disposti parallelamente ai lati del diaframma rettangolare. Le coordinate del punto d'osservazione P siano X e Y e le coordinate correnti nel piano del diaframma x e y. Si ha allora $dF = dx\,dy = r_0^2 d\varphi\, d\psi$, $d\Omega = d\varphi\, d\psi$, dove φ e ψ sono gli angoli sotto i quali dal punto O si vedono i segmenti x e y. Inoltre, $(\boldsymbol{nR}) = n_x X + n_y Y = -(x/r_0)X - (y/r_0)Y = -(\varphi X + \psi Y)$. In definitiva l'integrale (55.2) si scrive

$$E_P = e^{i\omega t} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{ik(X\varphi + Y\psi)}\, d\varphi\, d\psi.$$

Quest'è esattamente lo stesso integrale ottenuto nel § 45 nello studio della diffrazione di Fraunhofer su un'apertura rettangolare. Perciò la ripartizione dell'intensità di luce nel piano focale nelle vicinanze del fuoco può essere espressa con la formula

$$I = I_0 \left(\frac{\sin kx\alpha}{kx\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin ky\beta}{ky\beta}\right)^2. \tag{55.3}$$

Nel piano focale si ottiene un sistema di macchie brillanti di forma rettangolare con una macchia centrale brillante (si veda la fig. 179). Le distanze tra due minimi vicini e quella tra il centro del massimo centrale ed il primo minimo sono uguali a

$$\Delta x = \frac{\pi}{k\beta} = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\beta}. \tag{55.4}$$

Vediamo se questo risultato verifica la condizione (55.1). Visto che secondo la formula (55.3) un'intensità di luce notevole si ottiene quando R è dell'ordine di Δx, la formula (55.1) diventa

$$\beta \gg \sqrt{\lambda/r_0}. \tag{55.5}$$

Negli strumenti ottici r_0 deve essere interpretato come la distanza tra la lente (o uno specchio sferico) ed il punto di convergenza geometrica dei raggi. Per esempio, se i raggi convergono nel fuoco principale, r_0 è uguale alla distanza focale f della lente o dello specchio. Essendo piccola la lunghezza d'onda, la condizione (55.5) è molto bene verificata in tutti gli apparecchi ottici. Così, per $f = 10$ cm, $\lambda = 500$ nm si ottiene dalla (55.5) $\beta >$

$> 4 \cdot 10^{-3}$ rad $\approx$ 15′. Perciò le formule dedotte sopra sono applicabili a tutti gli strumenti ottici costituiti da lenti e da specchi.

Nella teoria degli strumenti ottici, il caso più importante è quello di un diaframma circolare. Lo studio di questo caso non presenta nessuna difficoltà. È chiaro che la figura di diffrazione, che si forma nel piano focale, deve avere la forma di anelli concentrici chiari e scuri, a centro brillante (si veda la fig. 180). Per determinare le dimensioni degli anelli di diffrazione è necessario calcolare l'integrale (55.2). Nel caso di un diaframma circolare il risultato dei calcoli è espresso da una funzione di Bessel del primo ordine. I raggi degli anelli scuri sono uguali a

$$R = 0{,}61\lambda/\beta; \quad 1{,}12\lambda/\beta; \quad 1{,}62\lambda/\beta; \ldots, \tag{55.6}$$

dove β è la dimensione angolare del raggio del diaframma visto dal punto O.

3. Determiniamo ora la ripartizione dell'intensità di luce sull'asse MO, supponendo che il fascio di raggi sia limitato da un diaframma circolare. In questo caso nella (55.2) si può porre $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta \, d\vartheta$ (fig. 210). Se il punto P si trova davanti al fuoco, si ha $\mathbf{nR} = -R\cos\vartheta$. Se, invece, questo punto si trova dietro al fuoco, si ha $\mathbf{nR} = R\cos\vartheta$. Secondo la formula (55.2)

$$E_P = 2\pi e^{i\omega t} \int_0^\beta e^{\pm ikR\cos\vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{2\pi e^{i(\omega t \pm kR)}}{\pm ikR} [1 - e^{\pm ikR(\cos\beta - 1)}],$$

dove il segno più concerne il caso in cui il punto d'osservazione si trova a sinistra del fuoco ed il segno meno il caso in cui il punto d'osservazione è situato a destra. Calcolando il modulo di quest'espressione, troviamo l'ampiezza delle vibrazioni del campo sull'asse del fascio

$$a \sim \frac{1}{R} \sin \frac{kR(1 - \cos\beta)}{2}. \tag{55.7}$$

In tutti i piani perpendicolari all'asse del fascio la figura di diffrazione ha la forma di anelli concentrici. Ma, a seconda della posizione di questo piano, il centro della figura può essere sia chiaro, sia scuro. Sull'asse l'ampiezza è nulla quando $kR(1 - \cos\beta) = m\pi$, cioè

$$R = \frac{m\lambda}{1 - \cos\beta} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{55.8}$$

In questo caso nella parte scoperta del fronte d'onda sferico è contenuto un numero pari di zone di Fresnel e quindi il centro degli anelli di diffrazione è scuro. La distanza tra i minimi d'intensità più vicini situati ai due lati del

fuoco è uguale a

$$\delta = \frac{2\lambda}{1 - \cos\beta} \approx \frac{4\lambda}{\beta^2}. \tag{55.9}$$

Questa quantità può servire da misura delle dimensioni longitudinali della regione vicino al fuoco dove è concentrata la luce. Il volume di questa regione è dell'ordine di $\frac{4\lambda}{\beta^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2 = \frac{4\lambda^3}{\beta^4}$.

§ 56. *Potere risolutivo del telescopio e del microscopio*

1. Ammetteremo che i sistemi ottici siano perfetti dal punto di vista dell'ottica geometrica, cioè diano immagini rigorosamente puntiformi di ogni punto dell'oggetto. Secondo l'ottica ondulatoria questo non è vero, poiché, come dimostrato nel paragrafo precedente, l'immagine di un punto luminoso formata nel piano coniugato è una figura di diffrazione composta di anelli concentrici a centro chiaro. La ripartizione dell'intensità della luce in questa figura è rappresentata dalla curva continua della figura 181. La maggior parte dell'energia luminosa (all'incirca l'84%) è concentrata nella macchia di diffrazione centrale. Questa macchia può essere considerata l'immagine del punto luminoso a condizione di trascurare l'energia ripartita tra gli anelli di diffrazione che circondano la macchia centrale detta *cerchio d'Airy* (1801-1892), scienziato che per primo ha effettuato il calcolo della figura di diffrazione di Fraunhofer prodotta da un diaframma circolare.

Ogni oggetto di dimensione finita può essere considerato come un insieme di sorgenti puntiformi; ogni sorgente avrà per immagine un cerchio d'Airy attorniato da anelli di diffrazione. L'immagine di un oggetto è il risultato della sovrapposizione di tali cerchi e degli anelli di diffrazione che li circondano. La teoria deve permettere di calcolare la ripartizione dell'intensità della luce in questa figura di diffrazione. È necessario distinguere due casi limite: 1) *le sorgenti puntiformi non sono coerenti*; 2) *le sorgenti puntiformi sono coerenti.* Nel primo caso s'addizionano le *energie dei campi d'onda*, nel secondo i *campi d'onda* stessi. In modo approssimato il primo caso è realizzato dagli oggetti che *emettono luce*, il secondo caso da quelli illuminati. Il primo caso è importante per la teoria del telescopio ed il secondo per la teoria del microscopio.

Nel caso più semplice l'oggetto composto è costituito da due sorgenti puntiformi S_1 e S_2 (fig. 211). Se la distanza tra i centri dei cerchi d'Airy corrispondenti a queste sorgenti è piccola rispetto alle dimensioni dei cerchi stessi, la ripartizione dell'intensità della luce nell'immagine sarà poco differente da quella di una sorgente unica. Esaminando l'immagine ad occhio

nudo, non si può decidere se l'oggetto è una sorgente puntiforme o se essa è composta di parecchie sorgenti puntiformi ravvicinate. Si dice in questo caso che i punti luminosi non sono risolti dallo strumento ottico. Quando aumenta la distanza tra S_1 e S_2, aumenta anche la distanza tra i centri dei cerchi d'Airy S_1' e S_2' corrispondenti a queste sorgenti, mentre le dimensioni dei cerchi stessi non variano. A partire da una certa distanza minima $l = l_{min}$, sulla curva di ripartizione dell'intensità della luce, al centro, apparirà un avallamento che può essere rivelato dall'occhio o da un altro detettore di luce. Si dice allora che i punti luminosi S_1 e S_2 sono *risolti* dallo strumento ottico. La lunghezza l_{min} si dice *distanza risolvibile dello strumento* (dell'obiettivo) e la quantità inversa $1/l_{min}$ è detta *potere risolutivo.*
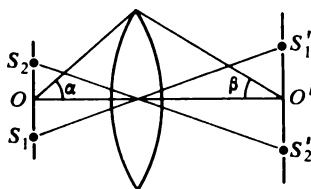
Fig. 211

È impossibile indicare il valore esatto di l_{min} perché esso dipende molto dalle caratteristiche individuali dell'occhio o di qualsiasi altro detettore di radiazione. Si può parlare soltanto di una stima razionale di l_{min}. Secondo Rayleigh, l_{min} è la distanza tra i punti luminosi S_1 e S_2 per la quale la distanza tra i centri dei cerchi d'Airy è uguale al raggio di un cerchio. In questo caso il centro della figura di diffrazione di un punto luminoso si sovrappone al primo minimo della figura di diffrazione prodotta dal secondo punto luminoso. Questo criterio è analogo al criterio di risoluzione spettrale ugualmente suggerito da Rayleigh (si veda il § 47).

2. Per studiare la questione della validità del criterio di Rayleigh in differenti condizioni d'osservazione è necessario calcolare la ripartizione dell'intensità della luce nel piano dell'immagine delle due sorgenti puntiformi S_1 e S_2. A questo scopo si possono utilizzare le formule del paragrafo precedente. Se le sorgenti S_1 e S_2 non sono coerenti, è necessario addizionare le intensità delle figure di diffrazione prodotte da queste sorgenti. Se, invece, esse sono coerenti, è necessario addizionare i campi d'onda e poi calcolare l'intensità del campo d'onda risultante. La ripartizione dell'intensità della luce nel piano dell'immagine di una sola sorgente puntiforme è rappresentata dalla curva continua della figura 181. Per trovare la ripartizione dell'intensità della luce di due sorgenti identiche S_1 e S_2 utilizziamo un metodo grafico.

Consideriamo dapprima il caso in cui le sorgenti S_1 e S_2 non siano coerenti. Nella figura 212 le curve tratteggiate rappresentano la ripartizione

dell'intensità nel piano dell'immagine prodotta da ciascuna delle sorgenti puntiformi. La distanza tra i centri delle figure di diffrazione è supposta uguale a $0{,}61\lambda/\beta$, cioè al raggio del cerchio d'Airy, come esige il criterio di Rayleigh al limite di risoluzione (l'angolo β ha lo stesso significato che aveva nel paragrafo precedente). L'intensità risultante si ottiene per addizione
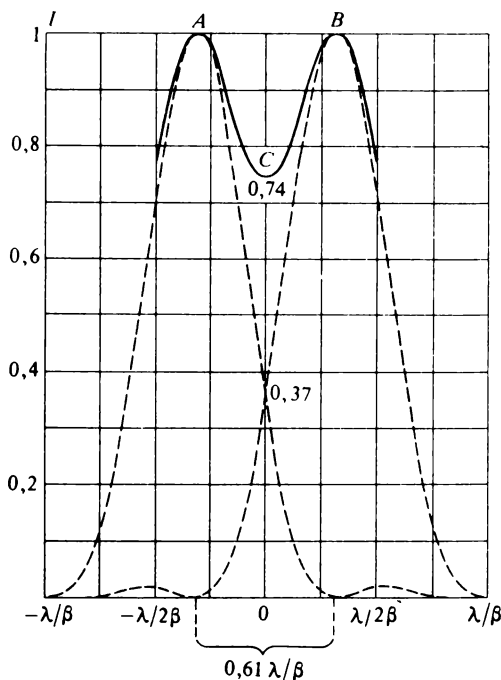
Fig. 212

delle ordinate di entrambe le curve tratteggiate ed è rappresentata con una linea continua. Nel centro C la curva presenta un avallamento in cui l'intensità è del 74% dell'intensità massima. Un occhio medio rivela senza difficoltà la presenza di una diminuzione di intensità, cioè la presenza dell'avvallamento quando l'intensità al centro raggiunge press'a poco l'85% del massimo. Dunque, si può concludere che per la distanza scelta, i punti luminosi possono essere risolti. D'altro canto, avvicinando le curve tratteggiate, è facile stabilire che l'avvallamento, cioè il minimo, sparisce quando la distanza tra i centri dei cerchi d'Airy diminuisce fino a λ/β che differisce molto poco dal limite di Rayleigh $0{,}61\lambda/\beta$. In questo caso la risoluzione manca. Dunque, per sorgenti puntiformi non coerenti il criterio di Rayleigh dà praticamente una condizione necessaria e sufficiente affinché due punti luminosi siano risolti ad una osservazione visuale.

3. Consideriamo ora il caso in cui le sorgenti S_1 e S_2 sono coerenti. Queste sorgenti possono, per esempio, essere costituite da due piccole aperture, praticate in uno schermo opaco, illuminate con luce coerente (fig. 213). Queste aperture si comportano come sorgenti coerenti puntiformi che emettono onde secondarie di Huygens. Supponiamo di illuminarle con un fascio di raggi paralleli inclinati di un angolo ϑ rispetto alla normale al piano dello schermo. Se l è la distanza tra i centri, la differenza di fase tra le onde che arrivano su queste aperture, è $\Delta = (2\pi/\lambda)l \sin \vartheta$. Questa è anche la differenza di fase tra le vibrazioni nel centro della figura di diffrazione, cioè nel punto centrale del segmento che separa i centri dei cerchi d'Airy,
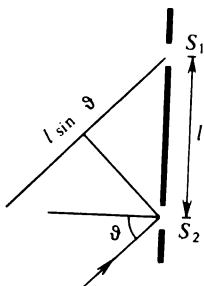
Fig. 213

prodotti dalle sorgenti S_1 e S_2. L'intensità luminosa in questo punto è

$$I_C = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta = 2I_1(1 + \cos \Delta) = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta}{2}.$$

Si osserva qui una differenza di principio dal caso delle sorgenti non coerenti: l'apparizione di un termine supplementare, il termine interferenziale. La presenza di questo termine influenza il criterio di risoluzione ed il potere risolutivo dell'obiettivo. Facendo variare l'angolo ϑ si può aumentare il potere risolutivo dell'obiettivo.

Se la luce che illumina le aperture S_1 e S_2 cade normalmente sul piano dello schermo, si ha $\Delta = 0$ e, quindi, $I_C = 4I_1$. Ammettiamo che in questo caso la distanza tra i centri dei cerchi di diffrazione d'Airy sia uguale al raggio di un solo cerchio, cioè alla distanza minima richiesta dal criterio di Rayleigh per la risoluzione dei punti luminosi. In queste condizioni, come abbiamo visto prima, l'intensità I_1 è uguale al 37% dell'intensità massima prodotta al centro del cerchio d'Airy da una sola sorgente di luce. Perciò l'intensità risultante al centro della figura di diffrazione sarà uguale a $4 \cdot 37 = 148\%$ della stessa intensità massima. La ripartizione dell'intensità luminosa per il caso esaminato è rappresentata nella figura 214. Le curve tratteggiate rappresentano come prima le intensità prodotte separatamente dalle sorgenti S_1 e S_2, e la curva continua rappresenta l'intensità risultante.

Sulla curva dell'intensità risultante c'è un solo massimo C. Quindi nel caso considerato non si può avere nessun'immagine separata dei punti luminosi. Per averla è necessario allontanare i centri dei cerchi di Airy ad una distanza all'incirca 1,2 volte superiore al limite di Rayleigh.

Esaminiamo ora il caso di un illuminamento obliquo. Se $\Delta = \pi/2$, cioè la differenza di cammino tra i raggi che illuminano S_1 e S_2, è uguale a $\lambda/4$,
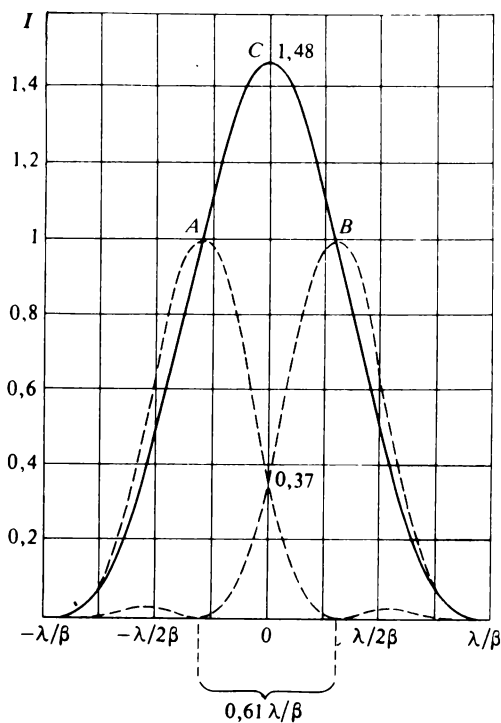
Fig. 214

si ha cos $\Delta = 0$. Il termine interferenziale scompare e si ottiene la stessa ripartizione dell'intensità luminosa, e con essa lo stesso criterio di risoluzione, ottenuta nel caso di punti luminosi non coerenti. Se $\Delta = \pi$ e di conseguenza $l = \lambda/(2 \sin \vartheta)$, il che è possibile soltanto per $l \geqslant \lambda/2$, al centro della figura di diffrazione si ottiene sempre intensità nulla, e perciò la separazione dei massimi è realizzata in modo particolarmente netto. Nella figura 215 è rappresentata la ripartizione delle intensità per il caso considerato supponendo che i centri dei cerchi d'Airy siano ad una distanza uguale al limite di Rayleigh. Per incidenza radente dei raggi, questi centri possono essere ravvicinati ad una distanza circa due volte più piccola della distanza limite di Rayleigh e ciò nonostante la cavità sulla curva dell'intensità lumi-

nosa non sparisce. Questo significa che un illuminamento obliquo porta ad un aumento del potere risolutivo. Nel caso di incidenza radente il potere risolutivo cresce quasi due volte rispetto al caso di punti luminosi non coerenti.

È ora facile comprendere che cosa ci si deve aspettare quando l'oggetto è illuminato con raggi aventi direzioni diverse ed inviati da una sorgente estesa. A raggi normali corrisponde il più piccolo potere risolutivo e la maggior distanza risolvibile, che supera la corrispondente distanza per i punti luminosi non coerenti. Con il crescere dell'angolo d'inclinazione dei
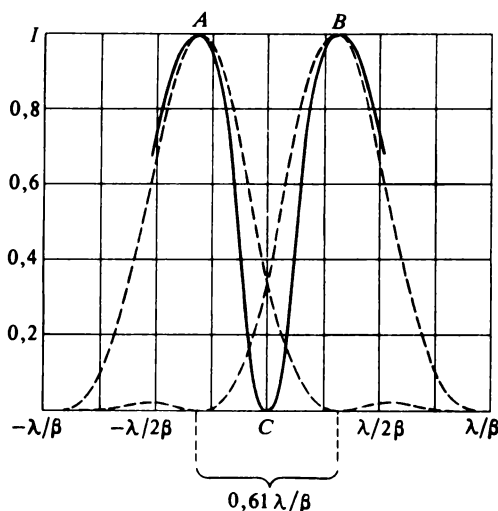
Fig. 215

raggi la distanza risolvibile diminuisce. Quando l'incidenza diventa tale che la differenza di fase Δ diventa uguale a $\pi/2$, l'intervallo risolvibile diventa uguale a quello per sorgenti non coerenti. Aumentando ancora l'inclinazione, la distanza risolvibile continua a diminuire in modo monotono e per incidenza radente diventa quasi due volte più piccola della corrispondente distanza per sorgenti non coerenti. È perciò naturale attendersi, e questo è confermato dai calcoli, che quando l'oggetto è illuminato da fasci larghi si ottiene la stessa ripartizione dell'intensità luminosa nella figura di diffrazione e lo stesso criterio di risoluzione che con sorgenti di luce non coerenti.

Dunque, la distanza risolvibile varia con la variazione delle condizioni d'illuminamento e non può essere definita che in modo approssimato. È anche necessario sottolineare ancora una volta che i risultati ottenuti si riferiscono ad osservazioni visuali. L'applicazione di altri metodi fisici di studio può abbassare il limite risolvibile.

4. Nel caso del telescopio gli oggetti osservati, per esempio, le compo-

nenti di una stella doppia, irradiano sempre in modo *non coerente*. Per il telescopio è importante la *distanza risolvibile angolare* e non quella lineare. Se ϑ è la distanza angolare tra le stelle osservate (fig. 216), la distanza tra i centri dei corrispondenti cerchi d'Airy nel piano focale è uguale a $x = S_1' S_2' = f\vartheta$, dove f è la distanza focale dell'obiettivo. Secondo il criterio di Rayleigh, per la risoluzione delle stelle questa distanza deve essere non inferiore a $0{,}61\lambda/\beta$, cioè $f\vartheta \geqslant 0{,}61\lambda/\beta$. Tenendo conto del fatto che per
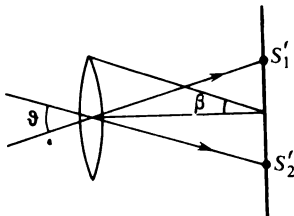
Fig. 216

angoli piccoli $f\beta = D/2$, dove D è il diametro dell'obiettivo, otteniamo

$$\vartheta \geqslant 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}. \qquad (56.1)$$

La distanza risolvibile angolare è uguale a

$$\vartheta_{\min} = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}. \qquad (56.2)$$

L'occhio, osservando oggetti lontani, agisce in linea di principio come l'obiettivo di un telescopio. Per questa ragione le formule (56.1) e (56.2) sono valide anche per l'occhio. D rappresenta il diametro d della pupilla dell'occhio. Ponendo $d = 4$ mm, $\lambda = 550$ nm, troviamo che la distanza risolvibile dell'occhio umano

$$\vartheta_{\text{occhio}} = 1{,}22\frac{\lambda}{d} = 1{,}68\cdot 10^{-4}\,\text{rad} = 35''. \qquad (56.3)$$

Questo risultato concorda molto bene con la stima fisiologica del potere risolutivo dell'occhio (si veda il § 21, punto 7). È degna d'ammirazione la capacità dell'organismo vivente di adattarsi alle condizioni ambientali e di raggiungere nel processo evolutivo il massimo di ciò che è in linea di principio ammissibile dalle leggi della natura.

Quindi il potere risolutivo del telescopio è proporzionale al diametro del suo obiettivo. Il più grande telescopio riflettore del mondo (si veda il § 24) è munito di uno specchio parabolico di diametro $D = 6$ m. Il suo potere risolutivo teorico è superiore a quello dell'occhio umano di $6000/4 =$

= 1500 volte. La distanza risolvibile teorica è uguale a 35''/1500 = = 0,023''. Per il telescopio riflettore dell'osservatorio di Mont-Palomar, che ha uno specchio di diametro 5 m, la distanza risolvibile teorica è uguale a 0,028''. Il potere risolutivo di questi telescopi giganteschi è sufficiente perché le immagini delle stelle con le più grandi dimensioni angolari appaiano in forma di dischi, come le immagini dei pianeti.

Ma l'esistenza dell'atmosfera terrestre non permette di utilizzare completamente il potere risolutivo dei telescopi. I processi irregolari nell'atmosfera, accompagnati da variazioni dell'indice di rifrazione sul tragitto dei raggi luminosi, danneggiano le immagini ed abbassano il potere risolutivo reale dei telescopi fino a 1''-0,5''; quest'abbassamento è sentito in modo particolarmente notevole dai grandi telescopi. Questo potere risolutivo può essere ottenuto con obiettivi molto più piccoli. I grandi telescopi sono costruiti non per aumentare il potere risolutivo, ma per poter *aumentare la quantità di luce* inviata nei telescopi dagli oggetti celesti osservati. Poiché la quantità di luce è proporzionale all'area dell'obiettivo, con i grandi telescopi si può rivelare e fotografare gli oggetti celesti più piccoli. Invece, per aumentare il potere risolutivo dei telescopi astronomici è necessario eliminare l'influenza nociva dell'atmosfera. Nuove prospettive si aprono davanti a telescopi installati su navi spaziali ed ancor meglio sulla Luna.

5. L'ingrandimento di un telescopio deve essere accordato con il potere risolutivo del suo obiettivo. Supponiamo che la dimensione angolare dell'oggetto osservato sia uguale all'angolo minimo ϑ_{min} di risoluzione dell'obiettivo. Se l'ingrandimento angolare del telescopio è uguale a N, l'oggetto viene visto nel telescopio sotto l'angolo $N\vartheta_{min}$. Per utilizzare interamente il potere risolutivo del telescopio è necessario che questo angolo sia risolto dall'occhio, cioè dev'essere $N\vartheta_{min} \geqslant \vartheta_{occhio}$. Sostituendo qui i valori di ϑ_{min} e ϑ_{occhio} dalle formule (56.2) e (56.3), otteniamo

$$N \geqslant \frac{D}{d} \equiv N_{norm} \tag{56.4}$$

dove N_{norm} è l'ingrandimento normale del telescopio (si veda il § 23, punto 4).

Nel § 11 (punto 10) è stato mostrato che $N = D/h$, cioè l'ingrandimento del telescopio è uguale al rapporto tra la larghezza D del fascio parallelo incidente e la larghezza h del fascio emergente. Quando l'ingrandimento è inferiore a quello normale, cioè $D/h < D/d$, si ha $h > d$. Vuol dire che non tutto il fascio che arriva sull'obiettivo è percepito dall'occhio. La parte efficace dell'obiettivo è soltanto quella centrale, il cui diametro è inferiore a D. Il telescopio si comporta come se il suo obiettivo ed il potere risolutivo diminuissero. Se l'ingrandimento è normale, si ha $h = d$ ed il potere risolutivo dell'obiettivo è accordato con quello dell'occhio. Infine, quando l'ingrandimento è superiore a quello normale, cioè $D/h > D/d$, si ha $h < d$. In questo caso l'occhio si comporta come se la sua pupilla si restringesse ed il potere risolutivo diminuisse.

L'utilizzazione di ingrandimenti superiori a quello normale non può rivelare nuovi dettagli dell'oggetto osservato. Gli ingrandimenti molto superiori all'ingrandimento normale sono soltanto nocivi, poiché una diminuzione troppo forte della larghezza del fascio emergente può causare distorsioni di diffrazione dell'immagine. Ma per ragioni fisiologiche è a volte raccomandato di utilizzare ingrandimenti da 2 a 4 volte maggiori dell'ingrandimento normale. Esaminando i dettagli al limite del suo potere risolutivo, l'occhio funziona con intensità e si stanca presto, la sua sensibilità ed il potere risolutivo diminuiscono. L'uso di ingrandimenti un po' più alti dell'ingrandimento normale non rivela nuovi particolari nella struttura degli oggetti esaminati, ma permette di esaminarli con minore fatica. Alle
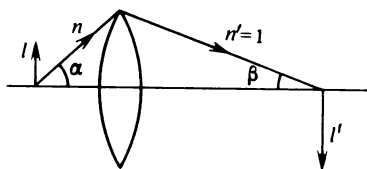
Fig. 217

stesse conclusioni siamo arrivati nel § 23 sulla base di considerazioni fotometriche.

6. La questione del potere risolutivo di un microscopio si tratta come quella del telescopio. Il criterio di risoluzione di Rayleigh impone in questo caso che

$$l' \geqslant 0{,}61 \frac{\lambda}{\beta}, \tag{56.5}$$

dove l' è la distanza tra i centri dei cerchi di Airy per i due punti luminosi esaminati (si suppone che l'angolo d'apertura 2β dalla parte dell'immagine sia piccolo). Per passare alle dimensioni lineari dell'oggetto stesso, si deve utilizzare la condizione dei seni d'Abbe, che deve essere verificata dagli obiettivi dei microscopi. Per piccoli angoli β (fig. 217) questa condizione può essere scritta nella forma $ln \sin \alpha = l'\beta$, dove n è l'indice di rifrazione dello spazio oggetto e 2α è l'angolo d'apertura dalla parte di questo spazio. Eliminando β e l', otteniamo la relazione

$$l \geqslant 0{,}61 \frac{\lambda}{n \sin \alpha}, \tag{56.6}$$

la quale definisce il limite di risoluzione del microscopio. La distanza minima risolvibile (a meno di un piccolo fattore numerico) è uguale a

$$l_{\min} = 0{,}61 \frac{\lambda}{n \sin \alpha}. \tag{56.7}$$

Questo limite di risoluzione dipende dalla *natura ondulatoria della luce* e non può essere sorpassato da nessun perfezionamento tecnico del microscopio. A parità di condizioni, il limite di risoluzione è tanto minore quanto più corta è la lunghezza d'onda. La presenza nel denominatore dell'indice di rifrazione n è dovuta al fatto che la distanza risolvibile può dipendere direttamente dalla lunghezza d'onda *nel mezzo in cui si trova l'oggetto*, cioè dal valore di λ/n, e non dalla lunghezza d'onda nel vuoto.

È facile verificare che, per piccole aperture, la formula (56.7) si trasforma nella formula (56.2) che definisce il potere risolutivo di un telescopio. In questo caso le formule differiscono l'una dall'altra soltanto per la forma: nella formula (56.7) la distanza risolvibile è espressa in unità lineari e nella (56.2) in unità angolari.

Per aumentare il potere risolutivo di un microscopio si può procedere per due vie: 1) diminuire la lunghezza d'onda (passaggio all'ultravioletto); 2) aumentare l'apertura numerica $n \sin \alpha$ dell'obiettivo. Quindi, l'angolo α deve essere il più grande possibile. Nei migliori obiettivi moderni quest'angolo ha praticamente raggiunto il suo limite teorico $\alpha = \pi/2$. Per aumentare l'apertura numerica si utilizzano anche obiettivi ad immersione, cioè si introduce un liquido ad indice di rifrazione il più grande possibile che riempie lo spazio tra il vetrino coprioggetto e la lente frontale dell'obiettivo (si veda il § 18, punto 4). Ponendo $n \approx 1{,}5$, il valore dell'apertura numerica sarà uguale a $n \sin \alpha \approx 1{,}5$. Dunque, l'utilizzazione dell'imersione permette di diminuire il limite risolvibile di circa 1,5 volte, cioè si arriva a $l \approx \approx 0{,}61\lambda/1{,}5 \approx 0{,}4\lambda$. I dettagli dell'oggetto le cui dimensioni sono inferiori a $0{,}4\lambda$ non possono essere per principio rivelati con un microscopio. Nessun ingrandimento permette di determinare la forma di un oggetto esaminandolo al microscopio, se le dimensioni dell'oggetto stesso sono inferiori a $0{,}4\lambda$. Al microscopio si possono rivelare oggetti di dimensioni più piccole solo se essi sono molto luminosi (ultramicroscopio), ma è impossibile determinare la loro forma.

Un aumento radicale del potere risolutivo è realizzato nel microscopio elettronico dove i raggi luminosi sono sostituiti da elettroni focalizzati da lenti elettriche e magnetiche. Gli elettroni si comportano come onde a lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathscr{E}}},$$

dove h è la costante di Planck, m la massa, p l'impulso ed $\mathscr{E}$ l'energia dell'elettrone. Queste onde si chiamano *onde di de Broglie* (nato nel 1892). Per $\mathscr{E} = 10000$ eV la formula riportata dà $\lambda = 0{,}0122$ nm. Questa lunghezza d'onda è 10 volte più piccola delle dimensioni dell'atomo. Ma questa risoluzione non è raggiunta nel microscopio elettronico, poiché per diminuire le aberrazioni geometriche si è costretti ad utilizzare fasci parassiali

stretti a piccola apertura. Ma persino con questi fasci il microscopio elettronico permette di risolvere dettagli le cui dimensioni sono alcune volte più grandi di quelle dell'atomo.

7. Per concludere esaminiamo la questione dell'ingrandimento più razionale nell'utilizzazione di un microscopio. Ricordiamo che si dice ingrandimento di un microscopio (o di una lente) il rapporto tra l'angolo sotto il quale si vede un oggetto al microscopio, all'angolo sotto il quale quest'oggetto sarebbe visto ad occhio nudo se fosse sistemato alla distanza della visione distinta. Sia l_{min} la distanza minima risolta dal microscopio. Ad occhio nudo alla distanza della visione distinta quest'intervallo si vede sotto l'angolo $\vartheta = l_{min}/L$. Al microscopio la stessa distanza si vede sotto l'angolo $\vartheta' = N\vartheta$. Per la risoluzione è necessario che l'angolo ϑ' non sia inferiore all'angolo minimo risolto dall'occhio, cioè $\vartheta' = N\vartheta \geqslant \vartheta_{occhio}$. Di qui, utilizzando le espressioni (56.3) e (56.7), troviamo

$$N \geqslant \frac{2Ln \sin \alpha}{d}. \tag{56.8}$$

Al segno d'uguaglianza corrisponde l'ingrandimento normale

$$N_{norm} = \frac{2Ln \sin \alpha}{d}. \tag{56.9}$$

Come per il telescopio, l'ingrandimento normale di un microscopio è il più piccolo ingrandimento che permette di utilizzare completamente il potere risolutivo dell'obiettivo. Quanto all'opportunità di lavorare con ingrandimenti superiori all'ingrandimento normale, per il microscopio si può ripetere senza alcuna modifica tutto ciò che è stato detto per il telescopio.

L'apertura numerica massima per i sistemi a secco ha come limite l'unità. Per i sistemi ad immersione questo limite è all'incirca uguale a 1,5. Il diametro d della pupilla dell'occhio è circa uguale a 2 mm. Per un occhio normale (L = 25 cm) si ottengono allora i seguenti valori limite per l'ingrandimento normale:

per i sistemi a secco $N_{norm} = 250$,
per i sistemi d'immersione $N_{norm} = 375$.

Per ragioni fisiologiche si raccomanda di utilizzare ingrandimenti un po' più grandi, ma è privo di senso costruire microscopi aventi ingrandimenti superiori a 1000-1500.

§ 57. *Teoria ed esperimenti di Abbe*

1. Il limite di risoluzione dell'obiettivo di un microscopio è stato determinato per la prima volta nel 1874 da Helmholtz, i cui calcoli riguardavano *oggetti luminosi*. Press'a poco allo stesso tempo ed indipendentemente da

Helmholtz, la questione del potere risolutivo di un microscopio fu analizzata da Abbe, nel caso di *oggetti illuminati*. Proprio quest'ultimo caso riguarda il microscopio. La qualità delle immagini formate dal microscopio dipende molto dall'illuminamento dell'oggetto. D.S. Roždestvenskij (1876-1940) studiò profondamente questa questione negli ultimi anni della sua vita. Noi esporremo il metodo di Abbe con qualche modifica e qualche complemento rispetto all'esposizione originale.

Supponiamo dapprima che l'oggetto sia un reticolo di diffrazione piano molto grande (infinito), illuminato da un fascio di raggi paralleli di luce monocromatica. La luce trasmessa è composta da una serie discreta di onde piane (fasci diffratti o spettri di diversi ordini) che si propagano dal reticolo in diverse direzioni. I fasci di piccolo ordine sono onde omogenee,
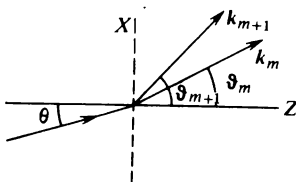
Fig. 218

mentre i fasci di ordine superiore ad un certo valore saranno onde non omogenee o evanescenti (si veda il § 52). Le onde non omogenee smorzandosi a distanze dell'ordine della lunghezza d'onda non pervengono all'obiettivo e quindi non influenzano l'immagine prodotta.

2. Supponiamo che davanti all'obiettivo sia interposto un diaframma che lascia passare spettri di ordini determinati. Se il diaframma lascia passare solo il fascio d'ordine zero, la luce trasmessa sarà composta da una sola onda omogenea piana, e tutto avviene come se al posto del reticolo di diffrazione si trovasse una lamina perfettamente piano-parallela trasparente. Questa luce non fornisce alcun'informazione della struttura dell'oggetto osservato. Nel piano immagine, coniugato al piano del reticolo, si ottiene un campo uniformemente illuminato.

Prendiamo ora un diaframma tale che esso lasci passare soltanto due spettri di ordini vicini, per esempio di ordine m e $m + 1$ (fig. 218). Dietro il reticolo saranno efficaci soltanto due onde omogenee che si propagano in direzioni diverse e che interferiscono

$$E_m = a_m \cos(\omega t - \boldsymbol{k}_m \boldsymbol{r}),$$
$$E_{m+1} = a_{m+1} \cos(\omega t - \boldsymbol{k}_{m+1} \boldsymbol{r}).$$

Il piano del reticolo sia il piano coordinato XY, con l'asse X orientato perpendicolarmente ai tratti del reticolo, e l'asse Z orientato nella direzione di propagazione della luce incidente. Le frange d'interferenza in tutto il pia-

no z = costante, parallelo al piano del reticolo, sono parallele alle fenditure del reticolo. Calcoliamo la distanza Δx tra esse. La differenza di fase tra le onde considerate nel piano indicato è rappresentata dall'espressione

$$\varphi = (\mathbf{k}_{m+1} - \mathbf{k}_m)\mathbf{r} = (k_{m+1,x} - k_{m,x})x + (k_{m+1,z} - k_{m,z})z.$$

Quando x varia di Δx, φ varia di $\Delta\varphi = (k_{m+1,x} - k_{m,x})\Delta x$. L'intensità luminosa riprende periodicamente lo stesso valore quando $\Delta\varphi = 2\pi, 4\pi, \ldots$ Per trovare la larghezza Δx di una frangia d'interferenza è sufficiente porre $\Delta\varphi = 2\pi$. Le direzioni verso i massimi di diffrazione degli ordini considerati sono definite dalle formule

$$d(\sin\vartheta_m - \sin\theta) = m\lambda, \quad d(\sin\vartheta_{m+1} - \sin\theta) = (m+1)\lambda,$$

dove θ è l'angolo con cui la luce cade sul reticolo. Di qui $d(\sin\vartheta_{m+1} - \sin\vartheta_m) = \lambda$. Ma $k_{mx} = (2\pi/\lambda)\sin\vartheta_m$, $k_{m+1,x} = (2\pi/\lambda)\sin\vartheta_{m+1}$ e quindi

$$k_{m+1,x} - k_{mx} = (2\pi/\lambda)(\sin\vartheta_{m+1} - \sin\vartheta_m) = 2\pi/d.$$

Ne segue che la larghezza di una frangia d'interferenza è $\Delta x = 2\pi : (2\pi/d) = d$ indipendentemente dalla direzione del fascio incidente. In particolare, un tale sistema di frange d'interferenza si forma all'uscita del reticolo stesso, cioè nel piano $z = 0$. L'obiettivo forma un'immagine di questo sistema di frange nel piano immagine coniugato al piano del reticolo (si veda il § 27, punto 6). Quest'immagine riproduce la caratteristica essenziale della struttura del reticolo, e cioè la sua periodicità di periodo d. La ripartizione dell'intensità nel piano immagine è sinusoidale, cioè la stessa che si avrebbe con un reticolo sinusoidale di Rayleigh. Affinché l'immagine riproduca i più fini dettagli dell'oggetto, è necessario aumentare l'apertura del diaframma. Dietro il reticolo appariranno allora onde diffratte piane che differiscono l'una dall'altra non solo di un ordine ma anche di 2, 3, ... ordini. Ragionando come prima, è facile dimostrare che l'interferenza di due onde, i cui ordini differiscono di Δm, produrrà frange d'interferenza di larghezza $\Delta x = d/\Delta m$.

La struttura di un reticolo può essere caratterizzata sviluppando la sua trasparenza in serie di Fourier. Un'immagine perfettamente simile all'oggetto si può ottenere se l'intensità luminosa nel piano immagine è rappresentata da una serie di Fourier con gli stessi coefficienti dello sviluppo precedente. Ma ciò non si realizza mai, poiché in questa serie vengono eliminate le componenti corrispondenti alle onde non omogenee ed a quelle onde che sono arrestate dal diaframma. Più grande è il numero di onde diffratte di ordine diverso che attraversano il diaframma, migliore è l'immagine.

3. Se, determinando il potere risolutivo, ci possiamo limitare all'immagine meno perfetta che riproduce ancora correttamente la struttura del reticolo di periodo d, il potere risolutivo dell'obiettivo del microscopio si può determinare come segue. Supponiamo che il reticolo sia illuminato dai rag-

gi luminosi incidenti normalmente (fig. 219,*a*). Per avere una buona risoluzione è allora necessario che, insieme con il fascio trasmesso direttamente, nell'obiettivo penetrino anche fasci diffratti di ordine più e meno uno. Nel caso di un obiettivo a immersione con un liquido a indice di rifrazione n, il periodo minimo del reticolo per il quale è verificata questa condizione è $d \sin \alpha = \lambda/n$, dove λ è la lunghezza d'onda nel vuoto. Di qui si deduce la distanza minima risolvibile dall'obiettivo del microscopio

$$l_{\min} = \frac{\lambda}{n \sin \alpha}. \tag{57.1}$$

Il risultato ottenuto differisce dalla (56.7) solo per un fattore numerico poco importante. La differenza tra i fattori numerici è dovuta ad una differenza tra i criteri di risoluzione utilizzati per la deduzione delle formule
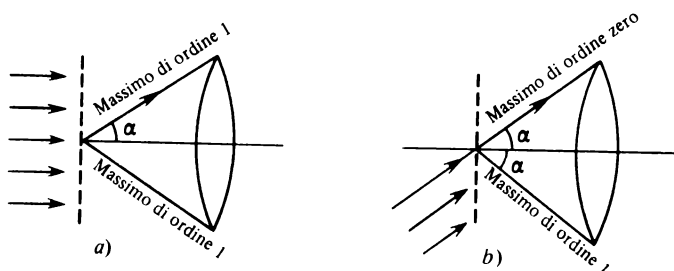
Fig. 219

(56.7) e (57.1), nonché al fatto che la formula (56.7) si riferisce alla risoluzione di oggetti puntiformi e la (57.1) alla risoluzione di oggetti lineari.

Il limite risolvibile (57.1) può essere abbassato utilizzando un illuminamento obliquo dell'oggetto. Se l'incidenza è normale, dietro il reticolo interferiscono tre fasci. Per interferenza del fascio di ordine zero e di uno dei fasci di ordine uno si ottiene un'immagine che rivela l'esistenza di una struttura di periodo principale d. La stessa figura d'interferenza si ottiene per sovrapposizione del fascio di ordine zero con l'altro fascio del primo ordine. Il secondo fascio del primo ordine rafforza semplicemente l'azione dell'altro fascio dello stesso ordine. Inoltre, i fasci del primo ordine interferiscono tra loro ed in conseguenza di ciò sulla figura d'interferenza sono sovrapposte nuove frange più deboli, la distanza tra le quali è la metà, cioè è uguale a $d/2$. Quest'è una manifestazione dell'azione esercitata dalle prime armoniche che figurano nello sviluppo della trasparenza del reticolo in serie di Fourier. Senza modificare il periodo principale dell'immagine del reticolo, esse rafforzano un po' la sua nettezza. Ma per rivelare l'esistenza di una struttura di periodo principale d, come abbiamo visto sopra, sono sufficienti *due* fasci vicini, per esempio un fascio di ordine zero ed uno dei

fasci di ordine uno. La massima risoluzione possibile si ottiene se il fascio illuminante è inclinato di un angolo α sul piano del reticolo, come è indicato nella figura 219,*b*. Si avrà allora $2d \sin \alpha = \lambda/n$ e di conseguenza

$$l_{\min} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{n \sin \alpha}, \tag{57.2}$$

che è due volte più piccola della (57.1).

4. Il potere risolutivo del microscopio può essere aumentato variando la direzione dei raggi illuminanti. Ma l'influenza del metodo d'illuminamento sull'immagine al microscopio non è limitata da ciò, essa è più sostanziale. Se illuminiamo il reticolo con un fascio di raggi paralleli, la figura d'interferenza dietro il reticolo, come è stato detto sopra, avrebbe in ogni piano Π, parallelo ad esso, la forma di frange parallele d'interfrangia d. Queste frange *non sono localizzate*. L'immagine osservata al microscopio avrebbe lo stesso aspetto, indipendentemente da dove è focalizzato il microscopio: sul piano del reticolo o su un qualsiasi piano parallelo. Per eliminare questo difetto gli oggetti sono illuminati con fasci di raggi di diverse direzioni e di grande apertura. Le frange d'interferenza prodotte dai fasci di raggi paralleli di diverse direzioni sono spostate le une rispetto alle altre lungo l'asse X. Perciò in tutti i piani Π le frange d'interferenza si distruggono reciprocamente, eccezion fatta per il piano Π che coincide con il piano del reticolo stesso. In questo caso tutte le frange d'interferenza prodotte da fasci di diverse direzioni coincidono spazialmente. Perciò l'immagine dell'oggetto esaminato al microscopio può formarsi solo se questo fascio è focalizzato sul piano dell'oggetto stesso. Quest'è la ragione principale dell'utilizzazione di aperture larghe per l'illuminazione degli oggetti esaminati al microscopio.

5. Come oggetto è stato preso un reticolo di diffrazione solo per semplificare i ragionamenti, ma questa semplificazione non influisce sul principio. Se si prende un oggetto di forma qualsiasi e lo si illumina con un fascio di raggi paralleli, dietro l'oggetto appariranno fasci diffratti di diverse direzioni che presentano massimi e minimi. L'angolo di diffrazione ϑ, che caratterizza la direzione del primo minimo di diffrazione, è definito dalla formula $nl \sin \vartheta \sim \lambda$, dove l è la dimensione lineare dell'oggetto. Se il diaframma utilizzato lascia passare solo una piccola parte del fascio diffratto centrale, l'immagine formata nel microscopio sarà uguale a quella che si ottiene con un oggetto puntiforme che emette regolarmente onde sferiche in tutte le direzioni. Quale che sia la forma dell'oggetto, l'immagine sarà allora un cerchio di diffrazione d'Airy senza alcuna risoluzione. La più piccola dimensione $l_{\min}$ dell'oggetto per la quale è possibile la risoluzione è definita dalla condizione $\vartheta \sim \alpha$, cioè

$$l_{\min} \sim \frac{\lambda}{n \sin \alpha}. \tag{57.3}$$

Abbiamo ottenuto nuovamente una formula del tipo (57.1) o (57.2).

Il ragionamento resta valido se la luce, dopo la diffusione sull'oggetto, anziché nell'obiettivo cade su una lastra fotosensibile e registra su essa un ologramma. Dai ragionamenti precedenti segue che la più piccola dimensione dell'oggetto che può essere registrata su un ologramma è data dalla formula

$$l_{min} \sim \lambda/\alpha, \tag{57.4}$$

dove α è la dimensione angolare dell'ologramma visto dal punto dove si trova l'oggetto durante la registrazione (si suppone che l'oggetto sia piccolo).

6. Abbe stesso espose questa teoria nella forma seguente. Ogni fascio di raggi paralleli formato in conseguenza di una diffrazione sull'oggetto AB (per esempio su un reticolo di diffrazione) è focalizzato dall'obiettivo in un
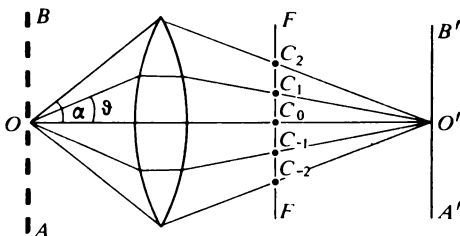
Fig. 220

punto del piano focale (fig. 220). La figura di diffrazione formata nel piano focale e composta da un insieme di punti C_0, C_1, C_{-1}, C_2, C_{-2}, ... è stata chiamata da Abbe *immagine primaria dell'oggetto*. Se è nota l'immagine primaria, con l'aiuto del principio di Huygens-Fresnel si può calcolare il campo luminoso in tutto lo spazio dietro il piano focale. In particolare, l'immagine dell'oggetto non è altro che la figura d'interferenza che si forma nel piano immagine in conseguenza dell'interferenza delle onde secondarie di Huygens inviate dai differenti punti dell'immagine primaria. Abbe chiamò questa figura d'interferenza *immagine secondaria*.

Se il diaframma dell'obiettivo lascia passare il solo fascio diffratto centrale, l'immagine primaria è costituita da un solo massimo puntiforme centrale. Si ottiene soltanto un'onda secondaria sferica emessa da questo massimo centrale e quindi non vi è interferenza. L'immagine secondaria è quindi senza struttura e l'unico risultato è un campo illuminato in modo più o meno uniforme. Per ottenere una struttura qualsiasi nell'immagine secondaria è necessario che l'immagine primaria sia composta da almeno due massimi di diffrazione puntiformi. Ma questa condizione è uguale a quella utilizzata per dedurre le formule (57.1) e (57.2).

Se occultiamo certi massimi di diffrazione formati nel piano focale,

l'immagine secondaria sarà deformata. Il carattere della deformazione è spesso prevedibile. Abbe se n'è servito per dare una conferma sperimentale della sua teoria. Scelse come oggetto un reticolo di diffrazione grossolano e mise nel piano focale un altro reticolo di fili metallici che occultavano un massimo di diffrazione ogni due. La distanza tra i massimi scoperti raddoppia e l'immagine del reticolo comporta un numero di tratti doppio. Tutto accade come se nessun massimo fosse schermato e il reticolo osservato avesse un numero doppio di tratti.

Distorsioni ancor più curiose si osservano con una griglia bidimensionale, per esempio una griglia quadrata formata da fili metallici. In questo caso la figura di diffrazione formata nel piano focale è composta da macchie chiare disposte nei nodi di un reticolo quadrato. Disponiamo nel piano focale una fenditura stretta mediante la quale si possono scoprire delle file
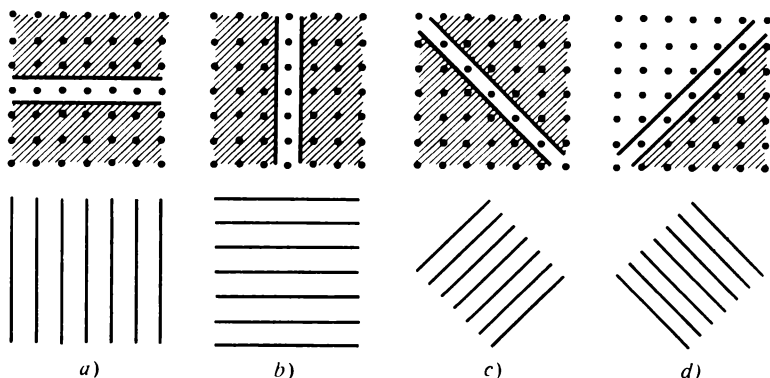
Fig. 221

rettilinee di macchie di diffrazione, occultando tutte le altre. Se la fenditura è orizzontale e sufficientemente stretta, essa scopre una fila rettilinea di massimi allineati (fig. 221,*a*). Questa fila di massimi è analoga alla figura di diffrazione prodotta da un reticolo unidimensionale a fenditure verticali. Perciò l'immagine ottica della griglia quadrata con l'introduzione di una fenditura orizzontale si riduce ad un sistema di frange verticali. Se la fenditura è ruotata di 90° per renderla verticale (fig. 221,*b*), le frange diventano orizzontali. Se la fenditura è parallela alla diagonale della griglia (figg. 221,*c* e 221,*d*), essa scopre una fila rettilinea di massimi parallela alla stessa diagonale, ed inoltre l'inerfrangia è $\sqrt{2}$ volte più grande che nel caso precedente. In conseguenza di questi procedimenti l'immagine ottica si trasforma in un sistema di frange inclinate perpendicolarmente alla fenditura, le frange stesse sono allora $\sqrt{2}$ volte più strette.

D.S. Roždestvenskij ha notato che la causa diretta della comparsa di strutture false negli esperimenti di Abbe è la *diffrazione della luce sulla gri-*

glia schermante. In assenza di quest'ultima l'obiettivo fornisce un'immagine geometrica simile dell'oggetto. Per esempio, l'immagine di un sistema di fili paralleli si presenta sotto forma di un sistema di frange parallele. Se viene introdotta una griglia schermante queste frange restano nelle stesse posizioni, ma su esse è sovrapposta la figura di diffrazione prodotta dalla griglia. Se quest'ultima è composta da fili paralleli a quelli del reticolo oggetto, compaiono frange di diffrazione parallele alle frange dell'immagine del reticolo oggetto. Per una scelta conveniente del passo della griglia schermo le frange di diffrazione saranno disposte al centro tra le frange dovute all'oggetto. Il numero di frange risulta doppio come se i fili del reticolo oggetto avessero un passo dimezzato. Allo stesso modo si spiega l'apparizione di frange inclinate secondo la diagonale con un reticolo oggetto quadrato, benché la spiegazione non sia tanto semplice.

La diffrazione sulla griglia schermo si manifesta se l'oggetto è illuminato da una sorgente estranea ma anche se è luminoso esso stesso. Perciò anche nel caso di oggetti luminosi debbono apparire le stesse strutture false che nel caso di oggetti illuminati. Ciò è stato teoricamente predetto da L.I. Mandelštam (1879-1944) ancora nel 1911 e gli esperimenti da lui realizzati con reticoli incandescenti hanno confermato queste previsioni teoriche.

§ 58. *Telescopio senza obiettivo. Formazione delle immagini per mezzo di piccole aperture*

1. In linea di principio si può costruire un telescopio senza obiettivo avente un potere risolutivo indefinitamente grande. Il ruolo dell'obiettivo può essere svolto da un foro circolare. Le seguenti considerazioni, sviluppate da Rayleigh, spiegano l'idea di questo telescopio. Supponiamo che nel foro sia inserito un obiettivo. I raggi che si propagano da un punto dell'oggetto verso la sua immagine lungo l'asse ottico e secondo rette tangenti alla montatura dell'obiettivo hanno lunghezze geometriche differenti. In assenza dell'obiettivo le lunghezze ottiche di questi raggi sono ugualmente differenti. L'obiettivo deve compensare con lo spessore dei suoi vetri la differenza delle lunghezze ottiche di tutti i raggi affinché essi arrivino al punto immagine con la stessa fase. Ma piccole differenze tra le fasi influenzano poco il risultato della loro interferenza. Per esempio, se interferiscono due raggi della stessa fase, l'intensità luminosa risultante è 4 volte più grande di quella di un solo raggio. Se, invece, la differenza di fase è uguale a $\pi/4$, l'intensità risultante sarà di $2 + \sqrt{2} = 3,42$ volte più grande di quella di un solo raggio; la variazione è quindi poco importante. Perciò le differenze di fase uguali o inferiori a $\pi/4$ si possono trascurare. Supponiamo ora che la distanza focale dell'obiettivo aumenti sempre più. La differenza tra le lunghezze geometriche del raggio centrale e di un raggio marginale diventa al-

lora sempre più piccola. Quando questa differenza raggiunge un valore uguale press'a poco a $\lambda/8$, l'obiettivo diventa inutile. Infatti, in questo caso la differenza di fase massima tra i raggi che arrivano al punto immagine da diversi punti del piano del foro è inferiore o uguale a $\pi/4$ e la compensazione della differenza delle lunghezze ottiche diventa praticamente inutile. Il foro assume allora la funzione di obiettivo del telescopio. Aumentando la distanza focale f il potere risolutivo dell'obiettivo non varia ed è sempre definito dalla formula (56.2). Esso resta lo stesso anche nel caso limite in cui $f = \infty$, cioè quando l'obiettivo non c'è.

La differenza delle lunghezze geometriche del raggio centrale e di un raggio marginale è uguale a $D^2/(8l)$, dove D è il diametro del foro ed l la lunghezza del telescopio, che si può considerare uguale alla distanza focale. Per stimare il valore di l uguagliamo questa differenza delle lunghezze geometriche a $\lambda/8$ ed otteniamo

$$l = D^2/\lambda. \tag{58.1}$$

Questa formula mostra che è impossibile costruire un telescopio senza obiettivo, poiché un tale telescopio dovrebbe avere una lunghezza colossale. Per esempio, per $D = 1$ m, $\lambda = 500$ nm $= 5\cdot 10^{-7}$ m la formula (58.1) dà $l = 2\cdot 10^6$ m $= 2000$ km. A questa dimensione enorme corrisponderebbe una luminosità insignificante: $(D/f)^2 = l\lambda/f^2 = \lambda/l \approx 10^{-13}$.

2. L'idea del telescopio senza lenti assomiglia al metodo di formazione delle immagini e di fotografia per mezzo di una camera munita di un piccolo foro (camera oscura). Questa camera si distingue dal telescopio senza lenti solo per la scala delle dimensioni e per la possibilità di essere praticamente realizzata. Perciò i ragionamenti riportati qui sotto valgono non soltanto per una camera oscura, ma completano e precisano l'idea del telescopio senza lenti.

La diminuzione delle dimensioni del foro implica dapprima un miglioramento della nettezza dell'immagine formata nella camera oscura, ma in seguito la nettezza comincia a diminuire a causa della diffrazione. La diffrazione importa poco quando il foro è grande, ma quando è piccolo essa diventa il fattore principale che determina la nettezza dell'immagine. Le dimensioni di massima efficacia del foro, per le quali si ottiene la più grande nettezza dell'immagine, possono essere stimate con l'aiuto delle seguenti considerazioni. Supponiamo che il foro sia circolare di raggio R. La distanza dall'oggetto fotografato può essere considerata infinitamente grande rispetto alla profondità l della camera oscura. Se fosse valida l'ottica geometrica, l'immagine di un punto luminoso sarebbe un cerchio dello stesso raggio R. A causa della diffrazione, l'immagine di un punto è un cerchio il cui raggio è dell'ordine di $\lambda l/R$. È utile diminuire il diametro del foro fino a che le distorsioni di diffrazione restano inferiori o uguali a quelle geometriche. La migliore nettezza delle immagini corrisponde all'uguaglianza di queste distorsioni, cioè alla condizione $\lambda l/R \approx R$ o $R \approx \sqrt{l\lambda}$. Ciò significa

che la dimensione del foro dev'essere confrontabile con la zona centrale di Fresnel. Rayleigh, che analizzò questa questione teoricamente e sperimentalmente, trovò che il raggio di massima efficacia è uguale a

$$R = 0{,}9\sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}, \tag{58.2}$$

dove a e b sono le distanze dell'oggetto e della sua immagine dal foro.

Problemi

1. Quando una stella è osservata al telescopio avente un ingrandimento normale, l'illuminamento dell'immagine della stella sulla retina dell'occhio è di $\alpha = 10$ volte più debole di quello del cielo diurno, osservato allo stesso telescopio. Di quante volte è necessario aumentare il diametro dell'obiettivo affinché l'illuminamento dell'immagine della stella formata sulla retina dell'occhio divenga di $\beta = 10$ volte più grande di quello dell'immagine del cielo, se insieme con l'obiettivo viene sostituito anche l'oculare in modo che l'ingrandimento del telescopio resti normale?

Risposta. Il diametro dell'obiettivo deve essere aumentato di $\sqrt{\alpha\beta} = 10$ volte.

2. Nel piano focale dell'obiettivo di un telescopio è posta una lastra fotografica. L'illuminamento dell'immagine di una stella formata sulla lastra è di $\alpha = 10$ volte più debole dell'illuminamento del cielo diurno. Di quante volte si deve aumentare il diametro dell'obiettivo perché l'illuminamento dell'immagine della stella sulla lastra fotografica diventi di $\beta = 10$ volte più grande di quello dell'immagine del cielo diurno?

Risposta. Il diametro dell'obiettivo deve essere aumentato di $\sqrt{\alpha\beta} = 10$ volte.

3. Un razzo che s'allontana dalla Terra è fotografato, mettendo una pellicola fotografica nel piano focale dell'obiettivo di un telescopio astronomico. Con un obiettivo di diametro $D_1 = 80$ mm l'immagine di diffrazione del razzo diventa indiscernibile sullo sfondo del cielo, quando il razzo si trova alla distanza $l_1 = 2\cdot 10^4$ km dalla Terra. A quale distanza l_2 dalla Terra si riesce a discernere il razzo su una fotografia presa con un obiettivo di diametro $D_2 = 200$ mm, usando una pellicola di ugual sensibilità?

Risposta. $l_2 = l_1 D_2/D_1 = 5\cdot 10^4$ km.

4. Di quanto varia il potere risolutivo dell'obiettivo di un telescopio, quando la sua parte centrale viene coperta da uno schermo circolare il cui diametro differisce poco dal diametro dell'obiettivo stesso?

Suggerimento. Per semplificare il problema, l'obiettivo e lo schermo circolari si possono supporre quadrati.

Risposta. Il potere risolutivo aumenterà press'a poco di due volte.

5. Vengono fotografati oggetti lontani per mezzo di un obiettivo di telescopio, esponendo una lastra fotografica disposta nel piano focale dell'obiettivo. La fotografia ottenuta, per mezzo dell'oculare dello stesso telescopio, viene proiettata su uno schermo lontano. Quale dev'essere l'ingrandimento angolare del telescopio per poter utilizzare completamente il potere risolutivo dell'obiettivo? L'immagine proiettata sullo schermo è esaminata dal posto dove è messo l'apparecchio di proiezione.

Risposta. $N \geqslant D/d$, dove D è il diametro dell'obiettivo e d quello della pupilla dell'occhio.

6. Da quale distanza r si può vedere ad occhio nudo la luce di un laser che genera in regime continuo una potenza $P = 10$ kW sulla frequenza $\omega = 4\cdot 10^{15}$ s^{-1}, sapendo che per formare il fascio si utilizza uno specchio parabolico di diametro $D = 5$ m? L'occhio vede la sorgente luminosa se la pupilla, di diametro $d = 5$ mm, riceve $n = 60$ quanti di radiazione verde al secondo.

Risposta. $r \approx \frac{Dd}{2}\sqrt{\frac{P}{hc\lambda n}} \approx$ 0,1 anni luce (h è la costante di Planck).

7. La radiazione di un laser a funzionamento continuo che emette onde di lunghezza $\lambda =$ $= 500$ nm, di potenza $P = 1$ W, è diretta su un satellite artificiale per mezzo di un telescopio il cui obiettivo ha un diametro $D = 30$ cm. La luce diffusa dal satellite è captata da un telescopio identico che la focalizza su un fotomoltiplicatore la cui sensibilità di soglia è $P_{soglia} =$ $= 10^{-14}$ W. A quale distanza l deve trovarsi il satellite perché il segnale riflesso possa essere rivelato, se la superficie del satellite diffonde uniformemente la luce incidente, secondo la legge di Lambert? Il diametro del satellite artificiale è uguale a $d = 20$ cm.

Risposta. $l \leq \frac{D}{2}\sqrt[4]{\frac{Pd^2}{2P_{soglia}\lambda^2}} \approx 250$ km.

8. Nel § 40 è stato descritto il metodo di Pohl per fotografare gli oggetti per mezzo di una palla opaca liscia. Stimare la minima distanza angolare $\delta\varphi$ che può essere risolta fotografando oggetti lontani con questo metodo.

Suggerimento. La dimensione della macchia chiara, al centro dell'ombra geometrica proiettata da una sorgente puntiforme, può essere stimata dalla condizione che il primo minimo di diffrazione si deve ottenere quando la differenza di cammino dei raggi, dai punti diametralmente opposti della palla, è dell'ordine della lunghezza d'onda.

Risposta. $\delta\varphi \approx \lambda/D$.

9. I radiotelescopi ed altre installazioni radio destinate allo studio delle onde radio emesse dal Sole e dalle Galassie hanno un potere risolutivo debole, dovuto alle grandi lunghezze d'onda delle radiazioni radio.

1) Calcolare la minima distanza angolare $\delta\varphi$ risolvibile di un radiotelescopio il cui specchio ha un diametro $d = 50$ m per le lunghezze d'onda $\lambda = 1$ m e $\lambda = 10$ cm.

2) Per aumentare il potere risolutivo si propone d'utilizzare la diffrazione delle onde radio dal bordo della Luna (si veda il problema 2 del § 42). Stimare il potere risolutivo di questo metodo per le stesse onde supponendo che il bordo della Luna funzioni come uno schermo opaco sottile limitato da un bordo rettilineo.

3) Stimare l'altezza h delle irregolarità della superficie lunare per poter utilizzare detto metodo. La distanza dalla Luna $b = 380000$ km.

Risposta. 1) $\delta\varphi \approx \lambda/d$. Per $\lambda = 1$ m, $\delta\varphi \approx 1°$; per $\lambda = 10$ cm, $\delta\varphi \approx 7''$. 2) $\delta\varphi \approx$ $\approx \sqrt{\lambda/b}$. Per $\lambda = 1$ m, $\delta\varphi \approx 2'$; per $\lambda = 10$ cm, $\delta\varphi \approx 40''$. 3) $h \ll \sqrt{b\lambda}$. Per $\lambda = 1$ m, $\sqrt{b\lambda} =$ $= 19{,}5$ km; per $\lambda = 10$ cm, $\sqrt{b\lambda} = 6{,}2$ km.

10. Uno dei metodi realizzabili, in linea di principio (ma non realizzabili in pratica) per aumentare il potere risolutivo delle installazioni radio destinate allo studio delle radiazioni radio delle masse cosmiche, consiste nell'utilizzazione del massimo di diffrazione dell'intensità di radiazione radio situato al centro dell'ombra geometrica della Luna proiettata da una sorgente puntiforme. Stimare il potere risolutivo di questo metodo, calcolare la minima distanza angolare risolvibile per le stesse lunghezze d'onda menzionate nel problema precedente. Discutere le possibilità d'utilizzazione del metodo considerato. Il diametro della Luna $D = 3470$ km.

Risposta. $\delta\varphi \approx \lambda/D$. Per $\lambda = 1$ m $\delta\varphi \approx 0{,}06''$. Per $\lambda = 10$ cm $\delta\varphi \approx 0{,}006''$.

Il metodo impone che la sorgente di radiazione radio si trovi sulla retta che unisce il punto d'osservazione con il centro della Luna. Inoltre, esso pone condizioni molto rigorose alla regolarità della superficie lunare ed agli scarti dalla forma sferica della Luna. L'altezza delle irregolarità lungo tutta la frontiera del disco lunare deve essere piccola rispetto a $h = b\lambda/D$. Anche la differenza dei diametri più grande e più piccolo non deve essere superiore a h. Per $\lambda = 1$ m $h \approx 100$ m; per $\lambda = 10$ cm $h \approx 10$ m. Queste condizioni rigorose escludono la possibilità d'utilizzazione del metodo considerato almeno per le onde radio di lunghezza d'onda $\lambda < 100$ m.

11. Utilizzando l'obiettivo di un microscopio è stata ottenuta la microfotografia di un

piccolo oggetto (per esempio cellule vegetali o batteri) con un ingrandimento lineare N. Lo stesso obiettivo è stato utilizzato per proiettare la microfotografia ottenuta su uno schermo lontano. Quale dev'essere il valore minimo di ingrandimento N per poter completamente utilizzare il potere risolutivo del microscopio? Il diametro del diaframma d'apertura dell'obiettivo è D, quello della pupilla dell'occhio è d. L'immagine sullo schermo è osservata dal posto dove si trova l'obiettivo.

Risposta. $N \geqslant D/d$.

12. Quale dev'essere la distanza focale f_2 dell'oculare di un microscopio per poter completamente utilizzare il potere risolutivo dell'obiettivo? L'apertura numerica dell'obiettivo è uguale a $n \sin \alpha$, la distanza focale dell'obiettivo è f_1, la lunghezza del tubo del microscopio è l. La lunghezza del tubo l si può porre uguale alla distanza tra l'obiettivo ed il piano della prima immagine (cioè immagine formata dall'obiettivo).

Risposta. $f_2 \leqslant \dfrac{ld}{2f_1 n \sin \alpha}$, dove d è il diametro della pupilla dell'occhio.

13. Con l'aiuto di un obiettivo di telescopio di diametro D e di distanza focale f vengono fotografati oggetti lontani su una lastra fotografica a grana fine disposta nel piano focale dell'obiettivo. L'immagine ottenuta è esaminata per mezzo di un microscopio ad apertura numerica $n \sin \alpha$ e con ingrandimento N. Quali condizioni debbono soddisfare l'apertura numerica e l'ingrandimento del microscopio per poter completamente utilizzare il potere risolutivo dell'obiettivo del telescopio?

Risposta. $n \sin \alpha \geqslant D/(2f)$, $N \geqslant DL/(fd)$, dove L è la distanza della visione distinta e d il diametro della pupilla dell'occhio.

14. Le lastre fotografiche moderne possono risolvere fino a $z = 10^4$ linee per centimetro. Quale deve essere la luminosità (cioè il rapporto dei quadrati del diametro D e della distanza focale f) dell'obiettivo della macchina fotografica per poter completamente utilizzare il potere risolutivo della lastra?

Risposta. $(D/f)^2 \geqslant z^2\lambda^2 \approx 0{,}25$.

§ 59. *Contrasto di fase*

1. A seconda della natura degli oggetti esaminati, si hanno due casi estremi d'utilizzazione dei microscopi. Un primo gruppo di oggetti, detti *assorbenti*, presenta una trasparenza differente in punti diversi; questi oggetti esercitano una azione soprattutto sull'*ampiezza* della luce trasmessa. Il secondo gruppo include gli oggetti, detti *rifrangenti*, che non assorbono praticamente la luce. Avendo in diversi punti spessori e indici di rifrazione differenti, essi influiscono non sull'intensità luminosa, ma sulla *fase* della luce trasmessa. Esempi tipici di questi due gruppi di corpi sono i reticoli di diffrazione d'ampiezza e di fase.

Le immagini degli oggetti assorbenti sono *nette* e le frontiere tra le parti chiare e scure sono ben delimitate. Su esse si possono distinguere tutti i dettagli che può risolvere un microscopio di potere risolutivo dato. Al contrario, le immagini degli oggetti rifrangenti sono quasi *prive di contrasto* ed è difficile e persino impossibile risolvere i dettagli della loro struttura, benché il potere risolutivo del microscopio sia sufficiente per questo scopo. La ragione di questa differenza tra i due gruppi di oggetti consiste nel fatto che

l'obiettivo del microscopio riproduce nel piano dell'immagine, e quindi anche sulla retina dell'occhio, la stessa ripartizione d'intensità luminosa che esiste sul piano dell'oggetto; ma le estremità sensibili dei nervi della retina reagiscono alle variazioni dell'*intensità* dell'onda luminosa e non alla sua fase.

In biologia si ha quasi sempre a che fare con oggetti rifrangenti, per esempio con microorganismi. La maggior parte degli oggetti biologici è praticamente trasparente alle radiazioni visibili. L'assenza del contrasto nelle immagini di questi oggetti rende il loro studio difficile. Perciò è di primaria importanza trovare una soluzione a questo problema. Uno dei metodi di soluzione consiste nella trasformazione degli oggetti rifrangenti in assorbenti mediante una colorazione differenziata degli oggetti. Ma questo metodo non è sempre realizzabile ed inoltre esso può uccidere gli organismi viventi o almeno disturba la loro attività normale. L'unico metodo di studio degli oggetti biologici in condizioni d'esistenza normale consiste nella modifica non dell'oggetto, ma della *sua immagine*. Ciò si ottiene utilizzando il *metodo di contrasto di fase* suggerito da Zernike (1888-1966) nel 1934.

2. Per spiegare il principio di questo metodo consideriamo una struttura periodica semplice, un reticolo di diffrazione unidimensionale. Abbiamo già visto nel § 53 la differenza tra un reticolo d'ampiezza ed uno di fase; esaminiamo ora questa questione in modo più dettagliato.

Trascurando la polarizzazione, assimileremo la luce ad un campo d'onda scalare e rappresenteremo le vibrazioni luminose con vettori su un diagramma vettoriale. Supponiamo che la luce cada normalmente sulla superficie del reticolo. Il reticolo sia un reticolo d'ampiezza costituito da regioni I e II di diversa trasparenza; le regioni I sono più trasparenti delle II. Per semplicità (cioè non importa per la questione che ci interessa) supponiamo che le regioni I e II che si alternano abbiano la stessa larghezza. La vibrazione all'uscita della regione I sarà rappresentata con un vettore $\boldsymbol{a}$ più lungo di $\boldsymbol{b}$ che rappresenta la vibrazione all'uscita della regione II (fig. 222). Visto che il reticolo d'ampiezza non implica differenza di fase tra le onde che hanno attraversato le sue differenti regioni, entrambi i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ avranno la stessa direzione.

Consideriamo ora un reticolo di fase, geometricamente simile a quello d'ampiezza, cioè costituito da regioni alternate di uguale larghezza che influenzano la fase dell'onda e non la sua ampiezza. Le vibrazioni all'uscita di queste regioni saranno rappresentate da vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ della stessa lunghezza ma di direzioni differenti (fig. 222,*a*). Dato che importa soltanto la differenza di fase relativa tra le vibrazioni, si possono ruotare i vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ di uno stesso angolo senza modificare le condizioni fisiche del problema. Perciò, senza perdere di generalità, si può supporre che la bisettrice dell'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sia orizzontale, cioè parallela alla superficie del reticolo. Decomponiamo ciascun vettore $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ in una componente orizzontale ed una verticale: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{c}$ (fig. 222,*b*). Facciamo

ruotare ora entrambi i vettori $\boldsymbol{c}$ e $-\boldsymbol{c}$ di 90° nello stesso senso e indichiamo le nuove posizioni con $\boldsymbol{c}'$ e $-\boldsymbol{c}'$ (fig. 222,*c*). All'uscita delle regioni *I* e *II* le vibrazioni saranno allora rappresentate dai vettori $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{c}'$ e $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{c}'$ paralleli alla superficie del reticolo. All'uscita del reticolo di fase il campo si presenta con la stessa forma che avrebbe all'uscita di un reticolo d'ampiezza. Una rotazione dei vettori di 90° significa che le fasi delle corrispondenti vibrazioni sono state modificate di 90°. Quindi, facendo variare di 90° la fase delle vibrazioni, un reticolo di fase si trasforma in quello d'ampiezza. Quest'è il principio del metodo di contrasto di fase.

Quando i vettori sono fatti ruotare in senso orario, il vettore $\boldsymbol{a}$ diventa più lungo di $\boldsymbol{b}$. Ciò significa che a zone chiare nell'immagine di un reticolo d'ampiezza corrispondono regioni chiare nell'immagine di un reticolo di fase e, viceversa, a regioni scure di un reticolo corrispondono regioni scure dell'altro (*contrasto di fase positivo*). Ma se i vettori $\boldsymbol{c}$ e $-\boldsymbol{c}$ sono fatti ruo-
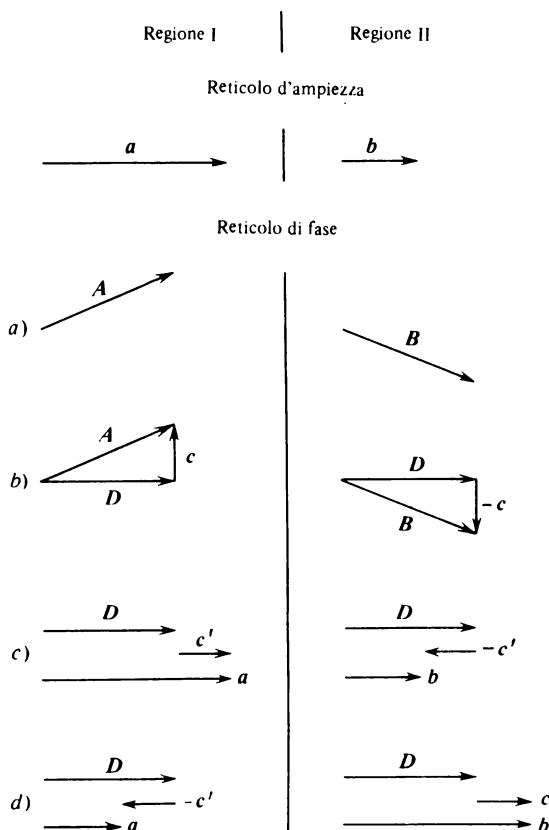
Fig. 222

tare in senso antiorario (fig. 222,*d*), le variazioni relative delle lunghezze dei vettori ***a*** e ***b*** sono invertite insieme con la corrispondenza tra le zone chiare e scure delle immagini dei due tipi di reticolo (*constrasto di fase negativo*).

3. Per far ruotare i vettori ***c*** e $-\boldsymbol{c}$, conservando fissa la direzione del vettore ***D***, è necessario realizzare una separazione spaziale dei campi d'onda che rappresentano questi vettori. La vibrazione totale all'uscita di un reticolo può essere decomposta in due vibrazioni; una di queste ha un'ampiezza costante su tutta l'estensione del reticolo ed è rappresentata dal vettore costante ***D***. Questa vibrazione produce nel piano focale dell'obiettivo un massimo centrale di ordine zero e non esercita alcun'azione su tutti gli altri massimi. L'altra vibrazione deve essere rappresentata da una funzione periodica che è uguale a $+\boldsymbol{c}$ sulle regioni di un tipo ed a $-\boldsymbol{c}$ sulle regioni dell'altro tipo. Poiché il valore di questa funzione, mediato su un passo, è nullo, questa vibrazione può eccitare soltanto massimi laterali e non influenza il massimo centrale di ordine zero. Pertanto nel piano focale dell'obiettivo le vibrazioni sono spazialmente separate: una di queste è concentrata nel massimo centrale e l'altra è ripartita in tutti gli altri massimi (laterali). Ponendo una lamina piano-parallela trasparente di spessore conveniente sul tragitto del massimo centrale o su quello di tutti i massimi laterali, si può introdurre una differenza di fase di 90° necessaria per realizzare quindi il contrasto di fase. Questa lamina si dice *lamina di fase*.

4. Prima dell'introduzione della lamina di fase, l'energia nella regione *I*, espressa in unità convenienti, è data dall'espressione $A^2 = D^2 + c^2$. Poiché l'energia ha lo stesso valore nella regione *II*, l'energia totale è uguale a $2(D^2 + c^2)$. Dopo aver fatto ruotare i vettori ***c*** e $-\boldsymbol{c}$ di 90° i valori dell'energia nelle regioni *I* e *II* saranno rispettivamente uguali a $(D + c)^2$ e $(D - c)^2$; la loro somma è uguale a $2(D^2 + c^2)$. Quindi, l'energia non cambia ma è ridistribuita tra le regioni *I* e *II*. Proprio questa ridistribuzione determina la chiarificazione delle regioni *I* e l'oscuramento delle regioni *II*.

§ 60. *Misura delle dimensioni angolari delle stelle*

1. Disponiamo davanti all'obiettivo di un telescopio uno schermo munito di due aperture circolari, la distanza tra i centri delle quali è uguale a *D* (fig. 223). Puntando il telescopio su una stella, copriamo prima il foro di destra. A causa della diffrazione sul foro di sinistra scoperto, nel piano focale dell'obiettivo si ottiene un sistema di anelli di diffrazione le cui posizioni e dimensioni dipendono soltanto dal diametro del foro ma non dalla sua posizione nel piano dello schermo. Perciò, se otturiamo il foro di sinistra e scopriamo quello di destra, la figura di diffrazione nel piano focale, vista a occhio nudo, non cambia. Se scopriamo poi entrambi i fori, un si-

stema di anelli di diffrazione coincide esattamente con l'altro. Ma in questo caso non si ha solamente un rafforzamento della luminosità degli anelli di diffrazione: questi ultimi saranno intersecati da frange d'interferenza parallele, perpendicolari alla linea congiungente i centri O_1 ed O_2 (fig. 224). Come nell'esperimento di Young, queste frange compaiono per interferenza tra i fasci di luce diffratta inviati dai due fori. Le direzioni tra massimi (o minimi) di interferenza vicini differiscono di un angolo $\vartheta = \lambda/D$. Quest'è appunto la distanza tra le frange d'interferenza vicine se il piano focale è osservato dal centro dell'obiettivo.
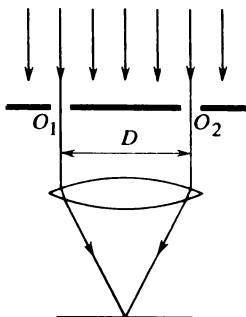
Fig. 223
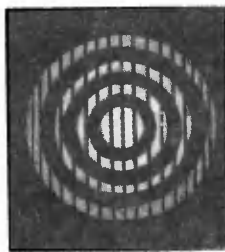
Fig. 224

Supponiamo che la stella sia doppia e che la distanza angolare tra le sue componenti sia uguale a $\delta\varphi = \vartheta/2$. I massimi delle frange d'interferenza di una stella si sovrappongono allora sui minimi dell'altra: le frange d'interferenza o spariscono, o la loro visibilità diventa molto debole. Su questo effetto è basato il metodo interferenziale di misura delle distanze angolari tra le componenti delle stelle doppie, suggerito da Fizeau. Per mettere in opera questo metodo è sufficiente modificare la distanza tra i centri O_1 ed O_2 dei fori fino a che non spariscono le frange d'interferenza o la loro visibilità diventa minima. Se D è la distanza tra i fori che produce questo effetto, la distanza angolare tra le componenti di una stella doppia è data dalla formula

$$\delta\varphi = \lambda/(2D). \qquad (60.1)$$

Lo stesso metodo è valido anche per la misura dei diametri angolari di stelle singole. Per semplificare i calcoli ammettiamo che la stella emetta luce come un quadrato di luminosità uniforme il cui piano è parallelo al piano focale dell'obiettivo ed i cui due lati opposti sono paralleli alla retta O_1O_2 che congiunge i centri O_1 ed O_2. Sia $\delta\varphi' = \lambda/D$ la dimensione angolare di un lato del quadrato. Si può allora dividere mentalmente tutto il quadrato in coppie di strisce strette identiche, la distanza angolare tra le quali è uguale a $\lambda/(2D)$. Secondo la formula (60.1) ogni coppia di queste strisce non produce frange d'interferenza. Quindi, anche la stella non pro-

duce frange d'interferenza. Aumentando la distanza tra i fori O_1 e O_2, anche in questo caso si può ottenere la sparizione delle frange d'interferenza. Se D è la distanza tra i fori che provoca la scomparsa delle frange d'interferenza, la dimensione angolare della stella è data dalla formula

$$\delta\varphi' = \lambda/D. \tag{60.2}$$

Supponiamo che la stella emetta luce come un disco di luminosità uniforme (il che corrisponde di più alla realtà), i calcoli semplici nella sostanza ma laboriosi mostrano che le frange d'interferenza scompaiono quando si ha

$$\delta\varphi' = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}. \tag{60.3}$$

2. Le dimensioni angolari $\delta\varphi'$ date dalle formule (60.2) e (60.3) coincidono con la distanza risolvibile dal telescopio. Ma, se la dimensione angolare della stella è dell'ordine del valore calcolato dalla (60.2) o dalla (60.3), la sua immagine si distingue tanto poco dall'immagine di una sorgente puntiforme che la misura diretta del diametro della stella fatta con il telescopio diventa praticamente priva di senso. Il metodo interferenziale, invece, fornisce in queste condizioni risultati assai precisi. Tuttavia per far sparire le frange d'interferenza, condizione necessaria imposta dal metodo interferenziale stesso, si deve avere un telescopio ad obiettivo di grande diametro. Fizeau suggerì un procedimento che permette di superare questa difficoltà. L'idea di Fizeau fu messa in opera da Michelson che associò il telescopio ad un interferometro.

Lo schema di principio dell'*interferometro stellare di Michelson* è rappresentato nella figura 225. I raggi luminosi inviati dalla stella cadono su due fori circolari O_1 ed O_2 e dopo riflessione sugli specchi M_1, M_3 e M_2, M_4 penetrano nell'obiettivo del telescopio. Se otturiamo O_2, per diffrazione sui bordi del foro O_1, nel telescopio sono visibili anelli di diffrazione. Se scopriamo O_2 ed otturiamo O_1, si ottiene un sistema di anelli simile al primo, ma spostato. Per rotazione dello specchio M_2 questo sistema si può far coincidere con il primo sistema. Gli anelli di diffrazione saranno allora di nuovo intersecati da frange d'interferenza (fig. 224). Facendo variare la distanza tra O_1 ed O_2 e spostando simultaneamente gli specchi M_1 e M_2, si può o fare completamente sparire le frange (se si tratta di una sola stella), o rendere minima la loro visibilità (nel caso di una stella doppia). Conoscendo la distanza tra i centri O_1 ed O_2 in questa situazione, si può calcolare la dimensione angolare della stella con la formula (60.1) o (60.3).

3. Per ben comprendere il funzionamento dell'apparecchio di Michelson si può trascurare la stella. La sua azione è equivalente all'azione delle sorgenti secondarie di Huygens ripartite nel piano dei fori O_1 ed O_2. Senza perdere di generalità si può, per semplificare i ragionamenti, supporre che i fori O_1 ed O_2 siano infinitamente piccoli. L'azione della stella si riduce allo-

ra all'azione delle sorgenti secondarie puntiformi S_1 e S_2 disposte nei centri O_1 ed O_2 dei fori (figg. 226 e 225). Se la stella invia un fascio di raggi paralleli perpendicolari sul piano dello schermo O_1O_2, le fasi delle sorgenti secondarie S_1 e S_2 sono identiche. Lo stesso vale per le onde inviate dalle sorgenti secondarie virtuali S_1', S_2' e S_1'', S_2'' che sono le immagini delle sorgenti S_1 e S_2 formate dagli specchi piani. Quindi gli specchi avvicinano le sorgenti S_1 e S_2, allargando con ciò le frange d'interferenza.
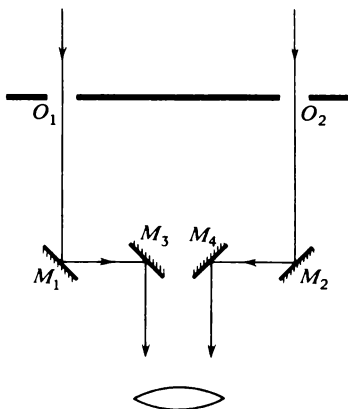
Fig. 225

Supponiamo ora che vicino alla prima stella ad una distanza angolare $\delta\varphi$ si trovi un'altra stella. Il fronte d'onda proveniente dalla seconda stella non raggiunge simultaneamente i fori O_1 ed O_2. La differenza di cammino
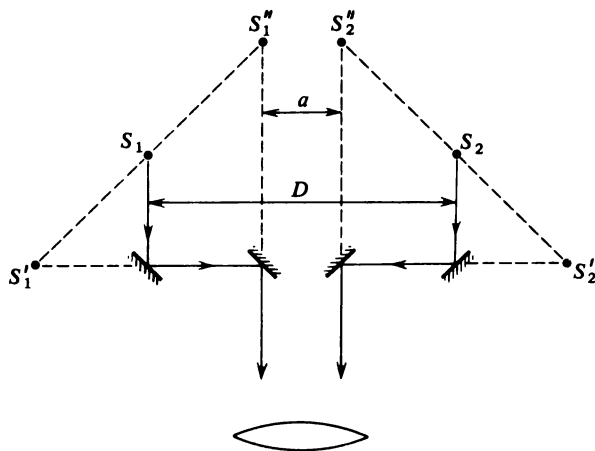
Fig. 226

tra i raggi inviati dalla seconda stella verso S_1 e S_2 è uguale a $D \cdot \delta\varphi$, dove D è la distanza tra S_1 e S_2. Se questa differenza di cammino è uguale a $\lambda/2$, le sorgenti secondarie S_1 e S_2, che sostituiscono l'azione della seconda stella, si trovano in opposizione di fase. Quindi, i massimi delle frange d'interferenza prodotti dalla seconda stella si sovrappongono ai minimi delle frange prodotte dalla prima stella. Le frange d'interferenza o spariscono, o la loro visibilità diventa minima. Ciò avviene quando $D \cdot \delta\varphi = \lambda/2$. Ritroviamo così la formula (60.1), in cui D indica la distanza tra i centri O_1 ed O_2. Analogamente, nel caso di una sola stella che emette luce come un quadrato o un disco di luminosità uniforme, si ottengono le formule (60.2) e (60.3).

Dunque, non è necessario un telescopio ad obiettivo di grande diametro. (L'interferometro di Michelson è stato montato sul grande telescopio riflettore dell'osservatorio di Mont-Wilson dotato di uno specchio di 2,5 m di diametro, scelto solo per la sua grande rigidezza meccanica. Per una distanza tra gli specchi M_3 e M_4 uguale a 114 cm, l'interfrangia nel piano focale era uguale press'a poco a 0,02 mm.) È necessario poter allontanare in modo sufficiente i fori O_1 ed O_2 e gli specchi M_1 e M_2. Ciò esige che la meccanica dell'apparecchio sia sufficientemente rigida. Le vibrazioni accidentali degli specchi con ampiezze di piccole frazioni della lunghezza d'onda renderebbero impossibili le misure con questo metodo. Ammettiamo per semplicità che il centro dello specchio sia sempre fisso e che i suoi bordi siano animati da spostamenti disordinati dell'ordine di h. Se lo specchio fosse perfettamente rigido, queste spostamenti provocherebbero rotazioni disordinate del piano dello specchio di un angolo dell'ordine di $2h/d$, dove d è il diametro dello specchio. A causa di quest'effetto i raggi riflessi dallo specchio varierebbero in modo disordinato la loro direzione di un angolo dell'ordine di $4h/d$, e ciò provocherebbe una vibrazione degli anelli di diffrazione. Perché le frange d'interferenza siano stabili è necessario che l'angolo $4h/d$ sia piccolo rispetto alla distanza angolare $\lambda/(2D)$ tra le stelle, cioè dev'essere $h \ll d\lambda/(8D)$. Benché le vibrazioni disordinate reali degli specchi siano più complicate di quelle esaminate, l'esempio citato dà un'idea delle difficoltà che debbono essere superate nella costruzione dell'apparecchio. Michelson riuscì a costruire un tale apparecchio.

4. Nell'interferometro di Michelson gli specchi M_1 e M_2 potevano essere portati ad una distanza $D = 6{,}1$ m. Le frange d'interferenza prodotte dalla stella Betelgeuse sparivano per $D = 306{,}5$ cm, mentre per la stessa distanza erano ben visibili le frange d'interferenza prodotte da altre stelle. Ponendo la lunghezza d'onda efficace per Betelgeuse uguale a $\lambda = 5{,}75 \cdot 10^{-5}$ cm, otteniamo $\delta\varphi' = 0{,}047''$. La parallasse per questa stella è di $0{,}003''$. Questo valore dà per il diametro lineare il valore di circa $9 \cdot 10^8$ km, superiore al diametro dell'orbita di Marte.

Le misure di Michelson sono state effettuate negli anni venti del nostro secolo quando l'astrofisica nella sua concezione moderna stava nascendo. I risultati di queste misure hanno prodotto una grossa impressione sui suoi

contemporanei. Michelson cominciò a costruire un interferometro avente una base $D = 15{,}24$ m, ma il suo decesso arrestò i lavori.

Con l'aiuto dell'interferometro stellare di Michelson sono stati misurati i diametri angolari soltanto di alcune stelle, tutte giganti, come Betelgeuse, i cui diametri lineari sono di molte volte superiori al diametro del Sole. Una delle cause del piccolo numero di misure effettuate è legata all'influenza nociva della turbolenza dell'atmosfera; quest'influenza è però manifestata in un modo molto più evidente nell'osservazione al telescopio che non nel caso di misure interferometriche. Per l'interferometro una variazione dell'indice di rifrazione dell'aria davanti ai fori, che si trovano davanti agli specchi, sposta soltanto la figura d'interferenza, di modo che le frange d'interferenza restano ben visibili, a condizione che questo spostamento proceda in modo sufficientemente lento. Invece, osservando nelle stesse condizioni al telescopio ad obiettivo non diaframmato, le variazioni irregolari dell'indice di rifrazione dell'aria deformano fortemente l'immagine della stella osservata.

Un'altra ragione sta nel fatto che il diametro lineare della maggior parte delle stelle differisce poco dal diametro del Sole. Alla distanza alla quale si trova la stella più vicina, il disco solare sarebbe visto sotto un angolo di 0,007''. Per misurare questi angoli la distanza tra gli specchi esterni M_1 e M_2 dell'interferometro (base) deve essere dell'ordine di 20 m. La costruzione di un interferometro di queste dimensioni è molto difficile per ragioni di particolari esigenze nei parametri meccanici della costruzione dell'installazione.

5. È evidente che i principi esposti sopra sono applicabili anche ai radiotelescopi. I radiotelescopi, a causa della grande lunghezza delle onde radio, sono caratterizzati da deboli poteri risolutivi. Persino con i più grandi telescopi muniti di uno specchio di diametro $D \sim 100$ m, che lavorano su una lunghezza d'onda $\lambda \sim 10$ cm, la distanza angolare risolvibile $\sim \lambda/D \approx$ $\approx 10^{-3}$ rad, cioè soltanto press'a poco di 3'. La situazione migliora molto con i radiointerferometri, funzionanti secondo il principio dell'interferometro stellare di Michelson. Un radiointerferometro è composto di due antenne poste in posizioni differenti; i segnali captati da queste antenne sono diretti su un rivelatore comune. Per ottenere un grande potere risolutivo è necessario aumentare la distanza D tra le antenne (base del radiointerferometro). Si ottiene un potere risolutivo estremamente grande quando le antenne si trovano sui continenti diversi. Sono stati realizzati radiointerferometri la cui base si estendeva dalla Crimea agli USA, e dagli USA all'Australia. Con la più corta lunghezza d'onda la risoluzione angolare è uguale a $\sim 10^{-4}$ secondo d'arco, cioè il potere risolutivo è press'a poco di 100 volte più grande di quello dell'interferometro stellare di Michelson.

È da notare che, con l'aumento della lunghezza della base, aumentano le difficoltà tecniche dovute all'introduzione di una differenza di fase che varia in modo irregolare tra l'antenna ed il rivelatore. Per eliminare

quest'inconveniente, Braun e Twiss realizzarono la rivelazione indipendente dei segnali captati dalle antenne e misurarono la correlazione delle fluttuazioni delle intensità dei segnali in funzione della distanza tra le antenne. Con questi dati si trovano le dimensioni angolari di una sorgente. Braun e Twiss mostrarono che un apparecchio analogo poteva lavorare anche nella gamma visibile dello spettro. La luce inviata da una stella è focalizzata per mezzo di due specchi concavi su due fotocellule. Si misura la correlazione delle fluttuazioni delle correnti fotoelettriche eccitate nei ricevitori in funzione della distanza tra gli specchi. Non è molto difficile rendere grande la distanza tra gli specchi ed ottenere così un grande potere risolutivo.

§ 61. *Diffrazione da reticoli bi- e tridimensionali. Diffrazione dei raggi* X

1. Si dice *reticolo bidimensionale* ogni struttura le cui proprietà variano periodicamente lungo due direzioni differenti, ad esempio con due reticoli unidimensionali incrociati, cioè sovrapposti l'uno all'altro in modo che i tratti del primo formino con quelli dell'altro un certo angolo. La figura di diffrazione ottenuta con questa struttura, come è facile dimostrare, è data dalla sovrapposizione delle figure di diffrazione prodotte dai corrispondenti reticoli unidimensionali.

I *reticoli tridimensionali* o *spaziali* possiedono una periodicità in tre diverse direzioni. Questi reticoli giocano un ruolo importante nella fisica dei raggi X. Per lungo tempo non si riusciva ad ottenere la diffrazione dei raggi X, poiché i reticoli di diffrazione utilizzati nella gamma ottica dello spettro erano troppo grossi per i raggi X, la cui lunghezza d'onda è di 0,1 nm ed anche meno (si veda il § 46, punto 8). Laue (1879-1960) propose nel 1912 di utilizzare a questo scopo un cristallo, che si può considerare come un *reticolo spaziale periodico naturale*, costituito da atomi o da ioni. Secondo l'indicazione di Laue, i suoi collaboratori Friedrich (1883-1968) e Knipping (1883-1935) inviarono un fascio stretto di raggi X su un monocristallo ed ottennero su una lastra fotografica un sistema di macchie discrete ripartite in modo regolare, formate in conseguenza della diffrazione dei raggi X sul reticolo cristallino. Quest'esperimento fondamentale permise di dimostrare la *natura ondulatoria* dei raggi X e pose le fondamenta della *fisica dei solidi* moderna. Quest'esperimento fornì per la prima volta una prova sperimentale dell'ipotesi cristallografica relativa al fatto che i cristalli sarebbero costituiti da particelle ripartite nello spazio in modo regolare e periodico.

Quest'esperimento fu all'origine di due nuovi rami della fisica: la *spettroscopia a raggi* X e la *radiocristallografia*. La spettroscopia a raggi X utilizza cristalli naturali di struttura cristallina nota per realizzare l'analisi dei raggi X e per misurare le loro lunghezze d'onda. Invece, la radiocristallo-

grafia utilizza raggi X di lunghezza d'onda nota per determinare la struttura cristallina dei cristalli e per misurare i parametri di questa struttura. La diffrazione dei raggi X si distingue dalla diffrazione ottica poiché viene realizzata *senza lenti e specchi*, poiché non esistono materiali convenienti per la loro fabbricazione.

2. Per procedere ad uno studio qualitativo della diffrazione dei raggi X, è comodo cominciare dallo studio della *diffrazione prodotta da una catena rettilinea* di particelle (di atomi) identiche ed equidistanti. Indichiamo con a la distanza tra le particelle vicine. Supponiamo che su questa catena cada un fascio di raggi X paralleli con un angolo d'incidenza α_0 (fig. 227). La differenza di cammino tra i raggi diffusi da atomi vicini ad un angolo α è
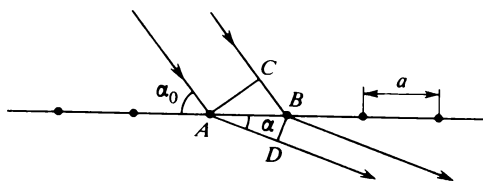
Fig. 227

$AD - CB = a(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$. La condizione di rafforzamento interferenziale di questi raggi ha la forma

$$a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = m\lambda \qquad (61.1)$$

($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Quest'espressione difinisce le *posizioni dei massimi di diffrazione nella figura di diffrazione di Fraunhofer*, cioè a distanza infinita dalla catena di particelle. Si possono considerare infinite quelle distanze r che verificano la condizione

$$r \gg l^2/\lambda, \qquad (61.2)$$

dove l è la lunghezza della catena. Essendo piccola la lunghezza dei raggi X, queste distanze sono sempre molto grandi. Così, per $l = 1$ mm, $\lambda = 0{,}1$ nm $= 10^{-7}$ mm la condizione (61.2) dà $r \gg 10^7$ mm $= 10$ km. Quindi, per realizzare una diffrazione di Fraunhofer sarebbero necessarie distanze molto grandi. Negli esperimenti reali la lastra fotografica che registra la figura di diffrazione è posta ad alcune decine di centimetri dal cristallo diffondente, cioè non nella zona d'onda ma a distanza di decine e centinaia di migliaia di volte più vicino. Quest'osservazione riguarda evidentemente non soltanto le catene lineari ma anche i reticoli bi- e tridimensionali.

Ma, come è stato mostrato nel § 52, *il campo d'onda che appare in seguito ad una diffrazione da un reticolo piano è rappresentato a tutte le distanze da una sovrapposizione di onde piane di tutte le direzioni possibili.* Questa sovrapposizione comprende anche le *onde non omogenee* (evane-

scenti), che a distanze dal reticolo che sono superiori al suo periodo, non giocano alcun ruolo poiché a queste distanze esse si smorzano quasi completamente. La stessa cosa ha luogo nel caso di una diffrazione da reticoli cristallini. (Nel caso di una catena lineare è più comodo sostituire le onde piane con onde *cilindriche*.) La lastra fotografica è posta a piccola distanza dal cristallo dove è valida l'ottica geometrica, ma abbastanza lontano perché le differenti onde piane emesse dal cristallo possano separarsi spazialmente. Per determinare le posizioni dei massimi d'intensità sulla lastra fotografica è sufficiente conoscere le *direzioni* di propagazione di queste onde. Ma queste direzioni non dipendono dalla distanza dal cristallo. Nel campo di validità delle leggi dell'ottica geometrica esse sono le stesse che nella zona d'onda e quindi, per determinare la posizione dei massimi d'intensità sulla lastra fotografica, si può utilizzare la formula (61.1). Ma questi massimi differiscono dai massimi d'interferenza della zona d'onda. In ogni massimo della zona d'onda le vibrazioni emesse da tutti gli atomi del reticolo arrivano o *in fase*, o *con fasi che differiscono di* $2m\pi$ (con m intero). Invece, per i massimi d'intensità nel campo di validità dell'ottica geometrica ciò non ha luogo.

Se l'angolo α_0 è dato, la condizione (61.1) definisce l'insieme discreto di angoli α che la verificano. Essa definisce dunque nello spazio una *famiglia discreta di coni* lungo le generatrici dei quali possono propagarsi fasci di raggi diffratti. Nel piano della sezione di questi coni con la lastra fotografica si ottiene una *famiglia discreta di ellissi o di iperboli* in funzione della direzione di questo piano. In particolare, quando il piano della lastra è perpendicolare alla direzione della catena di particelle, si ottiene una *famiglia di cerchi concentrici.*

3. I reticoli bi- e tridimensionali possono essere *semplici* (*primitivi*) o *composti* (si veda il vol. II, § 130). Un reticolo si dice semplice se è costituito da atomi identici, ed inoltre una cella elementare del reticolo è formata da otto atomi disposti ai vertici di un parallelepipedo. Tutti gli altri reticoli cristallini sono detti composti. Un reticolo composto è formato da più reticoli semplici inseriti gli uni negli altri. La figura di diffrazione che appare per diffrazione di raggi X da un reticolo composto si ottiene dall'interferenza delle figure di diffrazione dei reticoli semplici che lo costituiscono. Perciò è sufficiente studiare la diffrazione da un reticolo semplice.

Se uniamo con una retta due atomi qualsiasi di un reticolo semplice, visto che la ripartizione degli atomi è periodica, su questa retta si troverà un numero infinito di atomi equidistanti. Chiameremo queste linee rette *catene di atomi* ed i piani contenenti gli atomi, *piani reticolari.* Ogni reticolo cristallino illimitato si può considerare come un sistema infinito di catene di atomi parallele doppiamente periodico o come un sistema periodico infinito di piani reticolari paralleli. Queste rappresentazioni non sono uniche e possono essere eseguite in un'infinità di modi. Tre catene qualsiasi non complanari e che si intersecano in un nodo del reticolo possono essere scel-

te come assi coordinati X, Y, Z di un sistema di coordinate rettangolari o, più in generale, oblique. Le coordinate degli atomi di un reticolo semplice sono allora definite dalle seguenti espressioni:

$$x_{lmn} = la_1, \quad y_{lmn} = ma_2, \quad z_{lmn} = na_3 \quad (l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{61.3}$$

dove a_1, a_2, a_3 sono costanti dette *periodi del reticolo*. La cella elementare di un tale reticolo è un parallelepipedo a spigoli a_1, a_2, a_3 i cui vertici sono occupati dagli atomi.

Supponiamo che su un reticolo semplice cada un fascio di raggi X paralleli i cui assi formino gli angoli α_0, β_0, γ_0 con gli assi coordinati X, Y, Z. Affinché le onde diffuse dagli atomi lungo una retta, che forma angoli α, β, γ con gli assi coordinati, possano rinforzarsi reciprocamente interferendo nella zona d'onda, debbono essere verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} a_1(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= m_1\lambda, \\ a_2(\cos\beta - \cos\beta_0) &= m_2\lambda, \\ a_3(\cos\gamma - \cos\gamma_0) &= m_3\lambda \\ (m_1, m_2, m_3 &= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{aligned} \tag{61.4}$$

dette *condizioni di Laue*. La prima condizione è necessaria, poiché essa corrisponde al rafforzamento interferenziale delle onde diffuse ad un angolo α rispetto all'asse X dagli atomi che occupano ogni catena di atomi parallela a quest'asse. Un significato analogo hanno anche le altre due condizioni.

Ma le condizioni (61.4) sono anche sufficienti per il rafforzamento interferenziale delle onde diffuse da tutti gli atomi in una direzione data. Per dimostrarlo tracciamo attraverso un atomo qualunque 1 una retta parallela all'asse X. Se è verificata la prima condizione (61.4), nella direzione ad un angolo α con questa retta si ottiene un massimo d'interferenza. Tracciamo ora per lo stesso atomo 1 una retta parallela all'asse Y. Se è verificata la seconda condizione (61.4), tutti gli atomi di questa retta diffondono in una direzione data onde, con fase uguale a quella dell'onda diffusa dall'atomo 1. Quindi, tutti gli atomi di entrambe le rette, e con essi anche tutti gli atomi contenuti nel loro piano, inviano onde nella stessa direzione con le stesse fasi. Quindi se sono verificate le prime due condizioni (61.4), si ha un rafforzamento interferenziale delle onde diffuse nella direzione considerata da tutti gli atomi di un piano atomico qualsiasi parallelo al piano coordinato XY. Se è verificata anche la terza condizione (61.4), tutte le onde diffuse da tutti i piani atomici si rinforzano reciprocamente per interferenza. Quindi, le condizioni (61.4) sono sufficienti.

4. La figura di diffrazione registrata sulla lastra fotografica, interposta sul tragitto dei fasci di raggi X diffusi da un monocristallo, negli esperimenti del tipo di quello di Laue, si chiama *diagramma di Laue*. Si può ripe-

tere tutto quello che abbiamo detto a proposito della formula (61.1) sull'utilizzazione delle condizioni di Laue nel dominio di validità dell'ottica geometrica. *Le formule di Laue* (61.4) *definiscono le direzioni dei fasci diffratti dal cristallo.* Il significato fisico dei diagrammi di Laue è ben illustrato dall'analogia con il fenomeno della riflessione di un fascio luminoso da uno specchio a facce multiple. In quest'ultimo caso si forma un gran numero di fasci riflessi che si propagano nelle diverse direzioni. Quando questi fasci cadono su uno schermo, appare un sistema di macchie brillanti disposte in modo regolare, analogo ad un diagramma di Laue ottenuto per diffrazione dei raggi X.

Esaminiamo il diagramma di Laue prodotto da un reticolo cristallino piano. In questo caso le tre condizioni di Laue (61.4) si riducono a due. Se prendiamo il piano del reticolo come piano reticolare XY, utilizziamo soltanto le prime due condizioni (61.4). La prima condizione (61.4) impone che i massimi debbano stare sulla superficie di un cono che forma un angolo α con l'asse X, e la seconda che i massimi stiano sulla superficie di un altro cono che forma un angolo β con l'asse Y. Le rette lungo le quali s'intersecano le superfici di entrambi i coni mostrano le direzioni dei fasci diffratti. Dove questi fasci sono intersecati dal piano della lastra fotografica, compaiono massimi di diffrazione puntiformi e discreti disposti lungo ellissi, iperboli o cerchi, a seconda della direzione del piano della lastra. I massimi possono anche non apparire se $\cos\alpha$ o $\cos\beta$ o entrambe queste quantità, calcolate con la formula (61.4), risultassero in modulo superiori all'unità.

Consideriamo ora un reticolo tridimensionale (spaziale). Oltre alle due superfici coniche, definite dalle prime due condizioni (61.4), viene ora aggiunta una terza superficie le cui generatrici formano un angolo γ con l'asse Z. I fasci diffratti debbono trovarsi simultaneamente sulle tre superfici coniche. Ma visto che, in generale, i tre coni non s'intersecano lungo una retta comune, ne segue che quando un fascio di raggi X monocromatici cade su un monocristallo non si formano, in generale, fasci discreti diffusi, ma la diffusione si produce in modo più o meno uniforme in tutte le direzioni. La sola eccezione è il raggio diretto che attraversa il cristallo senza cambiare direzione. Ma per le lunghezze d'onda date, i tre coni possono avere generatrici comuni. Perciò *per ottenere diagrammi di Laue da reticoli tridimensionali si deve utilizzare uno spettro continuo di raggi* X, poiché questa radiazione può contenere le lunghezze d'onda che verificano tutte e tre le condizioni di Laue (61.4). Se l'occhio potesse percepire i raggi X e distinguere i loro colori, il diagramma di Laue osservato sullo schermo sarebbe visto a colori, cioè composto di macchie di diversi colori.

Confermiamo i risultati ottenuti con un semplice calcolo. Supponiamo che un reticolo cristallino semplice appartenga ad un sistema rombico la cui cella elementare è un parallelepipedo rettangolo. Supponiamo inoltre che siano verificate le condizioni di Laue (61.4) per una certa lunghezza d'onda

λ. Risolviamo la (61.4) rispetto a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, eleviamo al quadrato ed addizioniamo membro a membro. Allora, tenendo conto delle relazioni $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1$, otteniamo dopo semplici trasformazioni

$$\lambda = -\frac{2(m_1\cos\alpha_0 + m_2\cos\beta_0 + m_3\cos\gamma_0)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}. \tag{61.5}$$

Solo per questa lunghezza d'onda le equazioni (61.4) sono verificate simultaneamente. Quest'equazione definisce in modo univoco la lunghezza d'onda per la quale si può ottenere un massimo di diffrazione corrispondente ai numeri interi m_1, m_2, m_3 ed agli angoli α, β, γ.

La figura 228 riproduce il diagramma di Laue di un monocristallo di quarzo. La ripartizione regolare delle macchie sulla lastra fotografica ci
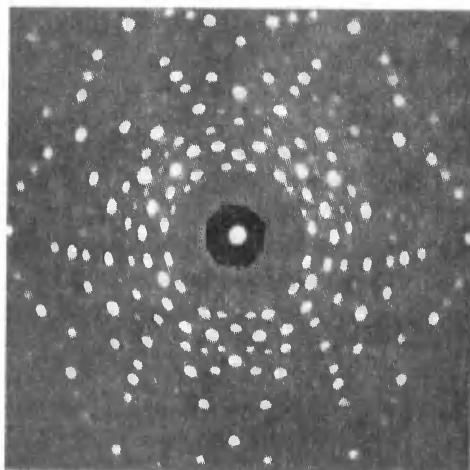
Fig. 228

conferma l'esistenza di una distribuzione regolare degli atomi costituenti il cristallo.

5. La diffrazione dei raggi X da un cristallo può essere interpretata in un modo un po' differente; quest'interpretazione fu suggerita indipendentemente dal fisico inglese L. Bragg (1890-1971) e dal cristallografo russo Ju. Wulff (1863-1925). Tracciamo in un cristallo un piano arbitrario *AB* contenente un numero sufficientemente grande di atomi (fig. 229,*a*). Se su questo piano cade un raggio X *MO*, esso verrà riflesso con lo stesso angolo (raggio *ON*). Nella stessa direzione appariranno i raggi riflessi dai piani reticolari paralleli al piano *AB*. L'intensità dei raggi riflessi da un solo piano reticolare è troppo debole per poter esercitare un'azione notevole, che può apparire soltanto in conseguenza del rafforzamento interferenziale di tutti i

raggi riflessi dai piani reticolari considerati. La differenza di cammino $PO'Q$ tra raggi riflessi da piani vicini è uguale a $2d \sin \vartheta$, dove d è la distanza tra questi piani. Il massimo d'interferenza corrisponde alla condizione

$$2d \sin \vartheta = m\lambda, \tag{61.6}$$

detta *legge di Bragg-Wulff* ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) Quale che sia l'angolo di incidenza ϑ e l'ordine di riflessione m, si può sempre trovare una lunghezza d'onda λ per la quale sia verificata la relazione (61.6). Solo le onde di questa lunghezza d'onda saranno riflesse dai piani reticolari considerati.

In ogni cristallo si può tracciare un numero infinito di insiemi di piani reticolari paralleli, di direzioni diverse, per esempio tutti i piani paralleli ai piani reticolari AA' o BB' (fig. 229,*b*). Sono efficaci solo i piani sui quali gli atomi sono disposti in modo sufficientemente denso, poiché solo questi
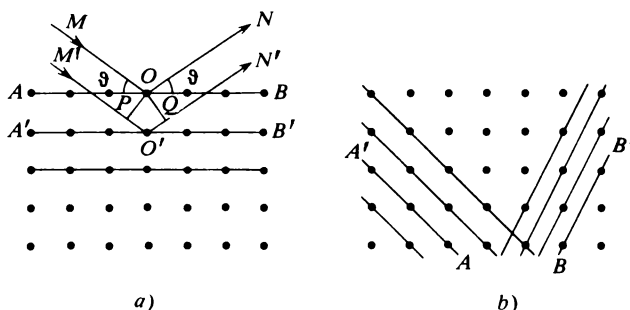
Fig. 229

possono dar luogo a riflessioni con interferenza. La figura di diffrazione può essere considerata come un insieme dei fasci di raggi X che hanno subìto riflessioni su questi piani reticolari.

Contro quest'ultima affermazione si possono fare alcune obiezioni. Infatti, un fascio MO di raggi X che incide sul piano reticolare AB (fig. 229,*a*) produce non soltanto il fascio riflesso ON, ma anche fasci diffratti laterali i quali in certe condizioni possono interferire con fasci della stessa direzione diffratti da piani reticolari paralleli. Non abbiamo tenuto conto di questi fasci nei nostri ragionamenti, e perciò può sembrare che il metodo di Bragg-Wulff non definisca la totalità dei fasci di diffrazione. Il seguente ragionamento che dimostra l'*equivalenza delle condizioni di Laue e della legge di Bragg-Wulff* mostra che non è così.

6. Prendiamo i vettori $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, che rappresentano gli spigoli di un parallelepipedo elementare del reticolo cristallino, come vettori di base di un sistema di coordinate oblique. Il raggio vettore di ogni atomo del reticolo si esprime allora con la formula

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3, \tag{61.7}$$

dove le coordinate x, y, z assumono valori interi. Siano s_0 il vettore unitario tracciato nella direzione del raggio incidente, e s il vettore unitario che caratterizza la direzione di uno dei fasci diffratti (fig. 230). Le condizioni di Laue (61.4) si possono allora scrivere nella seguente forma vettoriale:

$$\begin{aligned} (s - s_0)a_1 &= m_1\lambda, \\ (s - s_0)a_2 &= m_2\lambda, \\ (s - s_0)a_3 &= m_3\lambda. \end{aligned} \tag{61.8}$$

Il vettore $N = s - s_0$ è diretto parallelamente alla bisettrice dell'angolo formato dai raggi incidente e riflesso. Introducendo questo vettore, otteniamo

$$(Na_1) = m_1\lambda, \quad (Na_2) = m_2\lambda, \quad (Na_3) = m_3\lambda. \tag{61.9}$$

Attraverso l'atomo che si trova all'origine delle coordinate O tracciamo un
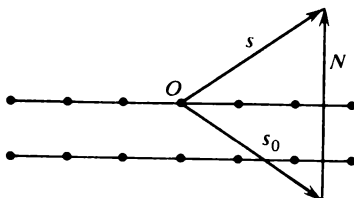
Fig. 230

piano perpendicolare al vettore N. Dimostriamo che questo piano è un piano reticolare. L'equazione di questo piano ha la forma $(Nr) = 0$. Perché un atomo di coordinate (61.7) sia contenuto in questo piano, è necessario e sufficiente che le sue coordinate verifichino l'equazione

$$(Na_1)x + (Na_2)y + (Na_3)z = 0,$$

o, tenendo conto della (61.9), l'equazione $m_1x + m_2y + m_3z = 0$. Quali che siano i numeri interi m_1, m_2, m_3, esiste una famiglia di soluzioni intere a due parametri di quest'equazione. Quindi, il piano $(Nr) = 0$ è un piano reticolare.

Da quanto dimostrato segue che ad ogni raggio diffratto s si può far corrispondere un certo piano reticolare, e quindi anche una famiglia infinita di piani reticolari ad esso paralleli, che formano per riflessione speculare raggi della stessa direzione di quella del raggio diffratto considerato. Con questo è dimostrato che la legge di Bragg-Wulff definisce tutte le direzioni lungo le quali possono propagarsi i fasci di raggi X diffratti. Ne segue che *ogni fascio diffratto laterale, formato in conseguenza di una diffrazione da un certo piano reticolare, ha la stessa direzione del fascio riflesso in modo speculare da un altro piano reticolare. Le direzioni dei fasci riflessi in modo speculare abbracciano tutte le direzioni dei massimi di diffrazione.*

È chiaro che non tutti i piani reticolari riflettono in modo efficace e

producono massimi osservabili: è necessario che il piano reticolare *contenga un numero sufficiente di atomi per unità di superficie*, altrimenti l'intensità dei raggi riflessi sarà troppo piccola per impressionare la lastra fotografica.

7. È utile precisare il significato della legge di Bragg-Wulff. Isoliamo una famiglia di piani reticolari paralleli e consideriamo i raggi riflessi specularmente da ciascun piano. La legge di Bragg-Wulff non significa assolutamente che, per interferenza tra i raggi riflessi e tra questi ultimi ed il raggio incidente, si ottiene un quadro reale della ripartizione del campo d'onda nel cristallo. Infatti il raggio, che nella deduzione e nell'interpretazione della legge Bragg-Wulff si è soliti chiamare raggio riflesso da un solo piano reticolare, in realtà non lo è. Questo raggio è il risultato di un processo complicato che fa intervenire *tutti gli atomi del cristallo* e non i soli atomi del piano reticolare considerato. In particolare, alla formazione di questo raggio partecipano i raggi laterali di uguale direzione prodotti per diffrazione dagli altri piani reticolari. Ma la figura di diffrazione finale è quella che si osserverebbe se i singoli piani reticolari riflettessero in modo speculare i raggi X, con coefficiente di riflessione conveniente, e non producessero alcun fascio di diffrazione laterale.

8. Abbiamo così dimostrato l'equivalenza dei metodi di Laue e di Bragg-Wulff. È ora utile dimostrare che dalle formule di Laue si può dedurre la legge di Bragg-Wulff senza ricorrere a considerazioni suppelementari. Calcoliamo prima di tutto la lunghezza del vettore $N = s - s_0$ che è normale al piano nel quale si realizza la riflessione di Bragg considerata. L'angolo tra i vettori unitari s_0 e s è uguale a 2ϑ, cioè al doppio dell'angolo d'incidenza radente. Quindi, $N^2 = 2 - 2(ss_0) = 2(1 - \cos 2\vartheta) = 4 \sin^2 \vartheta$, e $N = 2 \sin \vartheta$. Prendiamo il piano reticolare, nel quale si produce la riflessione di Bragg, come piano coordinato XY. La distanza interreticolare d è allora

$$d = \left(a_3 \frac{N}{N}\right) = \frac{(a_3 N)}{2 \sin \vartheta}.$$

Utilizzando la terza relazione della (61.9), otteniamo

$$d = m_3 \lambda / (2 \sin \vartheta),$$

che coincide con la legge di Bragg-Wulff (61.6).

9. Consideriamo due esempi d'applicazione della relazione (61.6).

a) *Spettrografo a raggi* X *a cristallo ruotante* (fig. 231). Un fascio di raggi X, preliminarmente diaframmato da una fenditura, è inviato su un monocristallo K di struttura cristallina nota. Il cristallo può ruotare attorno ad un asse perpendicolare al raggio incidente, o fare oscillazioni rotatorie attorno a quest'asse. Il fascio diffratto cade sulla lastra fotografica FF' o penetra in una camera d'ionizzazione. In tal modo le direzioni dei raggi d'incidenza e diffratto e quindi il valore dell'angolo d'incidenza radente ϑ

sono fissati. Se il fascio d'incidenza è monocromatico o composto di singole linee monocromatiche, la relazione di Bragg-Wulff per una posizione qualunque del cristallo non è generalmente verificata. Ma fatto ruotare, il cristallo può occupare una posizione in cui questa relazione sia verificata ed allora appare un massimo di riflessione che viene registrato sulla lastra fotografica (macchia annerita) oppure provoca una corrente nella camera di ionizzazione. Una volta trovata questa posizione, si potrà determinare l'angolo d'incidenza radente ϑ e calcolare la lunghezza d'onda λ mediante la formula (61.6).
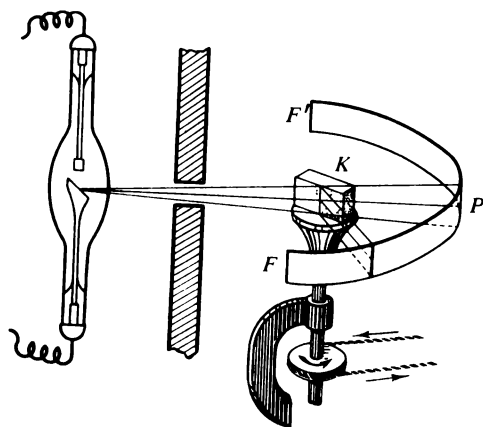
Fig. 231

È evidente che con questo metodo non si può determinare il valore assoluto della lunghezza d'onda ma soltanto il suo rapporto con la costante di reticolo d. Per le misure assolute è necessario conoscere il valore di d. Per determinare d è sufficiente misurare, mediante un procedimento indipendente, la lunghezza d'onda di una riga spettrale ben determinata. Si può farlo con l'aiuto di un reticolo di diffrazione a riflessione di periodo conosciuto, misurando l'angolo di diffrazione per incidenza radente (si veda il § 46, punto 8).

b) *Metodo di Debye-Scherrer-Hell.* Questo metodo è utilizzato nella radiocristallografia per lo studio delle strutture cristalline dei metalli e degli altri materiali cristallini allo stato di polvere. Il campione da studiare (policristallo) ha di solito la forma di un piccolo cilindro ed è costituito da molti cristalli piccolissimi orientati in tutte le direzioni. L'apparecchio è analogo a quello rappresentato nella figura 231, ma il tavolino portaoggetto è fisso. Sul campione è inviato un fascio di raggi X monocromatici di lunghezza d'onda λ nota. La figura di diffrazione detta *diagramma Debye-Scherrer* è registrata sulla lastra fotografica.

La formazione di questa figura di diffrazione si può spiegare nel se-

guente modo. Tra tutti i piccoli cristalli orientati in modo disordinato esiste un gran numero di cristalli orientati di modo che per una data lunghezza d'onda λ sia verificata la legge di Bragg-Wulff. I raggi che hanno subìto la riflessione di Bragg su questi cristallini costituiscono la superficie di un cono il cui asse è diretto lungo il raggio incidente ed il cui angolo al vertice è determinato dalla distanza interreticolare d (nella figura 232 è mostrata la riflessione da un microcristallo rappresentato sotto forma di un piccolo specchio). Visto che i valori di queste distanze formano un insieme discreto, dietro il campione si forma una famiglia di coni discreta, di vertice ed asse comuni.
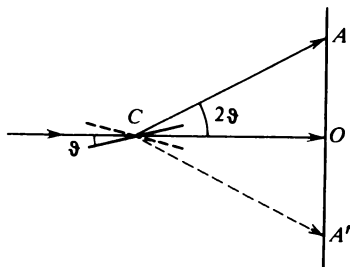
Fig. 232

Se la lastra fotografica è disposta perpendicolarmente a quest'asse comune, il diagramma Debye-Scherrer è costituito da cerchi concentrici. Dopo aver misurato i raggi di questi cerchi, si può stimare il valore probabile dell'angolo ϑ e calcolare in seguito, mediante la formula di Bragg-Wulff, le corrispondenti distanze interreticolari. Conoscendo queste distanze, si può ricostruire la struttura cristallina del campione. Per poter determinare tutte le distanze interreticolari, alla lastra fotografica viene data la forma di una banda che circonda lungo una circonferenza il campione esaminato. Il diagramma di un campione di NaCl in polvere cristallina è riportato nella figura 233.

Fig. 233

Osserviamo che a differenza dei diagrammi di Laue, per l'ottenimento dei quali è utilizzata una radiazione X a spettro continuo, i diagrammi Debye-Scherrer sono ottenuti con una *radiazione monocromatica*. In luce bianca non si possono ottenere diagrammi Debye-Scherrer ad anelli di diffrazione netti.

10. Per concludere, esaminiamo la questione del potere risolutivo di un reticolo di diffrazione (unidimensionale) nella gamma dei raggi X. La formula (47.3) del potere risolutivo di un reticolo concerne il caso di una diffrazione di Fraunhofer. Abbiamo già indicato sopra che nella spettrografia a raggi X si ha a che fare con un caso contrario. Non c'è alcun dispositivo focalizzante e la lastra fotografica si trova a piccola distanza dal reticolo. In queste condizioni i fasci diffratti obbediscono all'ottica geometrica e non si può utilizzare la formula (47.3).

Supponiamo che sul reticolo cada un fascio di raggi paralleli di lunghezza d'onda λ, con angolo d'incidenza radente α_0. La direzione di propagazione del fascio diffratto di ordine m è definita dalla relazione $d(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) = m\lambda$. Per un altro fascio di raggi di lunghezza d'onda λ', poco differente da λ, avremo $d(\cos\alpha_0 - \cos\alpha') = m\lambda'$. Ne segue che $d(\cos\alpha' - \cos\alpha) = m(\lambda - \lambda')$, o ancora

$$d\sin\alpha\cdot\delta\alpha = m\delta\lambda,$$

dove $\delta\alpha = |\alpha' - \alpha|$, $\delta\lambda = |\lambda' - \lambda|$. Per assicurare una risoluzione spettrale è necessario che i fasci siano spazialmente separati. Se L è la distanza dalla lastra fotografica misurata lungo la direzione del fascio diffratto, lo spostamento laterale di un fascio rispetto all'altro è uguale a $x = L\delta\alpha$. La condizione di risoluzione consiste nel fatto che questo spostamento sia superiore alla larghezza del fascio diffratto: $x \geqslant h$. Questa larghezza è data dall'espressione $h = D\sin\alpha$, dove D è la lunghezza del reticolo di diffrazione. La condizione di risoluzione è

$$\frac{Lm\,\delta\lambda}{d\sin\alpha} \geqslant D\sin\alpha.$$

Alla più piccola distanza risolvibile corrisponde il segno d'uguaglianza, e per essa si ha

$$\delta\lambda = \frac{Dd\sin^2\alpha}{Lm}, \tag{61.10}$$

mentre per il potere risolutivo si ottiene

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{Lm\lambda}{Dd\sin^2\alpha}. \tag{61.11}$$

Scriviamo questa formula nella forma

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm = \frac{L\lambda}{h^2}, \tag{61.12}$$

o

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{Lm\lambda}{hd\sin\alpha}. \tag{61.13}$$

Per aumentare il potere risolutivo si devono utilizzare fasci stretti e disporre la lastra fotografica il più lontano possibile. In confronto con la formula di Rayleigh, la formula (61.12) dà per il potere risolutivo un valore più piccolo, poiché esso si riferisce alla regione di spettro dove $L \ll h^2/\lambda$.

V. RIFLESSIONE E RIFRAZIONE DELLA LUCE

§ 62. *Luce polarizzata e luce naturale*

1. Studiando i fenomeni d'interferenza e di diffrazione, non abbiamo tenuto conto del fatto che le vibrazioni sono trasversali, supponendo che le vibrazioni, che si dovevano comporre, avvenissero in una sola direzione. Studiamo ora i fenomeni di *polarizzazione della luce*, caratteristici delle *vibrazioni trasversali*. Un'onda piana si dice *polarizzata rettilineamente* o *linearmente* se il vettore elettrico $\boldsymbol{E}$ è sempre contenuto in un piano che contiene anche la normale N al fronte d'onda (fig. 234). Questo piano si dice *piano di vibrazione* o *piano di polarizzazione* [1]. Si deve distinguere la luce polarizzata dalla *luce naturale*. Nella luce naturale i vettori $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{N}$ sono in ogni istante reciprocamente perpendicolari, ma i sensi dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ cambiano in modo disordinato nel tempo. Perciò la luce naturale possiede (statisticamente) una *simmetria assiale* rispetto alla sua direzione di propagazione. Una luce polarizzata linearmente non possiede simmetria assiale e le sue proprietà sono differenti nei vari piani contenenti la normale N. Tra questi piani ci sono due piani particolari, uno dei quali contiene il vettore $\boldsymbol{E}$ e l'altro il vettore $\boldsymbol{H}$. La dissimmetria assiale sussiste anche per una miscela di luce naturale e di luce polarizzata linearmente; questa miscela si chiama *luce parzialmente polarizzata*.

2. È facile produrre luce polarizzata linearmente facendo passare luce naturale attraverso una lamina di tormalina a facce parallele al suo asse ottico. La tormalina assorbe fortemente i raggi luminosi il cui vettore elettrico è perpendicolare all'asse ottico. Se, invece, il vettore elettrico è parallelo all'asse ottico, questi raggi attraversano la tormalina quasi senza assorbimento. Perciò la luce naturale, dopo aver attraversato la lamina di tormalina, è per una metà assorbita e la parte emergente è luce linearmente polarizzata con il vettore elettrico orientato parallelamente all'asse ottico della tormalina.

Si ritrovano le stesse proprietà anche nei *polaroid*, che sono più comodi

[1] Secondo una vecchia terminologia, si chiamava piano di polarizzazione il piano (N, $\boldsymbol{H}$) contenente il vettore magnetico $\boldsymbol{H}$.

da maneggiare. Essi sono pellicole colloidali artificiali utilizzate per la produzione di luce polarizzata. Il materiale più usato per la preparazione dei polaroid è un composto di iodio e di chinina detto *erapatite*. Questa sostanza è introdotta in una pellicola di celluloide o di gelatina. In essa gli assi dei cristalli ultramicroscopici di erapatite sono orientati nella stessa direzione mediante un procedimento adeguato (generalmente si utilizza un procedimento meccanico, per esempio lo stiramento della massa viscosa attraverso una stretta fenditura. La massa così preparata agisce, similmente alla tormalina, come un solo cristallo ed assorbe le vibrazioni luminose il cui vettore elettrico è perpendicolare all'asse ottico. In seguito riporteremo altri metodi per ottener luce polarizzata.

Ogni strumento che serve per produrre luce polarizzata si dice *polarizzatore*. Lo stesso strumento, quando viene utilizzato per lo studio della polarizzazione, è detto *analizzatore*. In tal modo, i cristalli di tormalina o i polaroid possono servire sia da polarizzatori, sia da analizzatori.
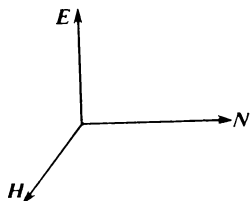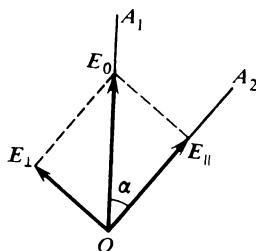
Fig. 234 Fig. 235

3. Supponiamo che due cristalli di tormalina o due polaroid siano posti uno dopo l'altro in modo che i loro assi OA_1 ed OA_2 formino un certo angolo (fig. 235). Il primo polaroid lascerà passare la luce il cui vettore elettrico $\boldsymbol{E}_0$ è parallelo al suo asse OA_1. Indichiamo con I_0 l'intensità di questa luce. Scomponiamo il vettore $\boldsymbol{E}_0$ in un vettore $\boldsymbol{E}_\parallel$, parallelo all'asse OA_2 del secondo polaroid, ed in un vettore $\boldsymbol{E}_\perp$, perpendicolare all'asse OA_2 ($\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp$). La componente $\boldsymbol{E}_\perp$ sarà arrestata dal secondo polaroid. Attraverso entrambi i polaroid passerà soltanto la luce il cui vettore elettrico $\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}_\parallel$, di modulo $E = E_0 \cos \alpha$. L'intensità della luce che ha attraversato i due polaroid è

$$I = I_0 \cos^2 \alpha. \qquad (62.1)$$

Questa relazione è valida per ogni polarizzatore o analizzatore e si dice *legge di Malus* (1775-1812).

4. Importanti stati di polarizzazione vengono prodoti nel caso di sovrapposizione di onde monocromatiche e presentano un carattere generale che è lo stesso per onde vettoriali in qualsiasi natura fisica. Per rendere più

evidente quest'affermazione consideriamo un esempio meccanico in cui una particella esegue due vibrazioni armoniche di ugual frequenza ω: una vibrazione avviene lungo l'asse X, l'altra lungo l'asse Y. Le coordinate della particella sono rappresentate dalle seguenti espressioni:

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\cos(\omega t + \delta) \quad (a, b > 0). \tag{62.2}$$

Eliminando in queste espressioni il tempo t, troviamo l'equazione della traiettoria della particella:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\delta. \tag{62.3}$$

Questa è una curva del secondo ordine, e cioè un'*ellisse*, poiché le coordinate x ed y, come si vede dalla (62.2), non possono divenire infinite. Quindi, *la composizione di due vibrazioni reciprocamente perpendicolari di ugual frequenza conduce ad un moto lungo un'ellisse.*
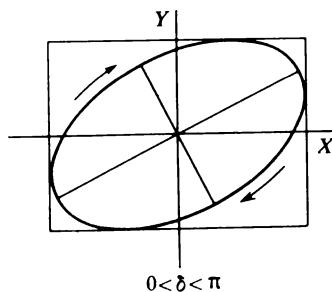
Fig. 236

Per determinare il senso di spostamento della particella lungo l'ellisse osserviamo che la fase iniziale δ può sempre essere scelta in modo che essa sia compresa tra $-\pi$ e $+\pi$. La vibrazione con fase più grande è allora detta *in anticipo* e quella di fase più piccola *in ritardo*. Scriviamo le espressioni delle componenti della velocità della particella lungo gli assi X ed Y:

$$\dot{x} = -\omega a\sin\omega t, \quad \dot{y} = -\omega b\sin(\omega t + \delta).$$

Per $t = 0$ si ha $x = a, \dot{y} = -\omega b\sin\delta$. Dunque, per $t = 0$ la particella si trova sulla retta verticale $x = a$. Se $-\pi < \delta < 0$, si ha $\dot{y} > 0$, cioè la particella si muove verso l'alto descrivendo l'ellisse in senso antiorario. Se invece $0 < \delta < \pi$, si ha $\dot{y} < 0$, la particella si sposta verso il basso, percorrendo l'ellisse in senso orario (fig. 236). In entrambi i casi *il moto lungo l'ellisse è effettuato a partire dall'estremità positiva dell'asse di vibrazione che è in anticipo di fase, proseguendo verso l'estremità positiva dell'asse di vibrazione che è in ritardo di fase.*

A seconda dei valori dei parametri a, b, δ l'ellisse può ridursi a un segmento di retta o ad una circonferenza. La formula (62.3) mostra che per il moto circolare debbono essere verificate due condizioni: 1) $\cos\delta = 0$ cioè $\delta = \pm\pi/2$, 2) $a = b$.

5. Tutto ciò che abbiamo detto si applica alla composizione di *qualsiasi* vibrazione vettoriale, in particolare a quelle elettromagnetiche. La composizione di due onde elettromagnetiche, linearmente polarizzate in due piani reciprocamente perpendicolari, dà origine a un'onda *polarizzata ellitticamente*. In quest'onda l'estremità del vettore elettrico (e quella del vettore magnetico) si muove in ogni punto dello spazio lungo un'ellisse. Se l'ellisse si riduce ad un cerchio, si dice che l'onda presenta una *polarizzazione circolare*.

In generale, un campo vettoriale monocromatico è sempre polarizzato ellitticamente. Un campo vettoriale si dice monocromatico, se tutte e tre le sue proiezioni sugli assi coordinati eseguono vibrazioni armoniche di ugual frequenza, cioè sono rappresentate da formule del tipo

$$E_j = C_j(\boldsymbol{r})\cos[\omega t + \delta_j(\boldsymbol{r})] \quad (j = x, y, z). \tag{62.4}$$

Moltiplicando queste espressioni per i versori coordinati $\boldsymbol{e}_j$ e sommando su j, scriviamo il campo monocromatico nella forma vettoriale

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})\cos\omega t + \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})\sin\omega t. \tag{62.5}$$

Se i vettori $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})$ ed $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})$ sono collineari dappertutto o in certi punti, in questi punti il vettore $\boldsymbol{E}$ è parallelo ai vettori $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})$ ed $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})$, il che significa che il campo $\boldsymbol{E}$ è linearmente polarizzato. Se invece i vettori $\boldsymbol{A}_1$ ed $\boldsymbol{A}_2$ non sono mai collineari, dalla formula (62.5) diventa evidente che il vettore $\boldsymbol{E}$ è in ogni istante contenuto nel piano definito dai vettori $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})$ ed $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})$. Ne segue che l'estremità del vettore $\boldsymbol{E}$ descrive una curva piana. Per trovare la forma di questa curva, prendiamo come asse X la direzione di $\boldsymbol{A}_1$, e come asse Y la direzione perpendicolare ad $\boldsymbol{A}_1$, contenuta nel piano $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$. Le proiezioni E_x ed E_y sono allora

$$E_x = a_x(\boldsymbol{r})\cos(\omega t + \delta_x), \quad E_y = a_y(\boldsymbol{r})\cos(\omega t + \delta_y).$$

Il problema si riduce dunque alla composizione di due vibrazioni armoniche reciprocamente perpendicolari, di uguale frequenza, sfasate l'una rispetto all'altra. Il risultato di questa composizione corrisponde al moto lungo un'ellisse.

La luce emessa da sorgenti reali *non è polarizzata* o *è polarizzata solo parzialmente*. Quest'è la migliore dimostrazione del fatto che essa non è monocromatica.

§ 63. *Condizioni al contorno nella teoria elettromagnetica della luce*

1. *La teoria formale della riflessione e della rifrazione della luce* è costruita in base a *condizioni al contorno* che debbono essere verificate dai vettori del campo elettromagnetico sulla frontiera di separazione di due mezzi. Questa teoria definisce le grandezze caratteristiche delle onde riflessa e rifratta, ma non può spiegare il *meccanismo* di formazione di queste onde. All'ultima questione, nonché a questioni più fini, risponde la *teoria molecolare*. Prima esporremo la teoria formale e poi daremo un'esposizione succinta della teoria molecolare della riflessione e della rifrazione della luce.

Assimiliamo tutti i corpi a mezzi continui e supponiamo che alle frontiere di separazione di questi mezzi non esistano né cariche, né correnti superficiali. Allora sulle frontiere debbono essere continue le componenti tangenziali dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ e le componenti normali dei vettori $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{B}$

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}, \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)}, \tag{63.1}$$

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}, \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)}. \tag{63.2}$$

Tutte queste condizioni derivano dalle equazioni macroscopiche di Maxwell in forma integrale e perciò sono valide *per tutti i mezzi* che possono essere assimilati a mezzi continui. Le condizioni (63.1) seguono dalle equazioni

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\int \dot{\boldsymbol{B}}\,d\boldsymbol{F},$$
$$\int \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \frac{1}{c}\int \dot{\boldsymbol{D}}\,d\boldsymbol{F} + \frac{4\pi}{c}\mathscr{I}, \tag{63.3}$$

e le condizioni (63.2) dalle equazioni

$$\oint \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{F} = 0, \quad \oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{F} = 0 \tag{63.4}$$

(si veda il vol. III, § 82).

2. Le equazioni (63.1) e (63.2) non sono indipendenti. Per dimostrarlo costruiamo un cilindro infinitamente corto le cui generatrici siano perpendicolari alla frontiera di separazione e le basi F_1 e F_2 siano da parti opposte rispetto a questa frontiera (fig. 237). In base al teorema della circuitazione del vettore $\boldsymbol{H}$ otteniamo

$$\oint_{L_1} H_l^{(1)}\,dl = \frac{1}{c}\int \dot{D}_n^{(1)}\,dF_1, \qquad \oint_{L_2} H_l^{(2)}\,dl = \frac{1}{c}\int \dot{D}_n^{(2)}\,dF_2.$$

Al limite, quando l'altezza del cilindro diventa nulla, i contorni L_1 e L_2 si uniranno in un contorno comune L e le basi F_1 e F_2 in un elemento di superficie comune F limitato dal contorno L. In questo caso, visto che le componenti tangenziali del vettore $\boldsymbol{H}$ sono continue, gli integrali estesi al contorno coincideranno e di conseguenza

$$\int_F \dot{D}_n^{(1)} dF = \int_F \dot{D}_n^{(2)} dF.$$

Si ha analogamente

$$\int_F \dot{B}_n^{(1)} dF = \int_F \dot{B}_n^{(2)} dF.$$

Di qui, essendo arbitrario il dominio d'integrazione, si ha

$$\dot{D}_n^{(1)} = \dot{D}_n^{(2)}, \quad \dot{B}_n^{(1)} = \dot{B}_n^{(2)}. \tag{63.5}$$

Quindi le condizioni al contorno (63.5), come si vede dalla loro deduzione, sono corollari delle condizioni (63.1) e delle equazioni di Maxwell sulla circuitazione dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$. Nel caso di un campo monocromatico $\dot{\boldsymbol{D}} = i\omega\boldsymbol{D}$, si ha $\dot{\boldsymbol{B}} = i\omega\boldsymbol{B}$, cosicché le condizioni (63.5) diventano le (63.2). Ne segue che per i campi monocromatici le condizioni (63.2) sono verificate automaticamente, se sono verificate le condizioni (63.1). Perciò nel seguito si possono utilizzare soltanto le condizioni (63.1) tralasciando le condizioni (63.2).

Se scriviamo le condizioni (63.1) in forma algebrica, si ottengono quattro equazioni, poiché ciascuno dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ può essere decomposto in due componenti tangenziali ed una componente normale, e perciò l'elettrodinamica conduce a *quattro condizioni al contorno indipendenti*.
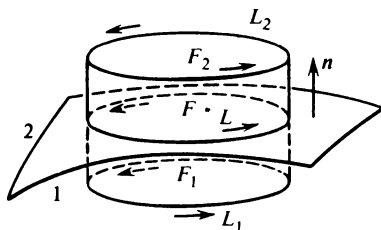
Fig. 237

Nelle vecchie teorie dell'etere elastico vi erano *sei* condizioni indipendenti: uguaglianza delle tre componenti degli spostamenti e delle tre componenti delle forze di tensione elastica da entrambi i lati della frontiera.

Perché queste sei condizioni al contorno siano verificate, è in generale necessario che oltre alle onde trasversali esistano anche onde *longitudinali*. Ma l'esperienza esclude l'esistenza di onde longitudinali; la teoria, per superare l'ostacolo, attribuiva all'etere proprietà tali che le onde longitudinali non potessero mai apparire (etere incompressibile o infinitamente compressibile). Tuttavia non si è riusciti ad ottenere una soluzione soddisfacente di questo problema. La teoria elettromagnetica non incontra questa difficoltà poiché il numero di condizioni indipendenti è uguale a quattro, e queste condizioni possono essere soddisfatte dalle due componenti trasversali dell'onda riflessa e dalle due componenti trasversali dell'onda rifratta.

§ 64. *Leggi geometriche della riflessione e della rifrazione delle onde*

1. La necessità di una riflessione e di una rifrazione della luce alla frontiera di separazione di due mezzi segue dalle condizioni al contorno. Infatti, come vedremo in seguito, queste condizioni possono essere generalmente soddisfatte solo in presenza delle onde riflessa e rifratta. Indichiamo l'onda incidente con la lettera e, l'onda riflessa con la lettera r e l'onda trasmessa con la lettera d.

Supponiamo che su una frontiera di separazione piana ed immobile cada un'onda monocromatica piana

$$\mathbf{E}^{(e)} = \vec{\mathscr{E}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})}. \tag{64.1}$$

Per ragioni di simmetria, le onde riflessa e trasmessa

$$\mathbf{E}^{(r)} = \mathbf{R} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1' \mathbf{r})}, \tag{64.2}$$

$$\mathbf{E}^{(d)} = \mathbf{D} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})} \tag{64.3}$$

sono anch'esse piane e della stessa frequenza ω dell'onda incidente. L'uguaglianza delle frequenze segue dalla linearità e dall'omogeneità delle condizioni al contorno. Se i mezzi sono immobili, i coefficienti delle intensità di campo possono dipendere dalle coordinate, ma non dal tempo. Siano ω_r e ω_d le frequenze delle onde riflessa e trasmessa. In questo caso tutte le condizioni (63.1) assumono la forma

$$A(\mathbf{r})e^{i\omega t} + B(\mathbf{r})e^{i\omega_r t} + C(\mathbf{r})e^{i\omega_d t} = 0.$$

I coefficienti $A(\mathbf{r})$, $B(\mathbf{r})$, $C(\mathbf{r})$ sono diversi da zero, solo se le onde riflessa e trasmessa esistono in realtà. Quindi, le funzioni $e^{i\omega t}$, $e^{i\omega_r t}$, $e^{i\omega_d t}$ sono linearmente dipendenti, e ciò è possibile solo per $\omega = \omega_r = \omega_d$. Se la frontiera di separazione è mobile, A, B e C dipendono non soltanto da $\mathbf{r}$, ma anche dal tempo. In questo caso avviene una variazione della frequenza (ef-

fetto Doppler). In questo capitolo si suppone sempre che i mezzi siano immobili.

2. Calcoliamo ora i vettori d'onda delle onde riflessa e trasmessa. Le formule che esprimono questi vettori sono dette *leggi geometriche della riflessione e della rifrazione delle onde,* e caratterizzano le *direzioni di propagazione delle onde riflessa e trasmessa,* ed anche lo *smorzamento nello spazio* delle onde evanescenti.

Prendiamo la frontiera di separazione dei mezzi come piano coordinato XY. Come asse X prendiamo la linea d'intersezione del piano di separazione con il piano d'incidenza. Orientiamo l'asse Z verso il basso , cioè verso il secondo mezzo. L'asse Y risulta perpendicolare al piano d'incidenza e si trova sul piano di separazione dei mezzi. Visto che, come abbiamo dimostrato, le frequenze delle onde incidente, riflessa e trasmessa sono le stesse, ciascuna delle condizioni (63.1) assume la forma

$$Ae^{-i(k_{1x}x+k_{1y}y)} + Be^{-i(k'_{1x}x+k'_{1y}y)} + Ce^{-i(k_{2x}x+k_{2y}y)} = 0,$$

dove A, B, C sono costanti diversi da zero, solo se le onde riflessa e trasmessa esistono realmente. Ponendo $y = 0$, otteniamo una relazione lineare tra le funzioni $e^{-ik_{1x}x}$, $e^{-ik'_{1x}x}$, $e^{-ik_{2x}x}$, il che implica che

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}. \qquad (64.4)$$

Analogamente,

$$k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y}. \qquad (64.5)$$

Le componenti tangenziali dei vettori d'onda delle onda riflessa e trasmessa sono uguali alla componente tangenziale del vettore d'onda dell'onda incidente. Ora bisogna trovare le componenti normali di questi vettori. Secondo la relazione (5.14)

$$k_1'^2 = k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_1, \qquad (64.6)$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_2, \qquad (64.7)$$

dove ε_1 ed ε_2 sono le costanti dielettriche del primo e del secondo mezzo. Inoltre,

$$k'_{1z} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2}, \qquad (64.8)$$

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2}. \qquad (64.9)$$

Si prende il segno meno davanti alla radice della formula (64.8) perché il segno più corrisponde all'onda incidente. Quanto al segno davanti alla radice della (64.9), esso sarà precisato in seguito in base a considerazioni fisiche.

Se l'onda incidente è omogenea, dalle (64.4), (64.5) e (64.8) segue che è omogenea anche l'onda riflessa. La sua normale d'onda è contenuta nel piano d'incidenza e l'angolo di riflessione è uguale all'angolo d'incidenza. Quanto all'onda trasmessa, si devono distinguere due casi differenti.

Primo caso. $k_2^2 > k_{1x}^2$, cioè l'onda rifratta è omogenea. Determiniamo il segno davanti al radicale. Al segno più corrisponde un'onda che si propaga allontanandosi dalla frontiera di separazione (la direzione di propagazione è riportata nella figura 238 con una freccia continua). Al segno meno corrisponde un'onda che si dirige verso la frontiera di separazione (la sua direzione è indicata con la freccia tratteggiata). Queste frecce indicano le direzioni di propagazione dei fronti d'onda, cioè dei piani di ugual fase. È chiaro che le onde riflessa e rifratta si debbono *allontanare* dalla frontiera
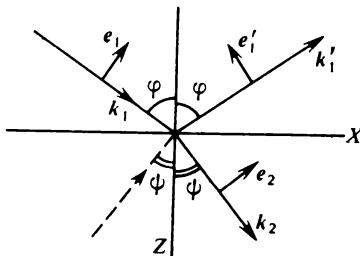
Fig. 238

di separazione, e questa condizione assicura una soluzione univoca del problema. Ma la condizione di allontanamento delle onde concerne le loro energie e non le loro fasi. Si può dimostrare che, nel caso di onde elettromagnetiche e per mezzi isotropi, le direzioni di propagazione dell'energia e della fase coincidono. Perciò il segno meno davanti al radicale della (64.9) è da scartare: le condizioni del problema sono soddisfatte soltanto dal segno più.

Come si vede dalla (64.4), le normali alle onde riflessa e rifratta sono contenute nel piano d'incidenza. Se φ è l'angolo d'incidenza e ψ è l'angolo di rifrazione, si ha

$$k_{1x} = k_1 \sin\varphi = \frac{\omega}{v_1}\sin\varphi, \quad k_{2x} = k_2 \sin\psi = \frac{\omega}{v_2}\sin\psi,$$

da cui in base alla (64.4)

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \tag{64.10}$$

Secondo caso. $k_2^2 < k_{1x}^2$, o $\omega^2/v_2^2 < \omega^2 \sin^2 \varphi/v_1^2$, da cui $\sin \varphi >$

$> v_1/v_2 = n$. Qui n è l'indice di rifrazione relativo del secondo mezzo rispetto al primo. Essendo sin $\varphi < 1$, il caso considerato è possibile solo per $n < 1$. La componente k_{2z} è puramente immaginaria, mentre l'onda nel secondo mezzo, se esiste, è non omogenea (evanescente). Il segno davanti al radicale della (64.9) deve verificare la condizione che l'ampiezza dell'onda si smorzi nell'allontanarsi dalla frontiera di separazione. Questa condizione è verificata soltanto dall'espressione

$$k_{2z} = -i\sqrt{k_{1x}^2 - k_2^2} = -\frac{i}{2h}. \tag{64.11}$$

Infatti, in questo caso la (64.3) assume la forma

$$E^{(d)} = De^{-z/2h}e^{i(\omega t - k_{1x}x)}, \tag{64.12}$$

il che significa che l'onda che si propaga nel secondo mezzo si smorza nella direzione dell'asse Z; ciò non avrebbe luogo se nella (64.11) al posto del segno meno fosse stato preso il segno più.

I piani di ugual fase dell'onda (64.12) sono perpendicolari all'asse X e si propagano lungo quest'asse con velocità di fase $v_x = \omega/k_{1x}$. I piani di uguale ampiezza sono paralleli alla frontiera di separazione. Se ci si sposta all'interno del mezzo ad una profondità h, l'intensità dell'onda (che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza) diminuisce di e volte. La quantità h è detta *profondità di penetrazione* dell'onda nel secondo mezzo. Essa è uguale a

$$h = \frac{1}{\sqrt{k_{1x}^2 - k_2^2}} = \frac{\lambda_1}{4\pi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}, \tag{64.13}$$

dove λ_1 è la lunghezza d'onda nel primo mezzo.

L'equazione (64.12) mostra che, a grandi distanze (rispetto alla profondità di penetrazione) dalla frontiera di separazione, l'onda nel secondo mezzo si smorza quasi completamente. Poiché non vi è assorbimento, l'energia dell'onda incidente, penetrata nel secondo mezzo, deve ritornare tutta nel primo mezzo. In altre parole, per $\sin\varphi > n$ la riflessione della luce deve essere *totale*. L'angolo φ_0 definito dalla relazione $\sin\varphi_0 = n$ è detto *angolo limite della riflessione totale*.

3. Nel caso di una riflessione ordinaria

$$\sin\varphi = k_{1x}/k_1, \quad \cos\varphi = k_{1z}/k_1,$$
$$\sin\psi = k_{2x}/k_2, \quad \cos\psi = k_{2z}/k_2. \tag{64.14}$$

Nel caso di una riflessione totale non esiste un angolo ψ reale che verifica le relazioni (64.14), poiché queste ultime danno per $\sin\psi$ dei valori superiori all'unità, e per $\cos\psi$ dei valori immaginari. Per avere una sola forma di de-

scrizione delle riflessioni ordinaria e totale continuiamo ad utilizzare le formule (64.14) come definizioni semplici di $\sin\psi$ e $\cos\psi$. Dato che queste quantità soddisfano la relazione $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$, esse possono essere considerate come il seno ed il coseno di un argomento complesso ψ, conformemente alla teoria delle funzioni di una variabile complessa

$$\sin\psi = \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2i}, \quad \cos\psi = \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{2}.$$

Se sono noti $\sin\psi$ e $\cos\psi$, queste formule determinano l'argomento ψ, a meno di un multiplo intero di 2π. Questa imprecisione non può influenzare il carattere univoco dei risultati fisici, poiché in tutte le formule non compare l'angolo complesso ψ, ma i suoi seno e coseno. Alle funzioni $\sin\psi$ e $\cos\psi$ così definite sono applicabili le relazioni formali della trigonometria ordinaria. Si possono dunque sottoporre le quantità complesse $\sin\psi$ e $\cos\psi$ a tutte le trasformazioni, come se fossero un seno ed un coseno ordinari.

Osserviamo infine che al posto della (64.14) si può scrivere

$$\sin\psi = \sin\varphi/n, \qquad \cos\psi = -\frac{i}{n}\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}. \tag{64.15}$$

§ 65. *Formule di Fresnel*

1. Deducendo le leggi geometriche della riflessione e della rifrazione, non abbiamo utilizzato la forma esplicita delle condizioni al contorno. Per determinare le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa è necessario utilizzare queste condizioni nella *forma esplicita*.

Scomponiamo il campo elettrico di ogni onda in due componenti, una contenuta nel piano d'incidenza e l'altra perpendicolare a questo piano. Queste componenti sono spesso dette *componenti principali* delle onde considerate; vengono indicate con gli indici ∥ e ⊥ rispettivamente. Siano $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ i vettori unitari degli assi coordinati ed $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2$ i vettori unitari contenuti nel piano d'incidenza e rispettivamente perpendicolari ai raggi incidente, riflesso e rifratto (fig. 238). Si ha allora

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{[\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{k}_1]}{k_1}, \quad \boldsymbol{e}_1' = \frac{[\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{k}_1']}{k_1}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{[\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{k}_2]}{k_2}. \tag{65.1}$$

Nel caso di riflessione totale il vettore $\boldsymbol{e}_2$ è complesso e l'interpretazione geometrica di vettore unitario, perpendicolare al raggio rifratto, perde senso. Perciò, per descrivere simultaneamente la riflessione ordinaria e quella totale, effettueremo gli ulteriori calcoli in modo puramente analitico, senza

ricorrere ad alcun disegno. Introduciamo i seguenti sviluppi:

$$\vec{\mathscr{E}} = \mathscr{E}_\perp \boldsymbol{e}_y + \mathscr{E}_\parallel \boldsymbol{e}_1,$$
$$\boldsymbol{R} = R_\perp \boldsymbol{e}_y + R_\parallel \boldsymbol{e}_1', \tag{65.2}$$
$$\boldsymbol{D} = D_\perp \boldsymbol{e}_y + D_\parallel \boldsymbol{e}_2$$

e calcoliamo le ampiezze $R_\perp$, $R_\parallel$, $D_\perp$, $D_\parallel$. Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{e}_x$ la prima delle equazioni (65.2), troviamo

$$\mathscr{E}_x = \mathscr{E}_\parallel(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_x) = \frac{\mathscr{E}_\parallel}{k_1}(\boldsymbol{e}_x[\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{k}_1]) = \frac{\mathscr{E}_\parallel}{k_1}([\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y]\boldsymbol{k}_1) = \frac{\mathscr{E}_\parallel}{k_1}(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{k}_1) = \mathscr{E}_\parallel\cos\varphi.$$

Analogamente, $\mathscr{E}_y = \mathscr{E}_\perp$, $\mathscr{E}_z = -\mathscr{E}_\parallel \sin\varphi$. Quindi, le componenti x, y, z del campo elettrico sulla frontiera di separazione dei mezzi (cioè per $z = 0$) sono

$$E_x^{(e)} = \cos\varphi\cdot\mathscr{E}_\parallel, \quad E_y^{(e)} = \mathscr{E}_\perp, \quad E_z^{(e)} = -\sin\varphi\cdot\mathscr{E}_\parallel. \tag{65.3}$$

Abbiamo tralasciato i fattori di fase, poiché in ogni punto della frontiera di separazione essi sono gli stessi per tutte e tre le onde (incidente, riflessa e trasmessa). Trascuriamo le proprietà magnetiche del mezzo, ponendo $\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{B}$. Calcoliamo il campo magnetico secondo la formula (5.6) e troviamo

$$H_x^{(e)} = -n_1\cos\varphi\cdot\mathscr{E}_\perp,$$
$$H_y^{(e)} = n_1\mathscr{E}_\parallel, \quad H_z^{(e)} = n_1\sin\varphi\cdot\mathscr{E}_\perp. \tag{65.3a}$$

Per l'onda riflessa:

$$E_x^{(r)} = -\cos\varphi\cdot R_\parallel, \quad E_y^{(r)} = R_\perp, \quad E_z^{(r)} = -\sin\varphi\cdot R_\parallel,$$
$$H_x^{(r)} = n_1\cos\varphi\cdot R_\perp, \quad H_y^{(r)} = n_1 R_\parallel, \quad H_z^{(r)} = n_1\sin\varphi\cdot R_\perp. \tag{65.4}$$

Per l'onda trasmessa:

$$E_x^{(d)} = \cos\psi\cdot D_\parallel, \quad E_y^{(d)} = D_\perp, \quad E_z^{(d)} = -\sin\psi\cdot D_\parallel,$$
$$H_x^{(d)} = -n_2\cos\psi\cdot D_\perp, \quad H_y^{(d)} = n_2 D_\parallel, \quad H_z^{(d)} = D_\parallel n_2\sin\psi. \tag{65.5}$$

Per determinare le quattro incognite $R_\parallel$, $R_\perp$, $D_\parallel$, $D_\perp$, l'elettrodinamica ci dà quattro condizioni al contorno indipendenti

$$E_x^{(e)} + E_x^{(r)} = E_x^{(d)}, \quad E_y^{(e)} + E_y^{(r)} = E_y^{(d)},$$
$$H_x^{(e)} + H_x^{(r)} = H_x^{(d)}, \quad H_y^{(e)} + H_y^{(r)} = H_y^{(d)}. \tag{65.6}$$

Sostituendo in esse i valori calcolati sopra, otteniamo

$$\cos\varphi(\mathscr{E}_\parallel - R_\parallel) = \cos\psi\cdot D_\parallel, \quad \mathscr{E}_\perp + R_\perp = D_\perp,$$
$$n_1\cos\varphi(\mathscr{E}_\perp - R_\perp) = n_2\cos\psi\cdot D_\perp, \quad n_1(\mathscr{E}_\parallel + R_\parallel) = n_2 D_\parallel.$$

Di qui

$$r_\perp \equiv \frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{n_1 \cos\varphi - n_2 \cos\psi}{n_1 \cos\ a + n_2 \cos\psi}, \quad d_\perp \equiv \frac{D_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{2n_1 \cos\varphi}{n_1 \cos\varphi + n_2 \cos\psi},$$

$$r_\parallel \equiv \frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{n_2 \cos\varphi - n_1 \cos\psi}{n_2 \cos\varphi + n_1 \cos\psi}, \quad d_\parallel \equiv \frac{D_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{2n_1 \cos\varphi}{n_2 \cos\varphi + n_1 \cos\psi}. \tag{65.7}$$

I rapporti $R_\perp / \mathscr{E}_\perp$, $D_\perp / \mathscr{E}_\perp$, $R_\parallel / \mathscr{E}_\parallel$, $D_\parallel / \mathscr{E}_\parallel$ sono detti *coefficienti di Fresnel.* Utilizzando le relazioni (64.10) è facile ridurre le formule (65.7) alla forma

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad \frac{D_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{2\cos\varphi \sin\varphi}{\sin(\varphi + \psi)},$$

$$\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{\mathrm{tg}(\varphi - \psi)}{\mathrm{tg}(\varphi + \psi)}, \quad \frac{D_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{2\cos\varphi \sin\varphi}{\sin(\varphi + \psi)\cos(\varphi - \psi)}. \tag{65.8}$$

Queste formule costituiscono la soluzione del problema posto. Esse sono state per la prima volta stabilite da Fresnel nel 1821 sulla base della teoria meccanica dell'etere elastico, per mezzo di ragionamenti molto semplici ma poco rigorosi e contradditori. Gli ulteriori tentativi di ottenere una soluzione rigorosa del problema mediante le equazioni dell'elasticità hanno peggiorato la situazione; nel caso di onde polarizzate nel piano d'incidenza, si ottenevano formule incompatibili con l'esperienza. Solo la teoria elettromagnetica della luce ha per la prima volta fornito una soluzione rigorosa e soddisfacente del problema.

2. Nel caso di una riflessione ordinaria l'angolo ψ e con esso tutti i coefficienti in Fresnel sono *reali.* Ne segue che la riflessione e la rifrazione *non sono accompagnate da alcuna variazione di fase,* ad eccezione forse della variazione di fase di 180° dell'onda riflessa. *Se l'onda incidente è linearmente polarizzata, lo sono anche le onde riflessa e rifratta.*

Per incidenza normale le formule (65.7) danno

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = -\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \tag{65.9}$$

In questo caso sparisce la differenza tra le onde polarizzate nel piano d'incidenza e nel piano perpendicolare. La differenza di segni dei coefficienti di Fresnel $R_\perp / \mathscr{E}_\perp$ e $R_\parallel / \mathscr{E}_\parallel$ è dovuta ad una scelta arbitraria dei sensi positivi dei vettori $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_1'$: nel caso limite di incidenza normale questi vettori sono orientati in sensi opposti (fig. 238). Se $n_1 < n_2$, si ha $R_\perp / \mathscr{E}_\perp <$

< 0; se invece $n_1 > n_2$, si ha $R_\perp / \mathscr{E}_\perp > 0$. *Nel primo caso la riflessione della luce è accompagnata da una variazione di fase di 180°. Nel secondo caso la riflessione non è accompagnata da alcun cambiamento di fase.*

Nel caso di incidenza radente, quando l'angolo φ è vicino a 90°, si ha

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} \to -1,$$

il che significa che la riflessione è praticamente totale. A questo è dovuta la formazione delle belle immagini delle rive dei fiumi e degli stagni che si vedono sulle loro acque calme. Questo risultato spiega anche perché la brillanza dell'immagine del Sole al tramonto è quasi uguale alla brillanza del Sole stesso.

Come si vede dalle formule (65.7) e (65.8), il rapporto $R_\perp / \mathscr{E}_\perp$ non s'annulla mai, eccezion fatta del caso banale $n_1 = n_2$. Al contrario, per $\varphi + \psi = \pi/2$ il denominatore tg $(\varphi + \psi)$ diventa infinito ed in questo caso $R_\parallel = 0$, cioè non c'è riflessione. Ne segue che quando il vettore elettrico
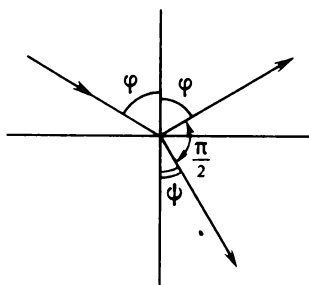
Fig. 239

dell'onda incidente appartiene al piano d'incidenza, per un certo angolo d'incidenza la riflessione della luce sparisce. Questa è la *legge di Brewster* (1781-1868) stabilita sperimentalmente nel 1815. Il corrispondente angolo d'incidenza φ_B è detto *angolo di Brewster* (*incidenza brewsteriana*). Per calcolare questo angolo osserviamo che per $\varphi + \psi = \pi/2$ le direzioni dei raggi trasmesso e riflesso sono reciprocamente perpendicolari (fig. 239). Di conseguenza, $\cos \varphi_B = \sin \psi_B = \frac{1}{n} \sin \varphi_B$, cioè

$$\operatorname{tg} \varphi_B = n. \tag{65.10}$$

Se una luce non polarizzata arriva su una superficie con incidenza brewsteriana, la componente con vettore elettrico $E_\parallel$ non viene riflessa. La luce ri-

flessa risulta linearmente polarizzata secondo una direzione perpendicolare al piano d'incidenza[1].

La riflessione sotto l'angolo di Brewster fornisce il metodo più semplice per ottenere luce polarizzata. Il difetto di questo metodo è la debole intensità della luce riflessa. Per eliminarlo vengono usate parecchie lastre di vetro messe le une sulle altre (pila di Stoletov). Se il numero di lastre è grande, si riesce a riflettere quasi la metà della luce incidente. Se la luce cade sotto l'angolo di Brewster, la luce riflessa risulta completamente polarizzata normalmente al piano d'incidenza. La luce trasmessa è polarizzata nel piano d'incidenza, ma questa polarizzazione non è totale. Attualmente le pile per produrre luce polarizzata non vengono più usate, poiché esistono metodi di polarizzazione più comodi ed efficaci (*prismi polarizzanti, polaroid*).

3. Il rapporto tra l'energia riflessa e quella incidente si dice *coefficiente di riflessione*. Dato che l'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, le formule (65.7) danno per i coefficienti di riflessione delle componenti principali dell'onda incidente le seguenti espressioni:

$$\rho_{\perp} = \left(\frac{\cos\varphi - n\cos\psi}{\cos\varphi + n\cos\psi}\right)^2, \quad \rho_{\parallel} = \left(\frac{n\cos\varphi - \cos\psi}{n\cos\varphi + \cos\psi}\right)^2. \qquad (65.11)$$

Il coefficiente di riflessione R corrispondente ad un'incidenza normale si chiama *potere riflettente*

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2. \qquad (65.12)$$

Per il vetro ($n = 1{,}5$) $R = 0{,}04 = 4\%$; per l'acqua ($n = 1{,}33$) $R = 2\%$. Per riflessione sull'acqua di onde elettromagnetiche lunghe ($n = \sqrt{\varepsilon} = 9$) $R = 64\%$. Queste cifre mostrano che né l'acqua, né il vetro possono essere usati come specchi per incidenza normale. Gli specchi ordinari utilizzano la riflessione della luce da superfici metalliche, ma l'esistenza di una debole riflessione sulla faccia anteriore rende inadatti per gli scopi ottici questi specchi argentati dal lato posteriore. Per queste applicazioni è necessario ricoprire di uno strato metallico (preferibilmente rodio) la faccia anteriore del vetro.

Il rapporto b tra l'energia trasmessa e quella incidente si dice *coefficiente di trasmissione*. Lo si può anche definire come il rapporto tra le componenti normali del vettore di Poynting delle onde trasmessa ed incidente me-

---

[1] Malus, che ha scoperto la polarizzazione della luce per riflessione, ha chiamato il piano d'incidenza piano di polarizzazione della luce riflessa. In questo manuale con *piano di polarizzazione* indicheremo un piano perpendicolare al piano di polarizzazione di Malus.

diato sul tempo. In base alle (65.3) e (65.3a) troviamo per l'onda incidente

$$S_z^{(e)} = \frac{c}{16\pi}\left[E_x^{(e)}H_y^{*(e)} - E_y^{(e)}H_x^{*(e)}\right] + \text{compl. coniug.} =$$

$$= \frac{cn_1}{8\pi}\cos\varphi(|\mathscr{E}_\perp|^2 + |\mathscr{E}_\parallel|^2),$$

e per l'onda trasmessa

$$S_z^{(d)} = \frac{cn_2}{8\pi}\cos\psi(|D_\perp|^2 + |D_\parallel|^2).$$

Supponendo prima che il vettore E sia perpendicolare al piano d'incidenza e poi parallelo a questo piano, troviamo

$$b_\perp = \frac{n\cos\psi}{\cos\varphi}\left(\frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi + n\cos\psi}\right)^2, \quad b_\parallel = \frac{n\cos\psi}{\cos\varphi}\left(\frac{2\cos\varphi}{n\cos\varphi + \cos\psi}\right)^2. \tag{65.13}$$

È facile verificare che $\rho_\perp + b_\perp = \rho_\parallel + b_\parallel = 1$, conformemente alla legge di conservazione dell'energia.

Per incidenza normale il coefficiente di trasmissione

$$B = \frac{4n}{(n+1)^2} \tag{65.14}$$

è detto *trasparenza superficiale*. Le misure del potere riflettente e della trasparenza superficiale costituiscono un procedimento comodo per la determinazione degli indici di rifrazione nell'infrarosso.

Calcoliamo ora il coefficiente di riflessione quando il piano di polarizzazione di un'onda incidente forma un angolo α con il piano d'incidenza. Quest'angolo viene chiamato *azimut di polarizzazione* dell'onda incidente. È evidente che $\mathscr{E}_\parallel = A\cos\alpha$, $\mathscr{E}_\perp = A\sin\alpha$, dove A è l'ampiezza dell'onda incidente. L'energia riflessa totale è proporzionale a $\rho_\parallel\mathscr{E}_\parallel^2 + \rho_\perp\mathscr{E}_\perp^2 = A^2(\rho_\parallel\cos^2\alpha + \rho_\perp\sin^2\alpha)$. Quindi, il coefficiente di riflessione è uguale a

$$\rho_\alpha = \rho_\parallel\cos^2\alpha + \rho_\perp\sin^2\alpha. \tag{65.15}$$

Il coefficiente di riflessione ρ della luce non polarizzata si ottiene di qui calcolando la media su α. Visto che in luce non polarizzata tutte le direzioni del vettore elettirico (e di quello magnetico) hanno uguale probabilità, si ha $\overline{\cos^2\alpha} = \overline{\sin^2\alpha} = 1/2$. Perciò

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_\parallel + \rho_\perp). \tag{65.16}$$

Nella figura 240 sono riportate le curve teoriche per i coefficienti di riflessione della luce visibile su vetro ($n = 1{,}5$) e nella figura 241 per le onde radio riflesse dalla superficie dell'acqua ($n = \sqrt{\varepsilon_0} = 9$).

Un gran numero di misure di coefficienti di riflessione, per diversi angoli d'incidenza e per diverse polarizzazioni dell'onda incidente, eseguite anche come verifica delle formule di Fresnel, concordano molto bene con queste formule sia per luce visibile, che per onde radio. Fa eccezione il caso della riflessione sotto l'angolo di Brewster poiché nelle sue vicinanze si osservano piccole deviazioni dalle formule di Fresnel (si veda il § 70).
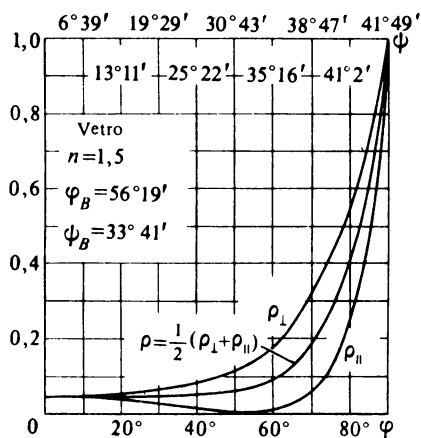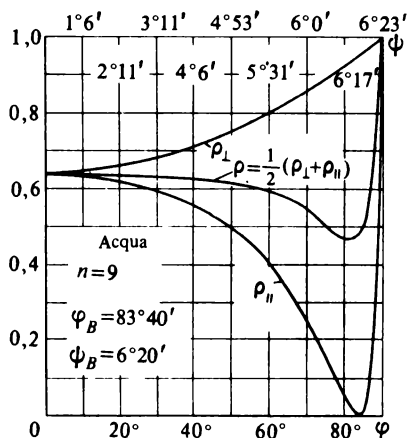
Fig. 240 Fig. 241

4. Abbiamo dedotto le formule di Fresnel supponendo che la luce sia *monocromatica*. Nel caso di riflessione ordinaria, in queste formule non compare la lunghezza d'onda e la riflessione non è accompagnata da variazioni di fase dell'onda. Perciò nel caso di mezzi non dispersivi e per riflessione ordinaria, le formule di Fresnel sono valide anche per *onde non monocromatiche*. Si deve solo intendere con $\mathscr{E}_\perp$, $R_\perp$, $D_\perp$, ecc. le componenti corrispondenti delle intensità di campo elettrico delle onde incidente, riflessa e trasmessa, determinate sulla *frontiera di separazione dei mezzi*. Questo risultato segue direttamente dal teorema di Fourier e dal principio di sovrapposizione.

§ 66. *Riflessione totale*

1. Nel caso di riflessione totale, $\cos\psi$ è una quantità puramente immaginaria e risulta utile scrivere la formula di Fresnel nella seguente forma:

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}, \quad \frac{D_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}, \tag{66.1}$$

$$\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{n^2\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{n^2\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}, \quad \frac{D_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{2n\cos\varphi}{n^2\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}.$$

Da queste formule si vede che $|R_\perp| = |\mathscr{E}_\perp|$ e $|R_\parallel| = |\mathscr{E}_\parallel|$, cioè la riflessione è effettivamente « totale ». Nello stesso tempo esiste un'onda non omogenea nel secondo mezzo. Per esempio, se $\varphi = \varphi_0 = \arcsin n$, si ha $D_\perp = 2\mathscr{E}_\perp$. Questo non viola la legge di conservazione dell'energia, poiché le formule di Fresnel concernono *campi monocromatici*, cioè *processi permanenti*. In questo caso la legge di conservazione impone soltanto che la quantità d'energia contenuta nel secondo mezzo varii *periodicamente* nel tempo. In altre parole, *la variazione d'energia media su un periodo deve essere nulla nel secondo mezzo*. Il seguente calcolo mostra che questa condizione è effettivamente verificata.

Calcoliamo la media sul tempo della componente del vettore di Poynting nel secondo mezzo. Supponiamo che il vettore elettrico sia contenuto nel piano d'incidenza. Si ha allora

$$\overline{S}_z = \frac{c}{16\pi} E_x^* H_y + \text{complessa coniugata.}$$

Il campo nel secondo mezzo è dato dalle formule (65.5). Visto che $\cos\psi$ è una quantità puramente immaginaria, da queste formule risulta che tra i campi elettrico e magnetico esiste uno sfasamento di 90°. Poiché la quantità $E_x^* H_y$ è immaginaria anch'essa, $\overline{S}_z = 0$. Analogo risultato si ottiene quando il vettore elettrico è perpendicolare al piano d'incidenza. Con ciò abbiamo dunque dimostrato la nostra proposizione.

Il calcolo delle altre componenti del vettore di Poynting medio dà

$$\overline{S}_x = \frac{cn_1}{8\pi}(|D_\perp|^2 + |D_\parallel|^2)\sin\varphi\, e^{-z/h}, \quad \overline{S}_y = 0, \tag{66.2}$$

dove h è la profondità di penetrazione definita dalla (64.13). Il secondo mezzo contiene quindi un'energia la cui quantità media non varia nel tempo ed il cui flusso medio è parallelo all'asse X. L'esistenza di quest'energia,

in regime permanente non contrasta evidentemente con l'esistenza di una riflessione totale dell'onda incidente.

Per rispondere alla domanda su come è apparsa l'energia nel secondo mezzo, si dovrebbe esaminare il *processo di instaurazione delle vibrazioni*. Si può, per esempio, considerare un'onda quasi-monocromatica davanti al cui fronte non esiste alcuna perturbazione. Finché il fronte d'onda non raggiunge la frontiera di separazione, nel secondo mezzo non c'è alcun campo. Non appena l'onda raggiunge la frontiera di separazione, essa prima penetra quasi per intero nel secondo mezzo e si riflette solo parzialmente. A misura che si instaurano le vibrazioni, il coefficiente di riflessione aumenta rapidamente e tende al suo valore limite, l'unità. La riflessione totale ha luogo soltanto per un regime permanente: finché il processo non è stabilizzato, la riflessione è *sempre parziale*.

2. Supponiamo che due mezzi identici siano divisi da un sottile strato d'aria sul quale si fa arrivare un'onda con un angolo superiore all'angolo
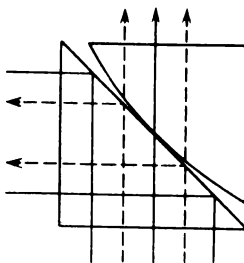
Fig. 242

limite. Ci si aspetta (si veda il § 67) che questa onda penetri nello strato d'aria sotto forma di un'onda evanescente. Se lo spessore dello strato d'aria è sufficientemente piccolo, l'onda non omogenea raggiunge la sua seconda frontiera molto poco attenuata. Dopo essere passata dallo strato d'aria al secondo mezzo, l'onda diventa di nuovo omogenea e può essere rivelata mediante procedimenti usuali. Newton realizzò un tale esperimento per dimostrare la penetrazione della luce in un mezzo otticamente meno denso in condizioni di riflessione totale. (A rigor di termini, qui non c'è riflessione totale: essa è perturbata dal secondo mezzo.) Newton avvicinava alla faccia di un prisma rettangolare un altro prisma leggermente convesso (fig. 242). L'esperimento mostra che la luce penetra nel secondo prisma non soltanto nel punto di contatto ottico, ma anche in un piccolo cerchio attorno a questo punto di contatto, là dove lo spessore dello strato d'aria è dell'ordine della lunghezza d'onda. In luce bianca alla periferia di questa regione circolare si distingue una colorazione rossastra. Questo risultato è normale, poiché la profondità di penetrazione è proporzionale alla lunghezza d'onda: essa è quindi più grande per radiazioni rosse che per quelle blu.

Facendo variare lo spessore dello strato d'aria, si può variare l'intensità della luce trasmessa. Quest'è il principio utilizzato nel *telefono ottico* brevettato dalla ditta Zeiss. Il ruolo di uno dei mezzi è assicurato da una membrana trasparente che vibra in cadenza con le onde sonore che la colpiscono. La luce che ha attraversato lo strato d'aria, modifica la sua intensità conformemente alle variazioni di intensità dei suoni. Cadendo su una fotocellula, la luce eccita una corrente alternata, la cui intensità varia anch'essa conformemente alle variazioni dell'intensità dei suoni. Questa corrente viene amplificata e quindi utilizzata.

I fenomeni di passaggio delle onde attraverso interstizi sottili analoghi a quello descritto, non sono caratteristici solo dell'ottica. Essi si manifestano, quale che sia la natura delle onde, a condizione che la velocità di fase nell'interstizio sia più grande di quella nei mezzi circostanti. Questi fenomeni sono più facilmente realizzabili con onde lunghe (radiotecnica, acustica). Essi acquistano una grande importanza nella fisica atomica e nucleare, ed anche nella teoria dei solidi. Ne riparleremo nel volume V di questo Corso.

3. Nel caso di una riflessione ordinaria entrambi i rapporti $R_\perp / \mathscr{E}_\perp$ e $R_\| / \mathscr{E}_\|$ sono sempre reali. Nel caso di una riflessione totale questi rapporti sono generalmente quantità *complesse*, il che significa che *la fase dell'onda varia bruscamente* di una quantità di regola diversa da zero o π. Supponiamo che l'onda sia polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza. Si può scrivere

$$\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2} = Ae^{i\delta_\perp/2},$$

dove A e $\delta_\perp$ sono grandezze reali. Si ha allora

$$\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2} = Ae^{-i\delta_\perp/2}, \quad \frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = e^{i\delta_\perp},$$

dove $\delta_\perp$ è dunque il salto di fase che accompagna la riflessione totale. Uguagliando le parti reali ed immaginarie, otteniamo

$$A\cos\frac{\delta_\perp}{2} = \cos\varphi, \quad A\sin\frac{\delta_\perp}{2} = \sqrt{\sin^2\varphi - n^2},$$

da cui

$$\mathrm{tg}\,\frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\cos\varphi}. \tag{66.3}$$

Analogamente, per un'onda polarizzata nel piano d'incidenza, si ha

$$\mathrm{tg}\,\frac{\delta_\|}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{n^2\cos\varphi}. \tag{66.4}$$

I salti di fase $\delta_\perp$ e $\delta_\parallel$ non sono uguali. Se l'onda incidente è polarizzata linearmente, nell'onda riflessa tra $E_\parallel$ ed $E_\perp$ appare una data differenza di fase. Perciò *l'onda riflessa sarà in generale polarizzata ellitticamente*. Supponiamo che tra $E_\parallel$ ed $E_\perp$ nell'onda incidente non ci sia alcuna differenza di fase; nell'onda riflessa la differenza di fase tra $E_\parallel$ ed $E_\perp$ è allora uguale a $\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp$. Con l'aiuto delle formule (66.3) e (66.4) troviamo

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\sin^2\varphi}. \tag{66.5}$$

Questo risultato mostra che $\operatorname{tg}(\delta/2) > 0$, cioè δ è compresa tra 0 e π, in altre parole la vibrazione $E_\parallel$ è in anticipo di fase rispetto alla vibrazione $E_\perp$ e la polarizzazione ellittica della luce riflessa è *sinistra*. Al contrario, se la differenza di fase tra le stesse vibrazioni nell'onda incidente è uguale a π, la polarizzazione ellittica dell'onda riflessa è *destra*.

La grandezza δ s'annulla per $\varphi = \varphi_0$ e $\varphi = \pi/2$. Tra questi limiti essa deve assumere il suo valore massimo. Quando $\cos\varphi = \sqrt{(1 - n^2)/(1 + n^2)}$, la differenza di fase massima δ_m è data dall'equazione

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_m}{2} = \frac{1 - n^2}{2n}. \tag{66.6}$$

Per ottenere una polarizzazione circolare della luce riflessa è necessario che siano verificate due condizioni: 1) $\mathscr{E}_\parallel = \pm\mathscr{E}_\perp$, 2) $\delta = \pi/2$ (si veda il § 62, punto 4). Perché $\delta_m = \pi/2$, è necessario che l'indice di rifrazione soddisfi l'equazione $1 = (1 - n^2)/2n$. Di qui $n = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414$. L'indice di rifrazione del mezzo otticamente più denso, rispetto a quello meno denso, è $n' = 1/n = 2{,}41$. Se n' non è inferiore a questo valore, una sola riflessione produce una differenza di fase $\delta = 90°$. In questo caso, per $\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E}_\parallel$, la luce riflessa è polarizzata *circolarmente* a sinistra. Nella regione visibile dello spettro un indice di rifrazione tanto grande è presente solo nel diamante ($n' = 2{,}42$). Per tutti gli altri mezzi $n' < 2{,}41$, e perciò con luce visibile non si può ottenere una differenza di fase $\delta = 90°$ in conseguenza di una sola rifrazione. Ma ciò è realizzabile nel caso di onde radio corte. Per l'acqua, ad esempio, $n' = \sqrt{\varepsilon_0} = 9$, $n = 1/9$; secondo la (66.6), la polarizzazione circolare deve essere osservata per $\varphi = 6°29'$ e $\varphi = 44°38'$; questo è stato confermato dall'esperienza.

Per il vetro ($n' = 1{,}51$) la differenza di fase massima corrisponde a $\varphi = 51°20'$ ed è uguale a $45°36'$. La differenza di fase δ è esattamente uguale a 45° per $\varphi = 48°37'$ e per $\varphi = 54°37'$. Se la luce si riflette due volte sotto uno di questi angoli, si ottiene una differenza di fase relativa uguale a 90°. Fresnel approfittò di questo ragionamento per ottenere una polarizzazione circolare per mezzo di un parallelepipedo di vetro di angolo $A = 54°37'$ (fig. 243). Il raggio *SM* normale alla faccia *AB*, subisce due ri-

flessioni totali sulle facce AD e BC ed esce dal parallelepipedo nella direzione NQ. Durante ogni riflessione la vibrazione $E_\parallel$ è in anticipo di fase rispetto alla vibrazione $E_\perp$ di 45°. Se la luce incidente è linearmente polarizzata e se $\mathscr{E}_\parallel = \mathscr{E}_\perp$, la luce emergente avrà una polarizzazione circolare sinistra. Facendo passare ancora la luce attraverso il parallelepipedo di Fresnel, essa riprenderà una polarizzazione lineare, ma il suo piano di polarizzazione ruoterà di 90° rispetto alla sua posizione iniziale.

4. Si può spiegare il salto di fase delle vibrazioni durante una riflessione totale senza ricorrere alle formule di Fresnel. Supponiamo per concretizzare che il vettore elettrico stia nel piano d'incidenza. Se l'angolo d'incidenza
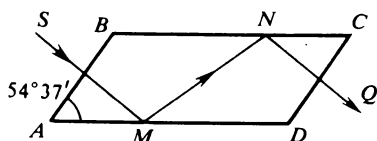
Fig. 243
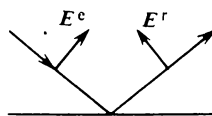
Fig. 244

è rigorosamente uguale all'angolo di riflessione totale φ_0, l'onda nel secondo mezzo sarà ancora omogenea. Quest'onda deve propagarsi parallelamente alla frontiera di separazione. Essendo le onde omogenee trasversali, ne segue che il vettore elettrico nel secondo mezzo, e di conseguenza, in virtù delle condizioni al contorno anche nel primo mezzo, è normale alla frontiera di separazione. Con la scelta del senso positivo del campo elettrico che abbiamo adottato (fig. 244), ciò significa che le fasi delle onde incidente e riflessa coincidono sulla frontiera di separazione.

Al contrario, per $\varphi = 90°$ la riflessione totale è accompagnata da una variazione di fase uguale a 180°. In questo caso le onde incidente e riflessa si propagano nella stessa direzione parallelamente alla frontiera di separazione. Le condizioni al contorno sono verificate per $R_\parallel = -\mathscr{E}_\parallel$. Le onde incidente e riflessa si distruggono l'un l'altra, di modo che non si avrà alcun campo luminoso, nel primo mezzo come nel secondo, e le condizioni al contorno sono verificate in modo banale, anche se l'uguaglianza $R_\parallel = -\mathscr{E}_\parallel$ significa che la riflessione implica un salto di fase di 180°.

È da notare che è illusorio parlare di riflessione della luce quando l'angolo d'incidenza è esattamente uguale a 90°. Le considerazioni riportate non servono ad altro che ad indicare il limite al quale tende l'ampiezza $R_\parallel$ quando l'angolo d'incidenza tende a 90°. Se la riflessione è totale, nel primo mezzo si formano onde stazionarie i cui piani nodali sono paralleli alla frontiera di separazione. Quando l'angolo d'incidenza s'avvicina a 90°, la distanza tra i piani nodali aumenta e tende all'infinito. Al limite il più vicino piano nodale coincide con la frontiera di separazione e simultaneamente sparisce il campo nel secondo mezzo (otticamente meno denso).

Dunque, per $\varphi = \varphi_0$ il salto di fase nella riflessione è nullo, mentre per $\varphi = 90°$ esso è uguale a 180°. Inoltre, in tutto l'intervallo di variazione dell'angolo φ da φ_0 a 90° la riflessione deve essere totale (§ 64). Rappresentiamo la vibrazione del campo elettrico dell'onda riflessa su un diagramma vettoriale. Per $\varphi = \varphi_0$ l'ampiezza è rappresentata dal vettore $A(\varphi_0)$ (fig. 245) e la vibrazione stessa dalla sua proiezione sull'asse X (se facciamo ruotare il vettore $A(\varphi_0)$ uniformemente attorno ad O con velocità angolare ω).
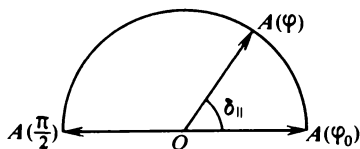
Fig. 245

Per $\varphi = \pi/2$ l'ampiezza è rappresentata dal vettore $A(\pi/2)$ uguale al vettore $A(\varphi_0)$, ma orientato in senso opposto. Per un angolo φ intermedio, indichiamo con $A(\varphi)$ l'ampiezza della vibrazione. Quando φ aumenta da φ_0 fino a $\pi/2$, la lunghezza del vettore $A(\varphi)$ non può variare poiché la riflessione è totale. D'altro canto il vettore $A(\varphi)$, variando in modo continuo, deve passare dalla posizione iniziale $A(\varphi_0)$ alla posizione finale $A(\pi/2)$. Ciò è realizzabile soltanto *mediante una sua rotazione attorno al punto O*. Quindi, se l'angolo d'incidenza è compreso tra φ_0 e 90°, il vettore $A(\varphi)$ deve essere inclinato rispetto all'asse X. L'angolo d'inclinazione $\delta_\parallel$ è appunto il salto di fase nella riflessione.

5. Quanto al passaggio dalla riflessione parziale a quella totale, facciamo la seguente osservazione. Nel dominio della riflessione parziale i coefficienti di riflessione $\rho_\perp$ e $\rho_\parallel$ variano in modo continuo e per $\varphi \to \varphi_0$ tendono all'unità. Per $\varphi = \varphi_0$ essi non subiscono alcuna discontinuità, ma le loro derivate rispetto a φ presentano una discontinuità. Calcoliamo le derivate rispetto a φ dei coefficienti di Fresnel $r_\perp = R_\perp / \mathscr{E}_\perp$ e $r_\parallel = R_\parallel / \mathscr{E}_\parallel$ nelle vicinanze dell'angolo φ_0, supponendo che $\varphi < \varphi_0$. Un calcolo semplice dà

$$\frac{dr_\perp}{d\varphi} = \frac{2}{\cos\psi}, \quad \frac{dr_\parallel}{d\varphi} = \frac{2}{n^2\cos\psi}. \tag{66.7}$$

Per $\varphi = \varphi_0$, $\cos\psi = 0$ ed entrambe le derivate diventano infinite. Diventano infinite anche $d\rho_\perp/d\varphi$ e $d\rho_\parallel/d\varphi$ ($\rho_\perp = r_\perp^2$, $\rho_\parallel = r_\parallel^2$). Perciò in prossimità dell'angolo limite φ_0, i coefficienti di riflessione parziale $\rho_\perp$ e $\rho_\parallel$ debbono variare molto velocemente in funzione dell'angolo d'incidenza. Questa è la causa dell'esistenza di una *frontiera netta* tra i domini di riflessione parziale e di riflessione totale, che si osserva talvolta nei rifrattometri a riflessione totale.

§ 67. *Trasmissione della luce attraverso una lamina piana a facce parallele. Chiarificazione dei vetri ottici*

1. Supponiamo che sulla superficie di un riflettente sia depositata una pellicola di spessore l e di indice di rifrazione n (fig. 246). Indichiamo con n_1 l'indice di rifrazione del primo mezzo e con n_2 quello del secondo mezzo. Tutti gli indici n_1, n_2 e n siano costanti (cioè i mezzi siano omogenei) e l'onda incidente polarizzata nel piano d'incidenza oppure nel piano perpendicolare. L'onda incidente

$$E^{(e)} = \mathscr{E}e^{i(\omega t - k_1 r)} \tag{67.1}$$

(origine delle coordinate in O) subisce riflessioni multiple sulle superfici della pellicola. In conseguenza dell'interferenza, nel primo mezzo si ha
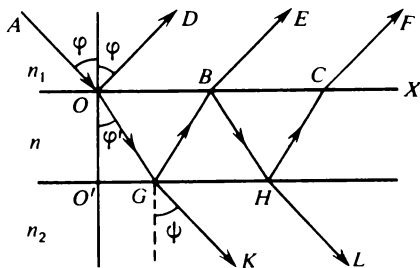
Fig. 246

un'onda riflessa

$$E^{(r)} = Re^{i(\omega t - k_1' r)}. \tag{67.2}$$

Il campo all'interno della pellicola è costituito da due onde piane

$$E = Ae^{i(\omega t - kr)}, \quad E' = A'e^{i(\omega t - k'r)}. \tag{67.3}$$

Nel secondo mezzo si ha un'onda rifratta

$$E^{(d)} = De^{i(\omega t - k_2 r)}. \tag{67.4}$$

Perché le condizioni al contorno siano verificate, le componenti tangenziali di tutti i vettori d'onda debbono essere uguali e ciò caratterizza in modo univoco le direzioni di propagazione di tutte le onde (si veda il § 64). Per determinare le ampiezze incognite R, A, A', D la teoria elettromagnetica dà quattro condizioni indipendenti (due sulla faccia superiore della pellicola e due sulla faccia inferiore).

Preferiamo risolvere questo problema mediante un procedimento più

semplice. Quattro onde s'incontrano in un punto della faccia superiore della pellicola (fig. 247): due onde entranti e due onde emergenti. Si possono stabilire relazioni tra le ampiezze complesse di queste onde *senza tener conto dell'esistenza della faccia inferiore della pellicola*. In modo formale si può allora ragionare *come se non esistessero riflessioni multiple*. Tutte le onde entranti possono essere considerate come onde incidenti le cui riflessioni e rifrazioni (uniche) producono onde emergenti. Un'onda incidente d'ampiezza $\mathscr{E}$, riflettendosi dalla faccia superiore della pellicola, produce un'onda che si propaga nella direzione del vettore $\boldsymbol{k}'_1$. Un'onda d'ampiezza A', rifratta sulla stessa faccia, produce un'onda che si propaga nella stessa direzione. L'onda riflessa d'ampiezza R risulta dall'interferenza di
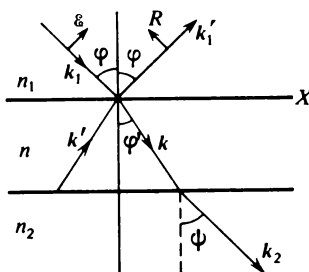
Fig. 247

queste onde. Di conseguenza,

$$R = r_1 \mathscr{E} + d_1' A'. \tag{67.5}$$

Analogamente,

$$A = d_1 \mathscr{E} + r_1' A', \tag{67.6}$$

dove r_1 e d_1 sono i coefficienti di Fresnel relativi alla faccia superiore della pellicola, e r_2 e d_2 gli stessi coefficienti sulla faccia inferiore (si suppone che la luce attraversi queste facce dall'alto in basso). I coefficienti di Fresnel corrispondenti ai raggi propagantisi in senso inverso sono indicati con le stesse lettere, ma con apici. Per mezzo delle formule di Fresnel è facile verificare che questi coefficienti soddisfano le relazioni

$$r' = -r, \quad r^2 + dd' = 1. \tag{67.7}$$

Le stesse considerazioni sono valide anche per la frontiera inferiore, occorre solo trasportare l'origine delle coordinate nel punto O' che si trova sulla superficie inferiore (fig. 246). L'onda (67.1) si scrive allora nella forma

$$E^{(e)} = \mathscr{E} e^{-ik_{1z}l} e^{i(\omega t - k_1 r')},$$

il che mostra che la quantità $\mathscr{E}' = \mathscr{E}e^{-ik_{1z}l}$ assume qui il ruolo d'ampiezza complessa. In modo analogo si trasformano anche le ampiezze delle altre onde. Si ottiene in definitiva

$$A'e^{-ik_z'l} = r_2Ae^{-ik_zl}, \quad De^{-ik_{2z}l} = d_2Ae^{-ik_zl}. \tag{67.8}$$

Dalle equazioni ottenute troviamo

$$\frac{R}{\mathscr{E}} = \frac{r_1 + r_2\exp(-2ik_0nl\cos\varphi)}{1 + r_1r_2\exp(-2ik_0nl\cos\varphi')},$$
$$\frac{D}{\mathscr{E}} = \frac{d_1d_2\exp[ik_0l(n_2\cos\psi - n\cos\varphi)]}{1 + r_1r_2\exp(-2ik_0nl\cos\varphi')}, \tag{67.9}$$

dove k_0 è il numero d'onda nel vuoto e φ' e ψ sono gli angoli di rifrazione sulla prima e sulla seconda frontiera. Per rendere la nostra dimostrazione più evidente ci siamo riferiti ad un disegno concernente onde omogenee, ma è chiaro che le relazioni (67.9) sono valide anche nel caso in cui le onde nella pellicola o nel secondo mezzo non siano omogenee.

2. Per incidenza normale la prima formula della (67.9) si trasforma in

$$\frac{R}{\mathscr{E}} = \frac{r_1 + r_2e^{-2ik_0nl}}{1 + r_1r_2e^{-2ik_0nl}}. \tag{67.10}$$

Quest'espressione s'annulla se sono verificate le seguenti due condizioni:

$$r_1 + r_2\cos(2nk_0l) = 0, \quad \sin(2nk_0l) = 0.$$

Dalla seconda espressione si ottiene: $2nk_0l = N\pi$, da cui

$$l = N\frac{\lambda_0}{4n} = N\frac{\lambda}{4}, \tag{67.11}$$

dove N è un numero intero e λ la lunghezza d'onda nella pellicola. La prima condizione si può ora scrivere nella forma $r_1 + (-1)^Nr_2 = 0$. Se N è dispari, si ha $r_1 = r_2$; se invece N è pari, si ha $r_1 = -r_2$. Ma l'ultima uguaglianza non può essere verificata. Infatti,

$$r_1 = \frac{n - n_1}{n + n_1}, \quad r_2 = \frac{n_2 - n}{n_2 + n}.$$

Se si avesse $r_1 = -r_2$, otterremmo $n(n_2 - n_1) = 0$, da cui si ha $n = 0$, il che è impossibile, o $n_2 = n_1$, che non presenta alcun interesse. Ne segue che il numero N deve essere dispari e quindi $r_1 = r_2$. Di qui

$$n = \sqrt{n_1n_2}. \tag{67.12}$$

Quindi, se $n = \sqrt{n_1 n_2}$ e lo spessore della pellicola è uguale a $N\lambda/4$, dove N è un numero dispari, il potere di riflessione s'annulla.

Su questo risultato è basato uno dei metodi per aumentare la trasparenza superficiale dei vetri utilizzati nell'industria ottica (la cosiddetta *chiarificazione dei vetri ottici*). Per il vetro ($n = 1,5$) il potere di riflessione è uguale a $R = (n - 1)^2/(n + 1)^2 = 0,04 = 4\%$, cioè è molto piccolo. Ma gli strumenti ottici sono composti di un gran numero di parti in vetro. La riflessione sulle superfici di contatto di queste parti è la principale causa d'indebolimento della luce che attraversa lo strumento. Così, per esempio, le perdite di luce nei binocoli prismatici raggiungono il 50%, e sono quasi completamente dovute alla riflessione della luce. Una parte importante della luce riflessa, grazie a riflessioni successive, penetra nell'occhio dell'osservatore ed, essendo nel migliore dei casi diffusa uniformemente, produce uno sfondo illuminato che diminuisce il contrasto luce-ombra nelle immagini osservate. Questa luce diffusa è particolarmente nociva negli apparecchi fotografici, poiché provoca un velo uniforme sull'emulsione fotosensibile. Per certe posizioni sfavorevoli delle sorgenti di luce si ottengono riflessi ed immagini supplementari.

Per aumentare la trasparenza superficiale dei vetri, sulle loro superfici sono depositate pellicole d'indice $n = \sqrt{n_1 n_2}$ e di spessore uguale a $\lambda/4$. È inutile utilizzare pellicole più spesse (corrispondenti a $N = 3, 5$, ecc.) poiché la condizione di sparizione totale della riflessione può essere esattamente soddisfatta soltanto per una determinata lunghezza d'onda e per un solo angolo d'incidenza. Per $N = 1$ l'aumento del coefficiente di riflessione che accompagna le variazioni della lunghezza d'onda e dell'angolo d'incidenza avviene più lentamente. Perciò in questo caso si può ottenere una sparizione quasi completa della riflessione in una regione relativamente estesa di spettro e per un grande intervallo di angoli d'incidenza.

Le pellicole antiriflettenti sono prodotte sia mediante un procedimento chimico di lisciviazione dei componenti la superficie del vetro, sia deponendo per polverizzazione sulla superficie del vetro uno strato di sostanze estranee. La principale difficoltà è dovuta al fatto che l'indice di rifrazione della pellicola depositata deve essere molto più piccolo di quello del vetro. Per esempio, se $n_2 = 1,52$, $n_1 = 1$, dev'essere $n = 1,23$. Non sono note sostanze solide aventi un indice di rifrazione tanto piccolo, e perciò si deve rendere la pellicola porosa, ed inoltre, per evitare una dispersione notevole della luce, le dimensioni dei pori debbono essere piccole rispetto alla lunghezza d'onda. Ma una pellicola porosa non possiede una resistenza meccanica sufficiente. Questa difficoltà può essere superata utlizzando rivestimenti a due strati sovrapposti. Prima il vetro è ricoperto con una pellicola avente indice di rifrazione più grande di quello del vetro, poi da uno strato d'indice di rifrazione più piccolo.

3. Le condizioni per l'eliminazione della riflessione (67.11) e (67.12)

possono anche essere dedotte basandosi sulle interferenze. Se il coefficiente di riflessione è piccolo, si possono trascurare le onde che hanno subìto riflessioni multiple sulle facce della pellicola. Rimangono allora due onde ri flesse, una riflessa dalla faccia anteriore e l'altra da quella posteriore. Perché queste onde si smorzino reciprocamente, debbono essere verificate due condizioni: 1) le loro fasi debbono essere opposte; 2) le loro intensità debbono essere uguali. Nel caso di incidenza normale la prima condizione conduce alla relazione (67.11). La seconda condizione, se trascuriamo l'indebolimento dell'onda dovuto alla riflessione sulla faccia anteriore, si riduce a $r_1 = r_2$. Come è stato mostrato sopra, ne segue la formula (67.12). Il difetto della dimostrazione riportata è che essa trascura le riflessioni multiple.

Problemi

1. Stabilire formule per la riflessione e la rifrazione delle onde elettromagnetiche supponendo che la permeabilità magnetica sia differente dall'unità.

Risposta.

$$\begin{aligned}
\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\psi}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\psi}, \\
\frac{R_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\varphi - \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\psi}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\psi}, \\
\frac{D_\perp}{\mathcal{E}_\perp} &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\psi}, \\
\frac{D_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\psi}.
\end{aligned} \tag{67.13}$$

2. Quale forma acquistano le formule (67.13) quando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$?

Risposta.

$$\begin{aligned}
\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp} &= \frac{n_2\cos\varphi - n_1\cos\psi}{n_2\cos\varphi + n_1\cos\psi}, \qquad \frac{D_\perp}{\mathcal{E}_\perp} = \frac{2n_2\cos\varphi}{n_2\cos\varphi + n_1\cos\psi}, \\
\frac{R_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} &= \frac{n_1\cos\varphi - n_2\cos\psi}{n_1\cos\varphi + n_2\cos\psi}, \qquad \frac{D_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel} = \frac{2n_2\cos\varphi}{n_1\cos\varphi + n_2\cos\psi}.
\end{aligned} \tag{67.14}$$

Le formule della riflessione coincidono esattamente con le formule di Fresnel, a condizione di permutare le componenti $\perp$ e $\parallel$. Questo fatto è stato notato da Helmholtz.

3. Dimostrare che il potere di riflessione di un mezzo per le onde radio s'annulla se $\varepsilon = \mu$.

4. Dire se la legge di Brewster resterà valida per onde radio, quando le permeabilità magnetiche μ_1 e μ_2 sono differenti dall'unità.

Risposta. Se la legge di Brewster è valida, l'angolo di Brewster, sotto il quale la componente $E_\parallel$ del campo elettrico non sarà riflessa, è dato dall'espressione

$$\operatorname{tg}\varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2\mu_1 - \varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1}}. \qquad (67.15)$$

È possibile il caso in cui non sia riflessa la componente $E_\perp$. L'angolo per il quale ciò ha luogo è definito dall'equazione

$$\operatorname{tg}\varphi_B' = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\varepsilon_2\mu_1 - \varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2}}. \qquad (67.16)$$

Questi due casi si escludono l'un l'altro poiché le quantità sotto il radicale delle (67.15) e (67.16) hano segni contrari. (Si suppone che ε e μ siano sostanzialmente positive.) Quindi, esiste sempre un angolo sotto il quale una componente, $E_\parallel$ o $E_\perp$, non viene riflessa.

5. Assicurarsi che i coefficienti di Fresnel soddisfino le relazioni (67.7).

6. Servendosi delle formule di Fresnel, dimostrare che una luce linearmente polarizzata conserva questa polarizzazione dopo la riflessione sulla superficie di separazione di due mezzi isotropi trasparenti in tutti i casi, eccezion fatta per riflessione totale.

7. L'angolo tra il piano di vibrazione di una luce polarizzata ed il piano d'incidenza è detto *azimut delle vibrazioni*. Trovare l'azimut γ dell'onda rifratta e l'azimut β dell'onda riflessa se l'azimut dell'onda incidente è α ed il suo angolo d'incidenza è φ.

Risposta. $\operatorname{tg}\gamma = \cos(\varphi - \psi)\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\beta = -\dfrac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi + \psi)}\operatorname{tg}\alpha.$

8. 1) Calcolare l'angolo di Brewster per una luce riflessa da un vetro ad indice di rifrazione $n = 1{,}5$. 2) Calcolare per questo angolo il *grado di polarizzazione* della luce rifratta, cioè la quantità $\Delta = \dfrac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel}$, dove $I_\parallel$ ed $I_\perp$ sono le intensità delle onde riflesse polarizzate rispettivamente nel piano d'incidenza e nel piano perpendicolare ad esso. La luce incidente è una luce naturale.

Risposta. $\varphi_B = 56°19'$, $\Delta = \dfrac{4n^2 - (n^2+1)^2}{4n^2 + (n^2+1)^2} = -0{,}08.$

9. Una luce naturale cade con incidenza brewsteriana dall'aria sulla superficie di un vetro ad indice di rifrazione $n = 1{,}5$. Calcolare l'intensità I_r della luce riflessa conoscendo l'intensità della luce incidente, uguale ad I_e.

Risposta. $\dfrac{I_r}{I_e} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^2 = 0{,}74.$

10. Una luce naturale cade con angolo di Brewster dall'aria sulla superficie di un dielettrico ad indice di rifrazione uguale a n. Calcolare l'ampiezza $D_\parallel$ dell'onda rifratta, se l'ampiezza dell'onda incidente di uguale polarizzazione è pari a $\mathscr{E}_\parallel$.

Risposta. $D_\parallel = \mathscr{E}_\parallel / n$.

11. Sulla faccia laterale di un prisma in vetro ad indice di rifrazione $n = 1{,}5$ cade, con angolo di Brewster φ_B, un fascio luminoso il cui vettore elettrico sta nel piano d'incidenza. Quale dev'essere l'angolo rifrangente A del prisma affinché la luce possa attraversare il prisma senza perdite alla riflessione?

Risposta. $A = \pi - 2\varphi_B = 68°.$

12. In quali condizioni un raggio di luce, che arriva sulla faccia laterale di un prisma isotropo trasparente ad angolo di rifrazione $A = 60°$, attraversa questo prisma senza perdite alla riflessione?

Risposta. Il vettore elettrico deve essere contenuto nel piano d'incidenza. L'indice di rifrazione del prisma deve essere uguale a

$$n = 1/\mathrm{tg}(A/2) = \sqrt{3} = 1{,}73.$$

13. La luce cade da un mezzo 1 ad un mezzo 2 sotto un angolo φ ed è rifratta sotto un angolo ψ. Dimostrare che il coefficiente di riflessione non cambierà se la luce cade sotto l'angolo ψ dal mezzo 2 al mezzo 1.

14. Utilizzando le formule di Fresnel, dimostrare che quando un'onda elettromagnetica piana è riflessa da uno specchio perfetto la cui superficie superiore è ricoperta da uno strato di dielettrico trasparente, l'ampiezza dell'onda riflessa è uguale a quella dell'onda incidente. Cambia solo la fase dell'onda, conformemente alla legge di conservazione dell'energia.

Soluzione. Durante la riflessione da uno specchio perfetto può cambiare soltanto la fase dell'onda e non la sua ampiezza. Perciò il coefficiente di Fresnel r_2, che figura nella formula (67.10), deve avere la forma $r_2 = e^{i\alpha}$. Introducendo ancora la notazione $\delta = 2k_0 nl$, otteniamo dalla stessa formula

$$\frac{R}{\mathcal{E}} = \frac{r_1 + e^{i(\alpha-\delta)}}{1 + r_1 e^{i(\alpha-\delta)}}.$$

Di qui $|R| = |\mathcal{E}|$.

15. Una luce, riflettendosi parzialmente, attraversa due piani semitrasparenti paralleli. I coefficienti di riflessione e di trasmissione del primo sono rispettivamente uguali a ρ_1 e b_1, e del secondo ρ_2 e b_2. Il grado di monocromaticità della luce incidente è piccolo, di modo che non vi è interferenza, ma solo la somma delle intensità luminose. Calcolare i coefficienti di riflessione ρ e di trasmissione b per il sistema di due piani.

Soluzione.

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 b_1^2 + \rho_2 b_1^2 \rho_1 \rho_2 + \dots = \rho_1 + \frac{\rho^2 b_1^2}{1 - \rho_1\rho_2},$$

$$b = b_1 b_2 + b_1 b_2 \rho_1 \rho_2 + b_1 b_2 (\rho_1\rho_2)^2 + \dots = \frac{b_1 b_2}{1 - \rho_1\rho_2}.$$

Utilizzando le relazioni $\rho_1 + b_1 = 1$, $\rho_2 + b_2 = 1$, i risultati ottenuti si possono scrivere nella seguente forma:

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_1\rho_2}{1 - \rho_1\rho_2}, \quad b = \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1 - \rho_1\rho_2}. \tag{67.17}$$

Per $\rho_1 = \rho_2$ otteniamo dall'espressione precedente

$$\rho = \frac{2\rho_1}{1 + \rho_1}, \quad b = \frac{1 - \rho_1}{1 + \rho_1}. \tag{67.18}$$

16. La luce, riflettendosi parzialmente, attraversa un sistema di m piani semitrasparenti paralleli. I coefficienti di riflessione e di trasmissione di ogni piano sono rispettivamente uguali a ρ e b. Calcolare il coefficiente di riflessione ρ_m ed il coefficiente di trasmissione b_m di tutto il sistema di m piani. (Per le caratteristiche della luce incidente, si veda il problema 15).

Soluzione. Aggiungiamo al sistema di m piani un piano $(m + 1)$-esimo identico. I primi m piani possono essere sostituiti con un solo piano ad indice di riflessione ρ_m. Il problema sarà allora ricondotto al precedente ed otteniamo che i coefficienti di riflessione e di trasmissio-

ne per il piano $(m + 1)$ sono:

$$\rho_{m+1} = \frac{\rho_m + \rho - 2\rho_m \rho}{1 - \rho_m \rho}, \qquad b_{m+1} = \frac{(1 - \rho_m)(1 - \rho)}{1 - \rho_m \rho}.$$

Di qui è facile ottenere

$$\rho_m = \frac{m\rho}{1 + (m - 1)\rho}, \qquad b_m = \frac{1 - \rho'}{1 + (m - 1)\rho}. \tag{67.19}$$

17. La pila di Stoletov (1839-1896) è composta di lastre di vetro piane a facce parallele ad indice di rifrazione $n = 1{,}5$. Su queste lastre sotto l'angolo di Brewster cade una luce polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza. Trovare le espressioni e tracciare il corrispondente grafico per i coefficienti di riflessione e di trasmissione in funzione del numero N di lastre.

Risposta. $\rho_N = \dfrac{2N}{2N + 5{,}76}$, $b_N = \dfrac{5{,}76}{2N + 5{,}76}$ (si veda la fig. 248).
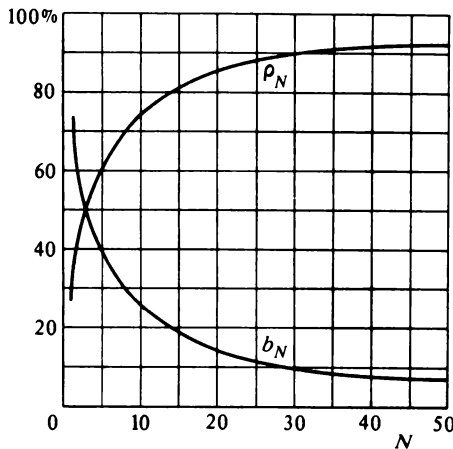
Fig. 248

18. Una luce naturale cade sotto un angolo φ su una pila di Stoletov costituita da N lastre di vetro ad indice di rifrazione n. Calcolare i gradi di polarizzazione Δ e Δ' delle luci trasmessa e riflessa, nonché il rapporto delle intensità $I_\perp / I_\parallel$ delle componenti principali della luce trasmessa.

Risposta.

$$\Delta = \frac{N(\rho_\perp - \rho_\parallel)}{(2N - 1)\rho_\perp \rho_\parallel - (N - 1)(\rho_\perp + \rho_\parallel) - 1},$$

$$\Delta' = \frac{\rho_\perp - \rho_\parallel}{2(N - 1)\rho_\perp \rho_\parallel + (\rho_\perp + \rho_\parallel)}, \qquad \frac{I_\perp}{I_\parallel} = \frac{1 - \rho_\perp}{1 - \rho_\parallel} \cdot \frac{(2N - 1)\rho_\parallel + 1}{(2N - 1)\rho_\perp + 1},$$

dove $\rho_\parallel$ e $\rho_\perp$ sono i coefficienti di riflessione delle onde polarizzate nel piano d'incidenza e nel piano perpendicolare per una sola superficie riflettente

$$\rho_\perp = \left(\frac{\cos\varphi - n\cos\psi}{\cos\varphi + n\cos\psi}\right)^2, \quad \rho_\parallel = \left(\frac{n\cos\varphi - \cos\psi}{n\cos\varphi + \cos\psi}\right)^2.$$

19. La luce incidente è linearmente polarizzata con un azimut delle vibrazioni uguale a $+45°$ [1]. È possibile trasformarla, mediante un'unica riflessione, in luce di polarizzazione circolare destra?

Risposta. No, non si può.

20. Quale dev'essere l'indice di rifrazione minimo di un parallelepipedo di Fresnel, affinché la luce emergente presenti una polarizzazione circolare destra per una luce incidente il cui azimut delle vibrazioni è uguale a $+45°$?

Risposta. $n = \dfrac{1 + \sin(3\pi/8)}{\cos(3\pi/8)} = 5{,}028$. Nella gamma ottica questo caso è irrealizzabile, ma si potrebbe realizzarlo con onde elettromagnetiche più lunghe.

21. Un'onda elettromagnetica linearmente polarizzata con un azimut delle vibrazioni uguale a $+135°$, si riflette sulla superficie di separazione acqua-aria. La costante dielettrica dell'acqua è uguale a $\varepsilon = 81$. Sotto quale angolo deve cadere questa onda perché l'onda riflessa presenti una polarizzazione circolare? Quale sarà la polarizzazione, destra o sinistra?

Risposta. $6°29'$ o $44°38'$. La polarizzazione sarà destra.

22. Un raggio linearmente polarizzato con un azimut delle vibrazioni uguale a $+135°$ cade perpendicolarmente sulla faccia AB di un prisma di vetro $ABCD$ (fig. 249) e dopo aver subìto tre riflessioni totali emerge da questo prisma. Quale dev'essere l'angolo rifrangente A del
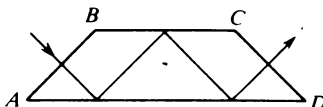
Fig. 249

prisma affinché la luce emergente sia polarizzata circolarmente, se l'indice di rifrazione del prisma è uguale a 1,52? Quale sarà la polarizzazione della luce emergente, destra o sinistra?

Risposta. $69°21'$ o $42°46'$. La polarizzazione sarà destra.

23. Quale dev'essere l'indice di rifrazione minimo del prisma descritto nel problema precedente perché la luce emergente presenti una polarizzazione circolare destra, essendo l'azimut delle vibrazioni della luce incidente uguale a $+45°$? Che valore deve allora avere l'angolo A?

Risposta. $n = 1/(\sqrt{2} - 1) = 2{,}4143$; $A = 35°34'$.

24. Dimostrare per mezzo di un diagramma vettoriale che il cambiamento di fase dovuto ad una riflessione totale è due volte più grande di quello che subisce l'onda rifratta (onda superficiale).

---

[1] L'azimut delle vibrazioni dell'onda incidente può variare da $-\pi/2$ a $+\pi/2$. Esso è considerato positivo se $\mathscr{E}_\parallel/\mathscr{E}_\perp > 0$, e negativo se $\mathscr{E}_\parallel/\mathscr{E}_\perp < 0$.

§ 68. *Propagazione della luce in un mezzo esaminata dal punto di vista dell'ottica molecolare*

1. Dal punto di vista delle concezioni atomistiche ogni mezzo deve essere considerato come un vuoto in cui sono distribuiti atomi della sostanza. (Anche le molecole si possono considerare come atomi.) L'onda incidente, così come le radiazioni emesse da atomi vicini, eccitano all'interno di ogni atomo le vibrazioni degli elettroni e dei nuclei atomici. In conseguenza di ciò gli atomi diventano sorgenti di onde sferiche secondarie che si propagano tra queste particelle *con la velocità c della luce nel vuoto*. Queste onde sono coerenti poiché esse sono eccitate dalla stessa onda incidente. La loro interferenza reciproca e con l'onda incidente determina il campo d'onda in tutto lo spazio. In particolare, l'onda riflessa è il risultato dell'interferenza delle onde secondarie che emergono dal mezzo nel vuoto circostante.

Ma perché in un mezzo la luce si propaga con una velocità differente da quella nel vuoto? Si deve ancora precisare questa domanda, dicendo di quale velocità si tratta. Nella teoria della riflessione e della rifrazione l'interesse principale è puntato sulla *velocità di fase*, poiché questa velocità determina l'indice di rifrazione del mezzo e quindi le leggi di riflessione e rifrazione sulle superfici di separazione dei mezzi. La differenza tra la velocità di fase della luce in un mezzo da quella nel vuoto s'interpreta con il fatto che in ogni punto dello spazio arrivano onde secondarie non soltanto dagli atomi situati lungo il raggio passante per il punto dato, ma anche dagli atomi che si trovano fuori da questa linea.

Esaminiamo in dettaglio questa questione considerando gli atomi puntiformi. Nel campo dell'onda luminosa gli atomi acquistano momenti dipolari che variano nel tempo ed irradiano come dipoli puntiformi di Hertz. Per i nostri scopi è sufficiente conoscere il campo di radiazione di uno di questi dipoli *nella zona d'onda*. Questo campo è determinato soltanto dalla componente $\mathbf{p}_\perp$ del momento di dipolo perpendicolare alla direzione di radiazione. La componente parallela $\mathbf{p}_\parallel$ nella zona d'onda non esercita alcun'influenza sulla radiazione di dipolo di Hertz.

2. Supponiamo che nel vuoto lungo l'asse X si propaghi un'onda monocromatica piana $E_0 e^{i(\omega t - k_0 x)}$ sul tragitto della quale viene interposto, perpendicolarmente all'asse X, uno strato piano-parallelo infinitamente sottile, di spessore $d\xi$, costituito da atomi puntiformi immobili distribuiti uniformemente nel volume di questo strato (fig. 250). Utilizzando il metodo di Rayleigh, cerchiamo di determinare l'influenza esercitata da questo strato sulla fase delle vibrazioni in un punto lontano $A(x)$ che si trova davanti allo strato. I momenti dipolari degli atomi, eccitati dall'onda incidente, si possono scrivere nella forma $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i(\omega t - k_0 \xi)}$ dove ξ è l'ascissa dello strato. Supponiamo che il punto A si trovi nella zona d'onda del più vicino dipolo e quindi nella zona d'onda di tutti gli altri dipoli dello strato. Il campo elet-

trico creato da ogni dipolo nel punto A è allora uguale a

$$\frac{k_0^2}{r} p_{0\perp}\, e^{i(\omega t - k_0 \xi - k_0 r)}, \tag{68.1}$$

dove r è la distanza dal dipolo al punto A (si veda il vol. III, § 141). Si deve fare la somma delle espressioni (68.1) relative a tutti i dipoli dello strato; utilizziamo quindi il metodo delle zone anulari di Fresnel. Secondo la teoria delle zone di Fresnel, l'intensità risultante dE_1 di tutti i dipoli dello strato nel punto A è uguale alla metà dell'intensità di campo eccitata in questo punto dalla sola zona centrale. Per trovare dE_1 si esegue la somma delle
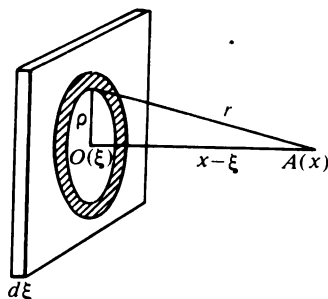
Fig. 250

espressioni (68.1) relative a tutti i dipoli della zona centrale e si divide per due il risultato ottenuto. Le onde secondarie inviate dalla periferia della zona centrale presentano un ritardo di fase uguale a π rispetto all'onda emergente dal centro O della zona e quindi rispetto all'onda incidente. Il ritardo di fase delle onde secondarie inviate da altri punti della stessa zona è intermedio. La velocità di propagazione della fase dell'onda diminuisce in conseguenza del suo passaggio attraverso lo strato di sostanza.

Per fare il calcolo sostituiamo la sommatoria con un integrale. Consideriamo una zona anulare di raggio interno ρ ed esterno $\rho + d\rho$ tratteggiata nella figura 250. Il volume elementare $dV = 2\pi\rho\, d\rho\, d\xi$ contiene $N\,dV$ dipoli (N è il numero di dipoli nell'unità di volume). Per poter approssimare le somme con integrali e perché il metodo delle zone di Fresnel sia applicabile, supponiamo che il numero $N\,dV$ sia ancora sufficientemente grande. È necessario moltiplicare per questo numero l'espressione (68.1), integrare su tutta l'estensione della zona centrale e dividere per due il risultato ottenuto. Per ξ costante, dalla relazione $\rho^2 = r^2 - (x - \xi)^2$ otteniamo $\rho\, d\rho = r\, dr$ e prendiamo come variabile d'integrazione la distanza r. Nei limiti della zona centrale la quantità $p_{0\perp}$ si può considerare costante ed uguale a

p_0. L'integrazione si riduce allora a

$$\int_{x-\xi}^{x-\xi+\lambda/2} e^{-ik_0 r} dr = -\frac{2}{k_0} i,$$

e, dopo introduzione di un coefficiente conveniente davanti all'integrale si ottiene

$$dE_1 = -i 2\pi k_0 N p_0 d\xi e^{i(\omega t - k_0 x)}.$$

Integrando su tutte le altre zone, ci convinciamo che, data la diminuzione di $p_{0\perp}$, l'azione di queste zone diminuisce lentamente con il crescere del numero n della zona e, per $n \to \infty$, le loro azioni tendono a zero. Ciò può servire come giustificazione dell'applicazione del metodo delle zone di Fresnel al caso considerato.

Sommando dE_1 all'onda incidente, troviamo il campo totale nel punto A

$$E = (E_0 - i 2\pi k_0 N p_0 d\xi) e^{i(\omega t - k_0 x)} = E_0 e^{i(\omega t - k_0 x - d\Phi)},$$

dove è stata introdotta la notazione

$$d\Phi = \frac{2\pi k_0 N p_0}{E_0} d\xi.$$

La presenza di uno strato implica pertanto un ritardo supplementare di fase uguale a $d\Phi$. Se lo spessore l dello strato è finito, il ritardo di fase sarà uguale a

$$\Phi = \frac{2\pi k_0 N p_0}{E_0} l. \tag{68.2}$$

Questa formula fornisce una *spiegazione « di principio »* della diminuzione della velocità di fase della luce durante la sua propagazione in una sostanza.

Per concludere i calcoli, si dovrebbe trovare la relazione esistente tra le ampiezze di p_0 e di E_0. Nel caso generale quest'è un problema molto complicato, poiché il momento dipolare di un atomo p dipende non dal campo macroscopico medio E, ma *dal campo microscopico agente sugli atomi del mezzo*. Solo per gas non troppo densi (quando $n - 1 \ll 1$) i campi praticamente coincidono. In questo caso $p_0 = \beta E_0$ dove β è la polarizzabilità dell'atomo, legata alla costante dielettrica ε ed all'indice di rifrazione n dalla relazione

$$\varepsilon = n^2 = 1 + 4\pi N\beta = 1 + 4\pi N p_0 / E_0.$$

Utilizzando questa relazione, troviamo dalla (68.2)

$$\Phi = \frac{n^2 - 1}{2} k_0 l \approx (n - 1) k_0 l,$$

il che coincide con il risultato dello studio fenomenologico.

3. Nella teoria fenomenologica l'indice di rifrazione è introdotto per mezzo delle *equazioni macroscopiche di Maxwell*. Queste ultime suppongono che, in ogni volume elementare, le cui dimensioni lineari sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda, sono ancora contenuti *molti atomi*. Le considerazioni molecolari riportate sopra mostrano che *questa condizione non è necessaria*. L'indice di rifrazione può essere definito *mediante lo spostamento di fase* prodotto da una sostanza posta sul tragitto dell'onda luminosa. Questo spostamento è stato calcolato sopra supponendo che il numero di atomi sia grande in ogni elemento di volume $dV = 2\pi\rho\, d\rho\, d\xi$, e questa condizione può essere soddisfatta per un mezzo molto rarefatto, solo se il punto d'osservazione A è ad una grande distansa dallo strato $d\xi$. Per esempio, si può parlare di *indice di rifrazione dei raggi* X, benché le equazioni macroscopiche di Maxwell non li riguardino. Non è assurdo parlare dell'*indice di rifrazione dello spazio interstellare o interplanetario*, benché la densità di sostanza in esso sia trascurabile (circa un atomo per centimetro cubo).

4. Se il punto A fosse messo davanti allo strato, il nostro calcolo ci condurrebbe all'esistenza di un'onda che si propaga in senso inverso, cioè ad un'*onda riflessa*. Se le distanze interatomiche sono inferiori alla lunghezza d'onda e se gli atomi sono uniformemente ripartiti nello spazio, non compare nessun'altra onda oltre a quelle trasmessa e riflessa.

La situazione è diversa quando le distanze interatomiche sono *più grandi della lunghezza d'onda*. Se gli atomi nel mezzo sono uniformemente ripartiti, per esempio si trovano nei nodi di un reticolo cristallino, le onde secondarie emesse dagli atomi sono coerenti e si devono sommare le intensità dei campi d'onda. Le condizioni di amplificazione interferenziale delle onde secondarie possono essere verificate non soltanto nelle direzioni della luce incidente e della luce riflessa, ma anche per alcune altre direzioni. Apparirà una serie discreta di onde piane che si propagano nelle differenti direzioni (*dispersione interferenziale*). Questo caso si realizza quando raggi X di corta lunghezza d'onda vengono diffratti da un reticolo cristallino. Se invece gli atomi del mezzo sono distribuiti nello spazio in modo caotico, le onde secondarie diffuse lateralmente si comportano come onde non coerenti: sono allora addizionate le loro intensità.

5. Finora non abbiamo tenuto conto dell'*agitazione termica degli atomi*. Occorre spiegare ora come un'onda regolare può propagarsi in un mezzo in presenza di agitazione termica e come si può realizzare una riflessione regolare su una superficie speculare di un corpo.

Consideriamo prima i gas. Tra due urti successivi, gli atomi di gas si muovono in modo rettilineo ed uniforme. Per effetto Doppler, gli atomi che si muovono con velocità differenti emettono luce di frequenza differente. Si potrebbe pensare che in queste condizioni non possa apparire interferenza alcuna, ma in realtà non avviene un cambiamento di frequenza, quando si tratta delle onde secondarie che si muovono *nel senso di propagazione della luce*. Infatti, supponiamo che in un gas si propaghi un'onda monocromatica piana di frequenza ω. Si tratta della frequenza nel sistema di riferimento S nel quale il gas è a riposo. Consideriamo un atomo in moto e passiamo ad un sistema di riferimento S' nel quale l'atomo è a riposo. Nel sistema S' la frequenza dell'onda piana è diversa e prende il valore ω'. Con la stessa frequenza nel sistema S' vengono eccitate le vibrazioni dell'atomo ed emesse onde sferiche secondarie. Se si ritorna nel sistema di riferimento S, la frequenza ω' dell'onda sferica emessa deve cambiare e dipende dalla direzione di irraggiamento. Soltanto per una radiazione che si propaga nella direzione dell'onda primaria si ottiene una frequenza uguale a ω, indipendentemente da quale velocità ed in quale direzione si muova l'atomo.

Quindi nella direzione di propagazione dell'onda primaria tutti gli atomi emettono onde *della stessa frequenza* ω. Proprio questo fatto determina la possibilità di una propagazione regolare della luce nei gas. In tutte le altre direzioni gli atomi in moto inviano onde di frequenze differenti. Per esempio, se un atomo si muove nella direzione di propagazione della luce, in senso inverso esso emetterà onde di frequenza più piccola. Se invece esso si muove incontro alla luce, la frequenza dell'onda inviata nella direzione del suo moto sarà più grande.

Nei corpi solidi e liquidi l'agitazione termica ha un altro carattere; in questi casi gli atomi sono animati da moti *accelerati* ed il ragionamento con il passaggio ad un sistema di riferimento in moto non è qui applicabile. Gli atomi effettuano vibrazioni attorno alle loro posizioni d'equilibrio e per questo *modulano* il campo dell'onda luminosa. In conseguenza di ciò non soltanto si osservano onde della stessa frequenza, ma anche onde di altre frequenze. Tutto quanto detto sopra è valido per le onde aventi la frequenza esaminata. A queste radiazioni è legata la possibilità di una propagazione regolare delle onde luminose nei mezzi solidi e liquidi, ed anche della riflessione e di una rifrazione regolare sulle superfici speculari dei corpi. L'emissione di onde di altre frequenze produce nuove frequenze nella luce diffusa.

6. Concludiamo questo paragrafo con un'osservazione che ci sarà utile nella deduzione delle formule di Fresnel dal punto di vista atomico. Se il mezzo è omogeneo ed illimitato, in esso possono propagarsi vibrazioni dipolari sotto forma di un'onda progressiva

$$p = p_0 e^{i(\omega t - kr)}, \tag{68.3}$$

dove $\boldsymbol{p}$ è il momento di dipolo di un atomo di raggio vettore $\boldsymbol{r}$. Ogni dipolo, irradiando, perde energia, ma questa perdita è compensata dall'energia proveniente da altri dipoli. La radiazione dagli altri dipoli crea, nella zona del dipolo considerato, un campo elettrico che mantiene le vibrazioni armoniche permanenti di questo dipolo. In questo modo tutto il mezzo si comporta some un *sistema chiuso* che esegue vibrazioni *libere* senza essere soggetto ad azioni esterne. Se la lunghezza d'onda è grande rispetto alle distanze interatomiche, il mezzo può essere considerato come continuo e si può caratterizzare il suo stato con un vettore polarizzazione

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{68.4}$$

dove N è il numero di atomi contenuti nell'unità di volume.

§ 69. *Deduzione delle formule di Fresnel nell'ottica molecolare*

1. Ammettiamo che un mezzo isotropo omogeneo sia in contatto con il vuoto lungo un piano. Un'onda elettromagnetica piana che cade su questo mezzo eccita in esso un'*onda dipolare* (68.3) che, mediata su volumi infinitesimi, può essere considerata come un'*onda di polarizzazione* (68.4). Le
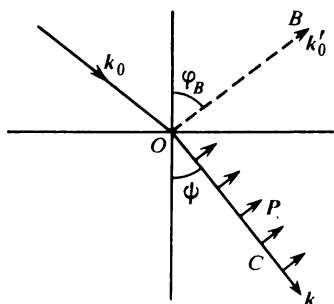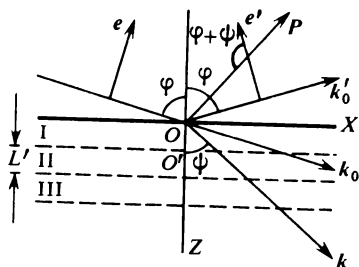
Fig. 251 Fig. 252

direzioni di propagazione di questa onda e dell'onda riflessa possono essere determinate imponendo la condizione d'uguaglianza delle velocità di fase di tutte le onde sulla superficie di separazione. Ciò porta all'uguaglianza delle *componenti tangenziali* dei vettori d'onda $\boldsymbol{k}_0$, $\boldsymbol{k}_0'$ e $\boldsymbol{k}$ delle onde incidente, riflessa e trasmessa. Inoltre, debbono essere verificate le relazioni $k_0^2 = k_0'^2 = (\omega/c)^2$, poiché l'onda cade sul mezzo provenendo dal vuoto.

Imponiamo ora che il vettore elettrico appartenga al piano d'incidenza (fig. 251). Se l'onda arriva con l'angolo di Brewster, il raggio rifratto OC

sarà perpendicolare alla direzione del raggio riflesso OB. Data la trasversalità delle onde luminose il vettore elettrico nel mezzo è perpendicolare al raggio rifratto OC. I momenti dipolari degli atomi eccitati dal vettore elettrico saranno anch'essi perpendicolari ad OC e, quindi, paralleli ad OB. Ma lungo la direzione del momento dipolare un dipolo di Hertz non irradia. Quindi nella direzione OB gli atomi del mezzo *non irradiano e non può esserci onda riflessa*. Questa è una spiegazione veramente semplice della legge di Brewster. (Si veda anche il problema 4 del paragrafo seguente).

2. Per stabilire le formule di Fresnel per la luce riflessa, consideriamo il mezzo come continuo, poiché le distanze interatomiche sono trascurabilmente piccole rispetto alla distanza tra la frontiera del mezzo ed il punto d'osservazione, in cui si vuole determinare il campo dell'onda riflessa. In queste condizioni idealizzate, i centri che irraggiano non sono più singoli atomi, ma elementi di volume del mezzo, piccoli rispetto a λ^3, ma contenenti ancora un numero molto grande di atomi.

Scegliamo gli assi coordinati come nel caso della figura 238. Dividiamo il mezzo in strati piano-paralleli *I, II, III*, ... dello stesso spessore, detti in seguito *zone* per analogia con le zone anulari di Fresnel (fig. 252). Ogni zona piano-parallela emette nel semispazio superiore un'onda piana di vettore d'onda $\boldsymbol{k}_0'$.

Lo spessore L' delle zone sia tale che ogni onda successiva sia in ritardo di fase di π rispetto all'onda precedente. All'istante $t = 0$ la fase delle vibrazioni dipolari nel punto O è uguale a zero, e le vibrazioni dipolari arrivano al punto O' con una fase uguale a $(-k_z L')$. Invece, l'onda inviata dal punto O' arriva al punto O con un ritardo in fase supplementare $k_{0z} L'$. Il ritardo di fase risultante $(k_z + k_{0z}) L'$ dev'essere per ipotesi uguale a π, da cui si trova $L' = \pi/(k_z + k_{0z})$.

Ora è chiaro che il campo elettrico $\boldsymbol{E}^{(r)}$ dell'onda riflessa è rappresentato da una serie alternata

$$\boldsymbol{E}^{(r)} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 - \dots \qquad (69.1)$$

i cui termini rappresentano i campi di radiazione delle corrispondenti zone. Se l'onda di polarizzazione (68.4) è rigorosamente omogenea, i termini della serie (69.1) sono uguali in valore assoluto. Le somme parziali di questa serie oscillano tra zero ed $\boldsymbol{E}_1$, mentre la somma dei termini di tutta la serie non ha un valore determinato.

In realtà l'onda di polarizzazione *non è omogenea*, infatti ha un *fronte avanzato* davanti al quale non c'è alcuna perturbazione. Dato che la serie (69.1) contiene un numero finito di termini, essa è convergente. Per calcolare la sua somma eliminiamo mentalmente la prima zona ed il campo che essa produce, e spostiamo in alto il mezzo restante di una distanza L'. Modifichiamo poi le fasi di tutti i dipoli del mezzo di una stessa quantità tale che i dipoli, che dopo lo spostamento si trovano alla frontiera di separazione, abbiano le stesse fasi che avrebbero allo stesso istante i dipoli della zona

soppressa. Dato che i termini della serie (69.1) variano lentamente e le zone sono identiche, il campo creato dal mezzo nel semispazio superiore resta praticamente inalterato in conseguenza di queste differenti manipolazioni, ma ora può essere rappresentato dalla serie

$$E^{(r)} = E_2 - E_3 + E_4 - \dots \tag{69.2}$$

Sommando le serie (69.1) e (69.2), si ottiene

$$E^{(r)} = \frac{1}{2} E_1 . \tag{69.3}$$

L'intensità del campo di radiazione del mezzo nel semispazio superiore è uguale alla metà dell'intensità di campo prodotto nello stesso semispazio dalla prima zona. Siamo arrivati allo stesso risultato ottenuto con la teoria delle zone anulari di Fresnel (si veda il § 39), ma qui i nostri risultati sono più convincenti poiché la relazione (69.2) per le zone piane è meglio giustificata della relazione analoga per le zone anulari di Fresnel.

3. Prima di proseguire, è necessario fare la seguente osservazione. L'onda riflessa emessa nel semispazio superiore da un mezzo continuo il cui vettore polarizzazione (68.4) è distribuito in modo continuo è dappertutto piana ed omogenea. Nel caso di un mezzo reale composto da atomi discreti, al campo lentamente variabile presso la frontiera del mezzo è sovrapposto un « increspamento molecolare » cioè un campo supplementare che varia fortemente su distanze comparabili alle distanze interatomiche. Questo campo può essere rappresentato con una sovrapposizione di onde che si smorzano rapidamente non appena ci si allontana dalla frontiera del mezzo. Il periodo spaziale lungo l'asse X di queste onde non omogenee o evanescenti è dell'ordine della distanza a tra gli atomi e la corrispondente componente del vettore d'onda è dell'ordine di $K_x \approx 2\pi/a$. Dato che la lunghezza del vettore $\boldsymbol{K}$ deve essere uguale a ω/c, la sua componente z è $K_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - K_x^2} \approx i2\pi/a$. Questo risultato mostra che se ci si allontana dalla frontiera del mezzo di una distanza a, il campo delle onde non omogenee decresce all'incirca di $e^{2\pi} \approx 500$ volte.

Abbiamo notato sopra che è possibile sostituire i centri emettitori discreti (atomi) con un mezzo continuo solo se si cerca di calcolare il campo nel semispazio superiore a distanze dalla frontiera che sono molto grandi rispetto ad a. La stima riportata mostra che questa limitazione in realtà dev'essere molto indebolita. Il campo di radiazione di un mezzo reale non differisce dal corrispondente campo del suo modello continuo idealizzato già a distanze dalla frontiera comparabili ad a.

4. Per arrivare alle formule di Fresnel si può procedere in due modi. Il primo consiste nel calcolare il campo di radiazione di tutti i dipoli del mezzo nel semispazio che questo mezzo occupa. Ma ciò è molto complicato e

noi utilizzeremo l'osservazione del § 68, che permette di evitare calcoli laboriosi.

Rappresentiamo l'onda incidente come il *risultato della radiazione di un certo mezzo*. Immaginiamo che il semispazio superiore della figura 252 sia occupato dallo stesso mezzo che riempie il semispazio inferiore, ed in tutto lo spazio infinito si propaghi un'onda di polarizzazione omogenea (68.4). Il mezzo immaginario esercita un'influenza sul semispazio inferiore mediante il suo campo di radiazione. Ma visto che nel semispazio inferiore non è cambiato niente, il campo inviato dal mezzo immaginario nel semispazio inferiore è identico al campo dell'onda incidente.
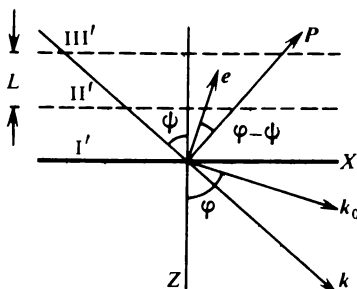
Fig. 253

Dividiamo il mezzo immaginario in zone piano-parallele I', II', III', ... di spessore $L = \pi/(k_z - k_{0z})$ (fig. 253). Ragionando come prima, è facile dimostrare che l'intensità di campo, inviata dal mezzo immaginario nel semispazio inferiore, è uguale alla metà dell'intensità di campo di radiazione della zona I'. Il calcolo del rapporto delle ampiezze R ed $\mathscr{E}$ delle onde riflessa ed incidente è quindi ricondotto al confronto dei campi di radiazione delle zone I e I' sulla frontiera di separazione $z = 0$.

Se il vettore $\boldsymbol{P}$ è perpendicolare al piano d'incidenza, il rapporto delle ampiezze R ed $\mathscr{E}$ sarà semplicemente uguale al rapporto degli spessori delle zone I e I' preso con il segno meno, poiché le fasi delle onde emesse da queste zone sono opposte sulla superficie di separazione. Ritroviamo quindi la prima formula di Fresnel

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = -\frac{L'}{L} = -\frac{k_z - k_{0z}}{k_z + k_{0z}} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}. \tag{69.4}$$

Se invece il vettore $\boldsymbol{P}$ è parallelo al piano d'incidenza, si deve ancora tener conto della dipendenza del campo di radiazione dall'angolo tra il momento dipolare e la direzione di radiazione. Alla radiazione contribuisce soltanto la componente trasversale del momento dipolare, perciò la quantità $-L'/L$ deve essere moltiplicata per il rapporto delle proiezioni del vet-

tore P sulle direzioni dei vettori unitari e' ed e, perpendicolari alle direzioni di propagazione delle onde riflessa ed incidente. Tenendo conto della trasversalità dell'onda rifratta ($kP = 0$), si trova che questo rapporto vale $-\cos(\varphi + \psi)/\cos(\varphi - \psi)$ (figg. 252 e 253), ed il rapporto delle ampiezze $R_\parallel$ ed $\mathscr{E}_\parallel$ è dato da

$$\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = -\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp}\frac{\cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi)} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}. \qquad (69.5)$$

Questa è la seconda formula di Fresnel.

Utilizzando un ragionamento analogo si può studiare sia il caso dell'incidenza mezzo-vuoto, che il caso generale della riflessione sulla superficie di separazione di due mezzi materiali.

§ 70. *Scarti dalle formule di Fresnel*

1. La riflessione e la rifrazione della luce sulla superficie propria di separazione di due mezzi isotropi trasparenti sono ben descritte dalle formule di Fresnel. Si verificano piccoli scarti da queste formule soltanto nel caso di riflessione sotto l'angolo di Brewster ed in prossimità di quest'ultimo. Questi scarti si manifestano in modo netto per la presenza dei seguenti due fenomeni:

a) Nella riflessione di una luce polarizzata nel piano d'incidenza, *la legge di Brewster non è esattamente verificata*; il coefficiente di riflessione non s'annulla per alcun valore dell'angolo d'incidenza, benché esso sia molto piccolo sotto l'angolo di Brewster.

b) Una luce linearmente polarizzata, il cui piano di polarizzazione forma un angolo con il piano d'incidenza, riflettendosi sotto un angolo poco diverso dall'angolo di Brewster, diventa polarizzata *ellitticamente*. Se le formule di Fresnel fossero rigorosamente valide, essa dovrebbe restare sempre polarizzata linearmente, esclusa soltanto la riflessione totale.

Queste due deviazioni *non sono indipendenti*, ma *si condizionano l'un l'altra*. Infatti, se le formule di Fresnel

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad \frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} \qquad (70.1)$$

fossero rigorosamente verificate, il rapporto $R_\perp / \mathscr{E}_\perp$ conserverebbe il suo segno per tutti gli angoli d'incidenza, mentre il segno del rapporto $R_\parallel / \mathscr{E}_\parallel$ cambierebbe al passaggio dell'angolo di Brewster. In altre parole facendo variare l'angolo di incidenza, al passaggio dell'angolo di Brewster la fase dell'onda riflessa cambierebbe bruscamente di π. Non si osserverebbe alcuna violazione di continuità di $R_\parallel$ in funzione dell'angolo d'incidenza φ, poi-

ché per la seconda formula (70.1), questa funzione per $\varphi = \varphi_B$ s'annulla. Ma la funzione $R_\parallel(\varphi)$ sarebbe discontinua per $\varphi = \varphi_B$, se non fosse uguale a zero per questo valore dell'angolo d'incidenza, come effettivamente accade. Per una tale discontinuità non esiste alcuna causa fisica, e perciò si deve concludere che il cambio di fase subìto da $R_\parallel(\varphi)$ non avviene bruscamente per $\varphi = \varphi_B$, ma si estende su di un piccolo intorno dell'angolo di Brewster. Nei limiti di questo intorno la fase varia in modo continuo da 0 a π. Simultaneamente si produce uno spostamento di fase fra le componenti $E_\parallel$ ed $E_\perp$ e perciò la luce riflessa risulta polarizzata ellitticamente, a condizione che la luce incidente sia polarizzata linearmente. Questo risultato dimostra che *la seconda deviazione dalle formule di Fresnel è una conseguenza della prima*.

È valida anche la proposizione inversa: *la prima deviazione dalla legge dipende dalla seconda,* a condizione che i mezzi non producano una polarizzazione circolare. Ciò è evidente, se osserviamo che, verificando la condizione summenzionata, le onde $E_\parallel$ ed $E_\perp$ conservano la loro polarizzazione propria e, conformemente al principio di sovrapposizione, si propagano indipendentemente l'una dall'altra.

2. Questi scarti dalle formule di Fresnel si possono interpretare come dovuti all'esistenza, sulla superficie del mezzo riflettente, di uno *strato di transizione sottile* le cui proprietà ottiche sono differenti da quelle del mezzo stesso. Questa spiegazione è l'unica possibile, almeno quando il mezzo non risente di tensioni interne, ma non si può spiegare in modo certo né l'origine di questi strati, né le loro proprietà ottiche.

Il caso più semplice si ha quando sulla superficie di un mezzo riflettente esiste una pellicola sottile di una sostanza estranea depositata intenzionalmente o formata spontaneamente in conseguenza di un trattamento della superficie o di una sua contaminazione. Se lo spessore della pellicola è grande rispetto alle distanze interatomiche, essa può essere caratterizzata con *parametri macroscopici*: spessore l ed indice di rifrazione n. Le pellicole di spessore dell'ordine di λ sono artificialmente depositate sulle superfici riflettenti sia per aumentare la loro trasparenza superficiale che per fabbricare filtri interferenziali. Se la pellicola è omogenea, cioè il suo indice n ha un valore costante su tutto lo spessore, la riflessione e la rifrazione della luce sono descritte dalle formule (67.9).

Ora ci interessano però pellicole sottili, il cui spessore sia piccolo rispetto a λ. In questo caso le formule (67.9) si possono semplificare sviluppandole in serie di potenze di l/λ e conservando soltanto i termini di primo grado in l/λ. Per tali pellicole il calcolo può essere generalizzato senza preoccuparsi per l'omogeneità della pellicola, ma ammettendo che l'indice di rifrazione vari in modo *continuo*. Così hanno fatto Drude (1863-1906) e molti altri autori. Ma le stime dello spessore delle pellicole formatesi sulle superfici dei liquidi puri e sui piani di sfaldatura dei cristalli, mostrano che sono *dello stesso ordine di grandezza* delle dimensioni atomiche e delle di-

stanze interatomiche. Sarebbe sbagliato applicare a queste pellicole le equazioni macroscopiche di Maxwell e caratterizzarle con un indice di rifrazione. Per ottenere i risultati che c'interessano utilizzeremo i metodi dell'ottica molecolare di cui abbiamo parlato.

3. Supponiamo dapprima che sulla superficie riflettente non esista strato di transizione. Come è stato mostrato nel paragrafo precedente, per determinare il campo di un'onda riflessa è sufficiente considerare la radiazione della prima zona I (fig. 252). Dividiamo questa zona in strati infinitamente sottili di spessore $d\zeta$ (fig. 254). Il vettore polarizzazione nel punto O' è dato dall'espressione $P_0 e^{i(\omega t - k_z \zeta)}$. Il momento dipolare dell'unità d'area dello strato $d\zeta$ è $P_0 d\zeta e^{i(\omega t - k_z \zeta)}$. Le vibrazioni emesse da O' arrivano in O con un ritardo di fase $k_{0z}\zeta$. Per facilitare i calcoli lo strato $d\zeta$ si
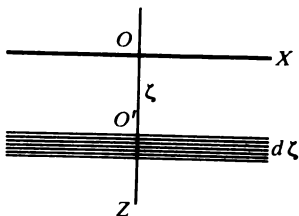
Fig. 254

può mentalmente trasportare alla frontiera del mezzo, introducendo un conveniente spostamento di fase. Il momento dipolare dell'unità d'area dello strato così spostato sarà allora

$$dA^{(r)} e^{i\omega t} = P_0 e^{i\omega t} e^{-i(k_{0z}+k_z)\zeta} d\zeta.$$

Integriamo quest'espressione sullo spessore della prima zona I e dividiamo per due il risultato ottenuto. Troviamo allora che l'onda riflessa può essere rappresentata dal campo di radiazione di un « piano equivalente », situato sulla superficie del mezzo sul quale si producono le vibrazioni dipolari con una densità superficiale d'ampiezza

$$A_0^{(r)} = \frac{P_0}{2} \int_0^{L'} e^{-i(k_{0z}+k_z)\zeta} d\zeta = i \frac{P_0}{2(k_{0z}+k_z)} [e^{-i(k_{0z}+k_z)L'} - 1],$$

o, tenendo conto della relazione $(k_{0z} + k_z)L' = \pi$,

$$A_0^{(r)} = -i \frac{P_0}{k_{0z} + k_z}. \tag{70.2a}$$

Applicando lo stesso ragionamento alla zona I' (fig. 253), arriveremo alla conclusione che l'onda incidente può essere simulata dal campo di radiazione di un altro « piano equivalente », situato anch'esso alla frontiera

del mezzo. Il momento dipolare dell'unità d'area di questo piano ha per ampiezza

$$A_0^{(e)} = -i \frac{P_0}{k_{0z} - k_z}. \qquad (70.2b)$$

4. Teniamo ora conto dell'esistenza di uno strato di transizione. Visto che lo spessore di questo strato è supposto piccolo rispetto a λ, lo si può assimilare ad un piano matematico. Indichiamo con $\tau = \tau_0 e^{i(\omega t - k_{0x} x)}$ il momento dipolare supplementare introdotto dallo strato di transizione per unità d'area. Benché τ sia una grandezza macroscopica, la si può utilizzare anche per *strati di transizione sottili a piacere* (ivi compresi gli strati monomolecolari). Questo è dovuto al fatto che l'introduzione di τ implica una media non su piccoli volumi del mezzo, ma *su piccoli elementi di superficie* della superficie riflettente. Questi ultimi si possono scegliere piccoli rispetto alla lunghezza d'onda, ma ancora grandi rispetto alle distanze interatomiche.

Per simulare il campo dell'onda riflessa, tenendo conto della radiazione dello strato di transizione, si deve aggiungere τ_0 all'ampiezza $A_0^{(r)}$. Per simulare l'onda incidente la stessa grandezza τ_0 deve essere aggiunta all'ampiezza $A_0^{(e)}$, ma cambiata di segno. Infatti, dopo quest'addizione, l'onda che penetra nel mezzo ed agente su esso, sarà simulata dalle radiazioni di due piani situati alla frontiera del mezzo: l'uno la cui ampiezza di vibrazione dipolare è $(A_0^{(e)} - \tau_0)$, e l'altro la cui ampiezza di vibrazione dipolare è τ_0. Le ampiezze τ_0 e $-\tau_0$ si compensano reciprocamente e resta soltanto l'ampiezza $A_0^{(e)}$, come se lo strato di transizione non esercitasse alcun'influenza sul mezzo, lontano dalla sua frontiera. Ma questo è appunto ciò che è necessario, affinché la polarizzazione del mezzo, fuori dello strato di transizione, si presenti sotto forma di un'onda omogenea (68.4).

Quindi, al posto delle (70.2a) e (70.2b) si ottengono le seguenti espressioni:

$$A^{(r)} = -i \frac{P_0}{k_z + k_{0z}} + \tau_0, \quad A^{(e)} = i \frac{P_0}{k_z - k_{0z}} - \tau_0, \qquad (70.3)$$

che si devono utilizzare per calcolare i campi delle onde incidente e riflessa. Bisogna ricordare che per lo studio dell'irraggiamento sono essenziali non le ampiezze stesse (70.3), ma solo le loro *componenti perpendicolari alla direzione di radiazione*. I coefficienti di Fresnel $R_\perp / \mathscr{E}_\perp$ e $R_\parallel / \mathscr{E}_\parallel$ sono dati dai rapporti di queste componenti. Limitandoci ai termini lineari in k_0, otteniamo con calcoli semplici ma un po' lunghi

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} (1 + 2ik_0 \gamma_x \cos\varphi), \qquad (70.4)$$

$$\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} \left(1 + 2ik_0 \cos\varphi \frac{\gamma_x \cos^2\psi - \gamma_z \sin^2\varphi}{\cos^2\psi - \sin^2\varphi}\right). \qquad (70.5)$$

Qui sono state introdotte le notazioni

$$\gamma_x = \frac{\tau_{0x}}{P_{0x}} \equiv \frac{\tau_{0y}}{P_{0y}}, \qquad \gamma_z = \frac{\tau_{0z}}{P_{0z}}. \tag{70.6}$$

I parametri γ_x e γ_z hanno le dimensioni di una lunghezza. Nella teoria esposta proprio questi parametri caratterizzano le proprietà dello strato di transizione. Perché la teoria sia utilizzabile occorre che siano verificate le seguenti condizioni:

$$\gamma_x k_0 \ll 1, \ \gamma_z k_0 \ll 1, \quad \text{o} \quad \gamma_x/\lambda \ll 1, \ \gamma_z/\lambda \ll 1.$$

I termini di secondo grado $(\gamma_x/\lambda)^2$ e $(\gamma_z/\lambda)^2$ sono stati trascurati, in modo che in quest'approssimazione tutti i coefficienti sono indipendenti da λ se γ_x/λ e γ_z/λ sono piccole. Ciò significa che il calcolo dei parametri γ_x e γ_z è un *problema d'elettrostatica puro*. Per eseguire un calcolo reale di questi parametri nella teoria molecolare è necessario conoscere la struttura molecolare del mezzo e dello strato di transizione.

5. Lo stato di polarizzazione della luce riflessa è completamente caratterizzato dal rapporto complesso $R_\parallel / R_\perp$. Se $\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E}_\parallel$, si ha

$$\frac{R_\parallel}{R_\perp} = -\frac{\cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi)} + 2ik_0(\gamma_z - \gamma_x)\frac{\cos\varphi \sin^2\varphi}{\cos^2(\varphi - \psi)}. \tag{70.7}$$

Sotto l'angolo di Brewster questo rapporto è *puramente immaginario*, cioè la luce riflessa è polarizzata *ellitticamente*. Uno degli assi principali dell'ellisse delle vibrazioni è perpendicolare al piano d'incidenza e l'altro appartiene a questo piano. Il rapporto di questi assi è detto *coefficiente d'ellitticità* della luce riflessa sotto l'angolo di Brewster. Questo coefficiente può essere sia positivo, sia negativo, poiché la differenza di fase δ tra le componenti $R_\parallel$ e $R_\perp$ sotto l'angolo di Brewster è stata posta uguale a $+\pi/2$. Con questa convenzione $R_\parallel/R_\perp = \rho e^{i\pi/2} = i\rho$. Dalla formula (70.7) è facile ottenere

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{n^2 + 1}(\gamma_z - \gamma_x), \tag{70.8}$$

dove λ è la lunghezza d'onda nel vuoto. Al coefficiente d'ellitticità positivo corrisponde una polarizzazione ellittica sinistra della luce riflessa, a quello negativo una polarizzazione destra (si suppone che la luce incidente sia linearmente polarizzata ad un angolo di 45° sul piano d'incidenza, cioè $\mathscr{E}_\parallel = \mathscr{E}_\perp$). La polarizzazione ellittica si dice *destra*, se per l'occhio che guarda nel senso opposto al senso di propagazione della luce l'ellisse è percorsa nel senso orario. Nel caso contrario essa si dice *sinistra*.

Per tutti i liquidi a superficie riflettente pura che sono stati studiati, il

Tavola 6

Sostanza	$\rho \cdot 10^5$	n	l_{min}/λ
Acqua	42	1,33	0,00057
Alcool metilico	46	1,33	0,00062
Alcool etilico	92	1,33	0,00124
Tetracloruro di carbonio	107	1,46	0,00103
Benzene	135	1,51	0,00117
Toluene	144	1,50	0,00101
Ortoxilene	137	1,51	0,00119

coefficiente ρ è positivo. Per l'acqua ordinaria esso è negativo. Ma, come ha mostrato Rayleigh, quando la superficie dell'acqua è decontaminata, il coefficiente ρ cambia di segno, annullandosi ad un certo grado intermedio di purificazione. Per una superficie d'acqua decontaminata fino al più alto grado Rayleigh ha trovato $\rho = +0{,}00042$. Nella tavola 6 sono riportati i valori di ρ per differenti liquidi ($\lambda = 546$ nm).

Nell'ultima colonna della tavola 6 sono riportati i valori dello spessore minimo l_{min} dello strato di transizione i quali, secondo la teoria di Drude, sono sufficienti per ottenere l'ellitticità osservata della luce riflessa (si veda il problema 3 di questo paragrafo). Benché questa teoria sia macroscopica, la stima citata dà l'ordine corretto del valore di l_{min}. Da questa stima è evidente che gli strati di transizione dell'ordine di una o di più distanze interatomiche sono già sufficienti per provocare gli scarti osservati dalle formule di Fresnel. Questo risultato dimostra in modo evidente che insieme con gli strati di transizione dovuti alla contaminazione, ai trattamenti, all'assorbimento dei gas, ecc., esistono anche strati di transizione dovuti alla *struttura molecolare* del mezzo riflettente stesso vicino alla sua superficie.

È difficile precisare le cause dell'apparizione di questi strati di transizione, ma si possono indicare alcune cause possibili: 1) Il campo elettrico dell'onda luminosa che agisce sulle molecole superficiali del mezzo, può differire da quello che agisce sulle altre molecole. 2) Se il mezzo è costituito da molecole anisotrope, queste ultime possono orientarsi presso la superficie in certe direzioni prevalenti. 3) La densità del mezzo in un sottile strato superficiale può differire dalla densità del mezzo.

Problemi

1. Supponendo continuo lo strato di transizione, calcolare i suoi parametri γ_x e γ_z.

Soluzione. Il problema si riduce alla determinazione del vettore polarizzazione $\boldsymbol{P}(z)$ del mezzo e dello strato di transizione in un campo elettrico omogeneo $\boldsymbol{E}$. Caratterizziamo il mezzo con le costanti dielettriche $\varepsilon_x(z)$ e $\varepsilon_z(z)$ nelle direzioni parallela e perpendicolare allo strato. Gli assi coordinati si possono scegliere in modo che $E_y = D_y = 0$. Per ragioni di simmetria i vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{D}$ non possono dipendere da x ed y. Perciò le equazioni rot $\boldsymbol{E} = 0$ e div $\boldsymbol{D} = 0$ di-

ventano
$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{dD_z}{dz} = 0.$$

Ne segue che in tutto lo spazio E_x e D_z sono costanti, cioè non dipendono da z. Il vettore polarizzazione dello strato di transizione è uguale a

$$P_x = \frac{\varepsilon_x - 1}{4\pi} E_x, \quad P_z = \frac{\varepsilon_z - 1}{4\pi} E_z = \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_z}\right) D_z.$$

Per determinare la polarizzazione supplementare ΔP dovuta allo strato di transizione, sottraiamo di qui il vettore polarizazzione del mezzo omogeneo stesso

$$\Delta P_x = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon}{4\pi} E_x, \quad \Delta P_z = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_z}\right) D_z,$$

dove ε è la costante dielettrica di questo mezzo. Per trovare τ_{0x} e τ_{0z}, le espressioni ottenute devono essere integrate sullo spessore l dello strato di transizione. Dopo aver calcolato l'integrale ed introducendo le notazioni

$$p = \int_0^l \varepsilon_x(z)dz, \quad q = \int_0^l \frac{dz}{\varepsilon_z(z)},$$

otteniamo

$$\gamma_x = \frac{p - ln^2}{n^2 - 1}, \quad \gamma_z = \frac{l - qn^2}{n^2 - 1}. \tag{70.9}$$

Se sostituiamo questi valori nelle (70.4) e (70.5), si ottengono le *formule di Drude*.

2. Ammettendo che lo strato di transizione sia macroscopico e omogeneo, trovare l'espressione del coefficiente d'ellitticità sotto incidenza brewsteriana.

Risposta.

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{n^2 + 1}\, \frac{(n^2 - n'^2)(n'^2 - 1)}{(n^2 - 1)n'^2}\, l, \tag{70.10}$$

dove n' è l'indice di rifrazione dello strato di transizione.

3. Supponendo positiva l'ellitticità ρ, trovare un valore di n' tale che per n e l dati la grandezza ρ sia massima. Trovare il valore minimo di l, affinché per n dato ρ abbia un valore dato.

Risposta.

$$n' = \sqrt{n}, \quad l_{\min} = \frac{\rho}{\pi\sqrt{n^2 + 1}}\, \frac{n + 1}{n - 1}\lambda. \tag{70.11}$$

4. Un mezzo isotropo è costituito da molecole anisotrope. L'isotropia macroscopica del mezzo è dovuta alle variazioni disordinate delle direzioni delle molecole in conseguenza dell'agitazione termica. In generale, il momento dipolare di una molecola anisotropa, eccitato dal campo dell'onda luminosa, non coincide in direzione con il campo elettrico. Supponiamo che il vettore elettrico dell'onda incidente sia contenuto nel piano d'incidenza e che l'onda cada sotto incidenza brewsteriana. Benché il vettore elettrico del mezzo sia perpendicolare al raggio rifratto, i momenti dipolari delle molecole hanno generalmente componenti lungo il raggio. Queste molecole irradieranno evidentemente nella direzione del raggio riflesso. Dire se in questo caso sarà verificata la legge di Brewster. (Si veda il § 69, punto 1.)

Soluzione. La legge di Brewster resta valida. Per un mezzo macroscopicamente isotropo le componenti dei momenti dipolari delle molecole che sono parallele al raggio rifratto variano caoticamente nel tempo. In virtù di questo fatto le radiazioni di singole molecole nella direzione del raggio riflesso non sono coerenti. Queste radiazioni non possono dar luogo ad una riflessione regolare e producono soltanto la diffusione della luce. Ma se le molecole anisotrope di uno strato superficiale sottile sono orientate in una certa direzione, le radiazioni di queste molecole diventano parzialmente coerenti e si ha luce riflessa (si veda il § 69).

VI. OTTICA DEI METALLI

§ 71. *Equazioni di Maxwell e propagazione delle onde nei metalli*

1. Come nei dielettrici, la propagazione delle onde elettromagnetiche nei metalli è descritta dalle equazioni di Maxwell

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},\\
\operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}},\\
\operatorname{div} \boldsymbol{D} &= 4\pi\rho,\\
\operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0.
\end{aligned}
\tag{71.1}
$$

In confronto con i dielettrici qui viene aggiunto un termine contenente la corrente di conduzione $\boldsymbol{j}$. Nei campi statici e di bassa frequenza, questa corrente è determinata dal moto dei soli *elettroni liberi*. Il moto degli elettroni legati, e tanto più quello dei nuclei atomici, non giocano alcun ruolo in questa regione di spettro. Ma già nel dominio dell'infrarosso, dove sono situate le frequenze proprie delle oscillazioni dei nuclei atomici, i moti di questi ultimi cominciano ad influenzare notevolmente il comportamento ottico dei metalli (risonanza). In seguito, nella regione visibile dello spettro ed in quella dell'ultravioletto, alle vibrazioni partecipano anche gli *elettroni legati*.

Gli spostamenti delle cariche legate provocano la *polarizzazione dei metalli*, analoga a quella dei dielettrici, e determinano una *corrente di polarizzazione*. Ma nei campi ad alta frequenza non esiste una differenza essenziale tra i moti delle particelle libere e legate. Sarebbe poco corretto dire che la corrente di conduzione dipende dal solo moto degli elettroni liberi e la corrente di polarizzazione dal solo moto degli elettroni legati. A queste nozioni è necessario dare definizioni precise, adatte al loro significato teorico.

Si può procedere nel seguente modo. Una vibrazione forzata di una particella carica (elettrone o nucleo atomico) nel campo dell'onda luminosa può essere sviluppata in una vibrazione in fase (o in opposizione di fase)

con il campo elettrico, ed in una vibrazione sfasata di 90° rispetto al campo elettrico. La corrente dovuta alle vibrazioni in fase (o in opposizione di fase) viene detta *corrente di conduzione* e sia $\boldsymbol{j}$ la sua densità. Le correnti di conduzione determinano l'assorbimento delle onde elettromagnetiche. Le correnti, dovute alle vibrazioni sfasate di 90°, vengono dette *correnti di polarizzazione*. Queste correnti non provocano l'assorbimento delle onde. La densità di corrente di polarizzazione può essere presentata nella forma $\boldsymbol{j}_{\text{pol}} = \dot{\boldsymbol{P}}$, dove $\boldsymbol{P}$ è il vettore polarizzazione. Questa relazione può essere considerata come la definizione del vettore $\boldsymbol{P}$. Con ciò viene precisato, nei metalli, il significato del vettore induzione $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ che figura nelle equazioni (71.1).

Non terremo conto delle proprietà magnetiche delle sostanze, dato che queste proprietà non sono essenziali nella regione ottica dello spettro. Ammetteremo che i metalli siano *otticamente isotropi*, benché tutti i metalli (eccezion fatta per i metalli liquidi) abbiano struttura cristallina. Ma i cristalli del sistema cubico sono otticamente isotropi. Gli altri metalli di regola sono *macroscopicamente isotropi,* poiché essi sono costituiti da un gran numero di piccoli cristalli orientati caoticamente, le cui dimensioni sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda. Per i metalli isotropi le equazioni materiali (relazioni complementari dipendenti dalle proprietà del mezzo) sono

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon' \boldsymbol{E}, \tag{71.2}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}. \tag{71.3}$$

La grandezza σ si dice *conduttività elettrica* e ε' *costante dielettrica.* (Utilizziamo la notazione ε', conservando la notazione ε per la grandezza complessa che sarà introdotta in seguito.) Entrambe le grandezze ε' e σ sono funzioni della frequenza ω. Perciò nelle equazioni (71.2) e (71.3) il campo $\boldsymbol{E}$ deve essere supposto monocromatico. I campi non monocromatici devono essere sviluppati in componenti monocromatiche ed a queste occorre applicare il principio di sovrapposizione.

L'esistenza della conduttività σ determina l'*assorbimento della luce* nei metalli. Dal punto di vista della teoria formale che è esposta qui, l'assorbimento della luce non è altro che la trasformazione dell'energia elettromagnetica *in calore per effetto Joule.*

Le equazioni materiali (71.2) e (71.3) forniscono soltanto una descrizione grossolana delle proprietà ottiche dei metalli (si veda il § 74). In certi casi, in particolare concernenti le onde corte (radiazioni ultraviolette, visibili ed infrarosse), queste equazioni conducono a risultati che non concordano affatto con l'esperienza. Una teoria più soddisfacente deve basarsi sulla *teoria quantistica dei metalli.* Ma l'esposizione di questa teoria esce dai limiti di questo manuale.

2. Per i campi monocromatici $\dot{\boldsymbol{D}} = i\omega\boldsymbol{D} = i\omega\varepsilon'\boldsymbol{E}$, cosicché il secondo

membro della prima equazione (71.1) diventa $\frac{1}{c}(i\omega\varepsilon' + 4\pi\sigma)\boldsymbol{E}$. Se introduciamo la grandezza

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \equiv \varepsilon' - i\varepsilon'', \tag{71.4}$$

detta *costante dielettrica complessa,* il sistema di equazioni (71.1) assume la forma

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{i\omega}{c}\varepsilon\boldsymbol{E}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H}, \tag{71.5}$$

cioè formalmente coincide con le corrispondenti equazioni per i dielettrici. Anche le condizioni al contorno sono le stesse: esse esigono che le componenti tangenziali dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ siano continue sulla superficie di separazione dei mezzi. Come conseguenza di queste condizioni e delle equazioni (71.5) si ottiene la continuità delle componenti normali del vettore $\varepsilon\boldsymbol{E}$ (si veda il § 63). Perciò *tutte le relazioni dell'ottica dei mezzi trasparenti, dedotte dalle equazioni* (71.5) *e dalle condizioni al contorno per mezzo di operazioni lineari reali, possono essere formalmente trasposte nell'ottica dei metalli e di altri mezzi assorbenti mediante una semplice sostituzione della grandezza reale* ε *con la grandezza complessa corrispondente.* Ciò richiede una precisazione supplementare del contenuto fisico e del significato delle relazioni così ottenute.

Per caratterizzare le proprietà ottiche dei metalli, si utilizza l'*indice di rifrazione complesso* ν definito dalla relazione

$$\nu^2 = \varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''. \tag{71.6}$$

Ponendo

$$\nu = n - i\varkappa, \tag{71.7}$$

dove n e $\varkappa$ sono grandezze reali e sostanzialmente positive, otteniamo

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon', \quad 2n\varkappa = \varepsilon''. \tag{71.8}$$

La grandezza n é detta *indice di rifrazione principale* e la grandezza $\varkappa$ è l'*indice di estinzione principale* del metallo. Si deve dare la preferenza al termine indice di estinzione rispetto al termine più usato « indice d'assorbimento » poiché *lo smorzamento dell'onda può aver luogo anche senza assorbimento.* A titolo d'esempio si può citare il plasma quando la frequenza ω è inferiore alla cosiddetta *frequenza di plasma* (si veda il § 87). Per il plasma la grandezza ε è reale ma *negativa*, cioè $\varepsilon'' = 0$. In questo caso non vi è assorbimento, ma solo smorzamento, poiché $\sqrt{\varepsilon}$ è una quantità puramente immaginaria e quindi $\varkappa \neq 0$.

Se il mezzo è omogeneo, in esso possono propagarsi onde monocromatiche piane della forma (5.3). Queste onde debbono verificare le seguenti

relazioni:

$$E = -\frac{c}{\omega\varepsilon}[\boldsymbol{kB}], \quad \boldsymbol{B} = \frac{c}{\omega}[\boldsymbol{kE}], \tag{71.9}$$

$$\boldsymbol{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon' - i\varepsilon''). \tag{71.10}$$

In un mezzo assorbente il vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ è sempre complesso e la corrispondente onda piana è *sempre non omogenea* (evanescente). Questo risultato è evidente, poiché in presenza di assorbimento un'onda piana non può propagarsi senza smorzamento. Poniamo

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' - i\boldsymbol{k}'', \tag{71.11}$$

dove $\boldsymbol{k}'$ e $\boldsymbol{k}''$ sono vettori reali. In base alla (71.10) si ha allora

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon', \quad 2(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'') = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon''. \tag{71.12}$$

Il vettore $\boldsymbol{k}'$ indica la direzione di propagazione dei *piani di ugual fase.* Nella direzione del vettore $\boldsymbol{k}''$ diminuisce l'ampiezza dell'onda. Nel caso generale *i piani di ugual fase ed i piani di uguale ampiezza non sono perpendicolari tra loro.* La perpendicolarità ha sempre luogo soltanto per i mezzi non assorbenti quando $\varepsilon'' = 0$.

§ 72. *Leggi geometriche della riflessione e della rifrazione della luce sulla superficie di un metallo*

1. Supponiamo che dal vuoto cada sulla superficie piana di un metallo un'onda monocromatica omogenea piana propagantesi lungo il vettore d'onda $\boldsymbol{k}_1$ (fig. 255). Appare un'onda riflessa omogenea con il vettore
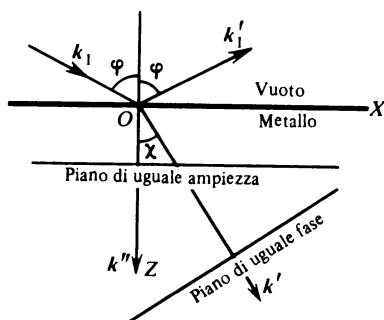
Fig. 255

d'onda k_1' ed un'onda non omogenea trasmessa nel metallo. Il vettore d'onda complesso dell'onda trasmessa sia $\boldsymbol{k}$ (senza indice). Come è stato mostrato prima, dalle condizioni al contorno si ottengono le relazioni

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_x. \tag{72.1}$$

Da queste relazioni segue che le leggi geometriche della riflessione della luce sui metalli sono le stesse che per i mezzi non assorbenti. Si osserva una differenza soltanto nelle leggi della rifrazione della luce.

Osserviamo prima di tutto che i piani di uguale ampiezza dell'onda trasmessa sono paralleli alla superficie del metallo. Infatti, rappresentiamo il vettore complesso $\boldsymbol{k}$ nella forma (71.11). Dalla (72.1) segue che la componente tangenziale di $\boldsymbol{k}$ è reale e quindi il vettore $\boldsymbol{k}''$ è perpendicolare alla superficie del metallo. Proprio questo fatto dimostra la nostra asserzione. L'onda trasmessa si smorza nella direzione del vettore $\boldsymbol{k}''$ e perciò quest'ultimo deve essere orientato verso il basso, cioè dalla parte del metallo, poiché lo smorzamento dell'onda deve aver luogo in questa direzione e non in quella opposta. Verso il metallo deve essere orientato anche il vettore $\boldsymbol{k}'$, poiché l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{k}'$ e $\boldsymbol{k}''$ è acuto, conformemente alla seconda relazione (71.12).

Il vettore $\boldsymbol{k}'$ è perpendicolare al piano di ugual fase dell'onda trasmessa. L'angolo χ formato da questo vettore con la direzione positiva dell'asse Z si dice *angolo di rifrazione reale*. Il valore del rapporto

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\chi} = n_\varphi, \tag{72.2}$$

dipende, generalmente, dall'angolo d'incidenza φ. Questo rapporto è positivo e si chiama *indice di rifrazione*. Essendo $k_x = k_x' = k' \sin\chi$, dalla relazione (72.1) segue che

$$k' = k_1 \frac{\sin\varphi}{\sin\chi} = \frac{\omega}{c} n_\varphi. \tag{72.3}$$

Per analogia con la (72.3) introduciamo un'altra quantità positiva $\varkappa_\varphi$ definita dalla relazione

$$k'' = \frac{\omega}{c} \varkappa_\varphi. \tag{72.4}$$

Essa è detta *indice d'estinzione*. Il suo significato fisico è facile da stabilire esaminando l'espressione del campo dell'onda trasmessa. Si constata che alla profondità

$$z = h_\varphi = \frac{\lambda_0}{4\pi\varkappa_\varphi}, \tag{72.5}$$

dove λ_0 è la lunghezza d'onda nel vuoto, l'intensità luminosa (che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza) diminuisce di e volte. La quantità h_φ si

dice *profondità di penetrazione della luce nel metallo*. Di conseguenza, *l'indice d'estinzione $\varkappa_\varphi$ può essere definito come il rapporto tra la lunghezza dell'onda luminosa nel vuoto e la profondità di penetrazione della luce nel metallo moltiplicata per 4π.*

Nella regione visibile dello spettro, l'indice d'estinzione dei metalli è generalmente dell'ordine dell'unità. Per esempio, per l'oro sotto incidenza normale $\varkappa_\varphi = 2{,}82$, $h_\varphi = \lambda_0/4\pi\varkappa_\varphi = \lambda_0/35{,}4$. Ne segue che su una profondità uguale alla lunghezza d'onda, l'intensità della luce diminuisce nell'oro di $\exp(\lambda_0/h_\varphi) \approx 2{,}4 \cdot 10^{15}$ volte.

Le pellicole metalliche con spessore dell'ordine della lunghezza d'onda sono, in generale, opache alla luce. I dati relativi alle proprietà ottiche dei metalli si ottengono soltanto dallo studio della *luce riflessa*. È però necessario studiare le leggi della penetrazione della luce nei metalli per ben comprendere le leggi della riflessione. La luce riflessa da un metallo (come pure da un dielettrico) è il risultato dell'interferenza di onde secondarie coerenti emesse dagli elettroni e dai nuclei atomici del metallo. Ma le onde secondarie sono evidentemente eccitate dall'onda incidente penetrata nel metallo. Se il campo non penetrasse nel metallo, non si avrebbe riflessione.

2. Esprimiamo ora n_φ e $\varkappa_\varphi$ in funzione delle costanti ottiche del metallo n, $\varkappa$ e dell'angolo d'incidenza φ. Sostituendo le espressioni (72.3) e (72.4) nelle (71.12), otteniamo

$$n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2 = \varepsilon', \quad 2n_\varphi\varkappa_\varphi\cos\chi = \varepsilon''. \tag{72.6}$$

Confrontando con la (71.8), troviamo

$$n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2 = n^2 - \varkappa^2, \quad n_\varphi\varkappa_\varphi\cos\chi = n\varkappa. \tag{72.7}$$

Ketteler (1839-1900), che per primo stabilì queste relazioni, le chiamò *equazioni principali della propagazione delle onde luminose nei metalli e nei mezzi assorbenti.* Queste relazioni mostrano che le quantità

$$a \equiv n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2, \quad b \equiv 2n_\varphi\varkappa_\varphi\cos\chi \tag{72.8}$$

non dipendono dall'angolo d'incidenza φ, ma dipendono solo dalla natura del metallo, dal suo stato fisico e dalla lunghezza d'onda. Le quantità a e b si chiamano *invarianti di Ketteler* e possono servire a caratterizzare le proprietà ottiche di un metallo, al posto di n e $\varkappa$.

Se $\varphi = 0$, si ha $\chi = 0$ e le equazioni (72.7) danno $n_\varphi = \pm n$, $\varkappa_\varphi = \pm\varkappa$. Qui si deve prendere il segno più, poiché per definizione le quantità n_φ e $\varkappa_\varphi$ sono sostanzialmente positive. Dunque, per incidenza normale, gli indici di rifrazione e d'estinzione n_φ e $\varkappa_\varphi$ assumono come loro valori principali n e $\varkappa$.

Per trovare n_φ e $\varkappa_\varphi$ in funzione dell'angolo d'incidenza φ riscriviamo la seconda equazione (72.2) nella forma

$$n_\varphi^2\varkappa_\varphi^2\cos^2\chi = n_\varphi^2\varkappa_\varphi^2(1 - \sin^2\chi) = n_\varphi^2\varkappa_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2\sin^2\varphi = \frac{1}{4}b^2.$$

Risolvendola insieme con la prima equazione (72.7), otteniamo

$$n_\varphi^2 = \frac{1}{2}\,[\pm\sqrt{(a - \sin^2\varphi)^2 + b^2} + (a + \sin^2\varphi)],$$
$$\varkappa_\varphi^2 = \frac{1}{2}\,[\pm\sqrt{(a - \sin^2\varphi)^2 + b^2} - (a - \sin^2\varphi)]. \tag{72.9}$$

I segni davanti ai radicali debbono essere gli stessi in entrambe le formule, affinché la differenza $n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2$ sia uguale ad a. Inoltre, n_φ e $\varkappa_\varphi$ debbono essere funzioni continue dell'angolo φ. Per i mezzi realmente assorbenti l'invariante b non è uguale a zero, conformemente all'espressione $b = 2n\varkappa = \varepsilon''$. Perciò la radice quadrata che figura nelle formule (72.9) non può né annullarsi, né cambiare di segno durante la variazione dell'angolo φ. Ma per $\varphi = 0$ le quantità n_φ^2 e $\varkappa_\varphi^2$ possono essere sostanzialmente positive se e solo se entrambi i radicali della (72.9) sono presi con il segno positivo. Quindi, il segno più deve essere conservato per tutti i valori dell'angolo φ. Dunque, per i mezzi veramente assorbenti si ha

$$n_\varphi^2 = \frac{1}{2}\,[\sqrt{(a - \sin^2\varphi)^2 + b^2} + (a + \sin^2\varphi)],$$
$$\varkappa_\varphi^2 = \frac{1}{2}\,[\sqrt{(a - \sin^2\varphi)^2 + b^2} - (a - \sin^2\varphi)]. \tag{72.10}$$

In particolare, per $\varphi = 0$ si ha

$$n^2 = \frac{1}{2}\,(\sqrt{a^2 + b^2} + a), \quad \varkappa^2 = \frac{1}{2}\,(\sqrt{a^2 + b^2} - a). \tag{72.11}$$

Casi particolari possono aver luogo solo per $b \equiv 2n\varkappa = 0$, cioè o per $n = 0, \varkappa \neq 0$, o per $n \neq 0, \varkappa = 0$. In entrambi i casi la permettività dielettrica è reale, cioè il mezzo non è assorbente. Ma le grandezze n_φ e $\varkappa_\varphi$ conservano il loro significato anche in questi casi. Per esempio, la teoria della riflessione totale sulla superficie di separazione dei mezzi trasparenti (si veda il § 66) può essere rappresentata come un caso particolare della teoria esposta in questo paragrafo.

§ 73. *Formule di Fresnel. Misura delle costanti ottiche dei metalli*

1. Le formule di Fresnel (65.7) o (65.8) sono applicabili anche ai metalli a condizione d'intendere per $\sin\psi$ e $\cos\psi$ le quantità complesse

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\nu}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\nu}\sqrt{\nu^2 - \sin^2\varphi}. \tag{73.1}$$

Qui si deve prendere il valore della radice quadrata che possiede una parte immaginaria negativa, poiché solo in questo caso l'onda non omogenea, penetrata nel mezzo assorbente, si smorzerà allontanandosi dalla superficie di separazione dei mezzi.

Per un'incidenza normale

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = -\frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = -\frac{\nu - 1}{\nu + 1} = -\frac{(n - 1) - i\varkappa}{(n + 1) - i\varkappa}. \tag{73.2}$$

Il potere riflettente del metallo è

$$R = \left|\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp}\right|^2 = \frac{(n - 1)^2 + \varkappa^2}{(n + 1)^2 + \varkappa^2}. \tag{73.3}$$

2. Nel caso di una riflessione da un metallo, entrambi i rapporti $R_\perp / \mathscr{E}_\perp$ e $R_\parallel / \mathscr{E}_\parallel$ sono generalmente complessi, cioè compaiono *differenze di fase* che sono di regola *differenti* per le componenti $\mathbf{E}_\parallel$ ed $\mathbf{E}_\perp$. *Se la luce incidente è linearmente polarizzata sotto un certo angolo rispetto al piano*
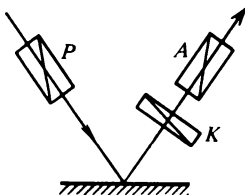
Fig. 256

d'incidenza, la luce riflessa sarà polarizzata ellitticamente. Esaminando la polarizzazione ellittica della luce riflessa, si possono determinare le costanti ottiche n e $\varkappa$ di un metallo. Questa è la base del *metodo di Drude* esposto qui sotto.

Dopo aver attraversato un polarizzatore P (fig. 256), un raggio luminoso sia polarizzato linearmente. Per semplificare i calcoli, poniamo che l'azimut della polarizzazione sia uguale a 45° ($\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E}_\parallel$). La generalizzazione dei risultati per un azimut qualsiasi non presenta alcuna difficoltà. Il raggio riflesso attraversa prima il compensatore K e poi l'analizzatore A. Modificando la posizione del compensatore e ruotando l'analizzatore attorno alla direzione del raggio riflesso, si può ottenere l'estinzione del raggio riflesso. In questo caso, dopo aver attraversato il compensatore, la luce diventa linearmente polarizzata. L'azimut della sua polarizzazione si dice *azimut di polarizzazione lineare ristabilita* della luce riflessa. Il compensatore K permette di misurare la differenza di fase Δ tra $\mathbf{E}_\parallel$ ed $\mathbf{E}_\perp$ dell'onda riflessa, e per mezzo dell'analizzatore A si può misurare l'azimut β della

sua polarizzazione lineare ristabilita. Disponendo di questi dati, si possono calcolare le costanti ottiche n e $\varkappa$ del metallo.

Infatti, dalle formule di Fresnel (65.8) per $\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E}_\parallel$, otteniamo

$$\frac{R_\parallel}{R_\perp} = -\frac{\cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi)} .$$

È evidente che

$$\frac{R_\parallel}{R_\perp} = re^{i\Delta}, \quad r = \mathrm{tg}\,\beta .$$

Di qui

$$\frac{1 - re^{i\Delta}}{1 + re^{i\Delta}} = \frac{\cos\varphi\cos\psi}{\sin\varphi\sin\psi} = \frac{\sqrt{\nu^2 - \sin^2\varphi}}{\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi} .$$

D'altra parte

$$\nu^2 - \sin^2\varphi = (n - i\varkappa)^2 - \sin^2\varphi = n^2 - \varkappa^2 - 2in\varkappa - \sin^2\varphi .$$

In base alle (72.7) e (72.2) si ha

$$\nu^2 - \sin^2\varphi = n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2 - 2in_\varphi\varkappa_\varphi\cos\chi - n_\varphi^2\sin^2\chi = (n_\varphi\cos\chi - i\varkappa_\varphi)^2 .$$

Quindi, si ha

$$\nu\cos\psi = \sqrt{\nu^2 - \sin^2\varphi} = n_\varphi\cos\chi - i\varkappa_\varphi ,$$

$$\frac{1 - re^{i\Delta}}{1 + re^{i\Delta}} = \frac{n_\varphi\cos\chi - i\varkappa_\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi} .$$

Moltiplicando il numeratore ed il denominatore del primo membro per $1 + re^{-i\Delta}$, otteniamo

$$\frac{1 - r^2 - 2ir\sin\Delta}{1 + r^2 + 2r\cos\Delta} = \frac{n_\varphi\cos\chi - i\varkappa_\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi} ,$$

e separando le parti reale ed immaginaria ed utilizzando la relazione $r = \mathrm{tg}\,\beta$, si ottiene

$$n_\varphi\cos\chi = \mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi\,\frac{1 - \mathrm{tg}^2\beta}{1 + \mathrm{tg}^2\beta + 2\,\mathrm{tg}\,\beta + \cos\Delta} ,$$

$$\varkappa_\varphi = 2\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi\,\frac{\mathrm{tg}\,\beta\sin\Delta}{1 + \mathrm{tg}^2\beta + 2\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\Delta} ,$$

o

$$n_\varphi \cos\chi = \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi \frac{\cos 2\beta}{1 + \sin 2\beta \cos\Delta},$$

$$\varkappa_\varphi = \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi \frac{\sin 2\beta \sin\Delta}{1 + \sin 2\beta \cos\Delta}. \tag{73.5}$$

Queste formule permettono di calcolare $n_\varphi \cos\chi$ e $\varkappa_\varphi$. Fatto ciò, è facile calcolare gli invarianti di Ketteler mediante le formule

$$a = n_\varphi^2 - \varkappa_\varphi^2 = n_\varphi^2 \cos^2\chi + \sin^2\varphi - \varkappa_\varphi^2,$$

$$b = n_\varphi \varkappa_\varphi \cos\chi. \tag{73.6}$$

Finalmente, per mezzo delle formule (72.11) e degli invarianti di Ketteler si possono calcolare gli indici principali di rifrazione e di estinzione n e $\varkappa$.

Per semplificare i calcoli si possono effettuare le misure sotto un angolo d'incidenza $\bar{\varphi}$ tale che $\Delta = \pi/2$. Quest'angolo si dice *angolo d'incidenza principale* ed il corrispondente azimut β si chiama *azimut principale*. Per $\varphi = \bar{\varphi}$ le formule (73.5) assumono la forma

$$n_{\bar{\varphi}} \cos\bar{\chi} = \operatorname{tg}\bar{\varphi} \sin\bar{\varphi} \cos 2\bar{\beta}, \quad \varkappa_{\bar{\varphi}} = \operatorname{tg}\bar{\varphi} \sin\bar{\varphi} \sin 2\bar{\beta}. \tag{73.7}$$

La principale difficoltà nella determinazione sperimentale di n e $\varkappa$ è la preparazione delle superfici metalliche. I trattamenti delle superfici metalliche riflettenti provocano la formazione di *strati di transizione* ; le proprietà di questi strati dipendono dal metodo di trattamento. Se lo spessore di questi strati è dello stesso ordine di grandezza della profondità di penetrazione della luce nel metallo, le misure ottiche forniscono le costanti ottiche dello strato di transizione sulla sua superficie e non del metallo stesso. Per fissare le idee, nella tavola 7 sono riportati i valori di n e $\varkappa$ di alcuni metalli ottenuti per mezzo del metodo di Drude (λ = 589,3 nm). Il potere riflettente R è calcolato con la formula (73.3).

3. Scriviamo la formula (73.3) nella forma

$$R = \frac{(n^2 + \varkappa^2 + 1) - 2n}{(n^2 + \varkappa^2 + 1) + 2n}. \tag{73.8}$$

Come si vede dalla tavola 7, $2n$ è, per quasi tutti i metalli, piccolo rispetto a $n^2 + \varkappa^2 + 1$. Grazie a questo fatto il potere riflettente dei metalli è *molto grande*: per molti metalli esso è vicino all'unità. La « lucentezza metallica » propria dei metalli, è dovuta al loro grande potere riflettente. Visto che $\varkappa$ e n variano con la lunghezza d'onda, alcuni metalli, ed in particolare il rame e l'oro, sono intensamente colorati. Il metallo ci pare, per esempio rosso, se esso riflette più intensamente le radiazioni rosse. Si può quindi dire che

la colorazione superficiale del metallo è complementare di quella della luce trasmessa attraverso le pellicole metalliche sottili. Per esempio, le pellicole d'oro molto sottili sembrano verdi in luce trasmessa.

Il potere riflettente dei corpi debolmente assorbenti è quasi esclusivamente determinato dall'indice di rifrazione principale n e non dipende praticamente da $\varkappa$. Questo è il caso delle sostanze coloranti. In questo caso la colorazione superificiale dei corpi è dovuta non ad una riflessione selettiva, ma ad un *assorbimento selettivo* in uno strato di sostanza colorante. Perciò la colorazione dei corpi pare la stessa sia in luce riflessa che trasmessa. Gli

Tavola 7

Metallo	$\varkappa$	n	R, %
Sodio	2,61	0,05	97,5
Argento massiccio	3,64	0,18	95,1
Magnesio massiccio	4,42	0,37	93,1
Oro massiccio	2,82	0,37	84,9
Oro elettrolitico	2,83	0,47	81,5
Mercurio	4,41	1,62	75,4
Rame massiccio	2,62	0,64	73,2
Nichel massiccio	3,32	1,79	62,0
Nichel elettrolitico	3,48	2,01	62,0
Nichel disperso per elettrolisi	1,97	1,30	43,3
Ferro disperso per elettrolisi	1,63	1,51	32,6

strati di vernice a lacca non hanno eterogeneità che li renderebbero torbidi. Attraverso questi strati si vedono i dettagli della superficie sottostante del corpo. La luce inviata da una sorgente cade sulla superficie del corpo verniciato e si diffonde su essa. Dunque, sul tragitto verso l'occhio la luce attraversa due volte lo strato assorbente di tinta subendo un assorbimento selettivo. La luce riflessa dalla superficie anteriore della vernice può produrre una debole sfumatura biancastra. Se la superficie dello strato di vernice è liscia, questa sfumatura biancastra è praticamente limitata alla regione della riflessione speculare. Le tinte a colla sono artificialmente rese torbide per introduzione di diverse eterogeneità. La luce che cade su uno strato di colore a colla è diffusa da queste eterogeneità, non raggiungendo la superficie del corpo. Dunque, una porzione importante della luce è diffusa dallo strato superiore di colore senza subire un assorbimento selettivo. Grazie a ciò appare una sfumatura biancastra visibile.

La differenza tra le colorazioni superficiali dei mezzi fortemente e debolmente assorbenti si può anche illustrare con il seguente esempio. Ricopriamo la superficie di una lamina di vetro trasparente con uno strato d'inchiostro violetto. Finché l'inchiostro non è secco, esso è un « mezzo debol-

mente assorbente » ed appare violetto sia in luce riflessa sia in quella trasmessa: la colorazione è dovuta all'assorbimento selettivo della luce che attraversa lo strato d'inchiostro ed è sottoposta alla diffusione in questo strato. Quando l'inchiostro diventa secco, esso si trasforma in un « mezzo fortemente assorbente »; in luce trasmessa esso pare violetto come prima: la colorazione è dovuta all'assorbimento selettivo, mentre in luce riflessa lo strato d'inchiostro secco acquista una lucentezza giallastro-verde, colore complementare di quello in luce trasmessa, dovuta alla riflessione selettiva.

La dipendenza delle proprietà ottiche di molti metalli dalla lunghezza d'onda è molto forte. Per esempio, l'argento, che presenta nello spettro visibile un grande coefficiente di riflessione (all'incirca il 95%), ha nell'ultravioletto una banda di debole riflessione e di grande trasparenza: per $\lambda = 316$ nm il potere riflettente dell'argento decresce fino al 4,2%, cioè diventa comparabile a quello del vetro. Wood mostrò che le pellicole sottili dei metalli alcalini sono trasparenti nell'ultravioletto, ma assolutamente opache per le radiazioni visibili, e riuscì persino a determinare l'angolo di Brewster per riflessione di raggi ultravioletti su questi metalli.

Per molti corpi assorbenti il potere riflettente presenta un massimo acuto in una regione di spettro che a volte è molto stretta. Per mezzo di numerose riflessioni su questi corpi, si possono ottenere raggi con un alto grado di monocromaticità; questi raggi si dicono *raggi residui*. Questo metodo venne applicato da Rubens (1865-1922) e collaboratori per separare radiazioni infrarosse.

4. Per concludere, esaminiamo ancora la questione del potere riflettente dei metalli per le onde lunghe (onde radio, raggi infrarossi). In questa gamma di frequenze la conducibilità σ non dipende praticamente dalla frequenza ω ed è uguale al suo valore statico σ_0. Secondo la formula (71.4), la parte immaginaria ε'' della permettività dielettrica cresce con il decrescere della frequenza. Per le onde lunghe la parte reale ε' può essere trascurata, ponendo

$$\varepsilon(\omega) = -i\,\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}\,. \tag{73.9}$$

Dalle relazioni (71.8) si ottiene allora

$$n = \varkappa = \sqrt{\frac{\varepsilon''}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}} = \sqrt{\sigma_0 T} = \sqrt{\frac{\lambda\sigma_0}{c}}\,, \tag{73.10}$$

dove T è il periodo delle vibrazioni e λ la lunghezza d'onda nel vuoto.

Le relazioni (73.10) sono state per la prima volta stabilite da Drude. Esse non sono valide per lo spettro visibile. Così, per il rame $\sigma_0 = 5{,}14 \times 10^{17}\ \text{s}^{-1}$; ponendo $\lambda = 589{,}3\ \text{nm} = 5{,}893 \cdot 10^{-5}$ cm, troviamo dalle formule (73.10) $n = \varkappa \approx 33$, mentre l'esperienza dà $n = 0{,}64$, $\varkappa = 2{,}62$. Le relazioni (73.10) si possono utilizzare soltanto per le onde lunghe. In questo

caso la (73.8) diventa

$$R = \frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 2n + 1} \approx 1 - \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \dots\right),$$

o

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma_0 T}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma_0 T}} + \dots\right). \tag{73.11}$$

Questa formula fu verificata sperimentalmente da Hagen e Rubens per i raggi infrarossi ($\lambda = 4; 8; 12; 25{,}5\ \mu$m). Essi costatarono che per $\lambda > 5\ \mu$m la formula (73.11) cominciava ad essere verificata quantitativamente. Per le onde radio la quantità $1/\sqrt{\sigma_0 T}$ è molto vicina a zero, mentre il potere riflettente è vicino all'unità, il che significa che i metalli riflettono le onde radio quasi totalmente.

Problema

Dire in quali condizioni si può aspettare una riflessione totale della luce da un mezzo.

Soluzione. Se la luce è polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza, la condizione di riflessione totale è

$$\left|\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp}\right|^2 = \frac{\cos\varphi - \nu\cos\psi}{\cos\varphi + \nu\cos\psi}\cdot\frac{\cos\varphi - \nu^*\cos^*\psi}{\cos\varphi + \nu^*\cos^*\psi} = 1,$$

dove $\cos\varphi\,(\nu\cos\varphi + \nu^*\cos^*\psi) = 0$. Per mezzo della formula (73.4) questa condizione può essere espressa nella forma

$$n_\varphi \cos\varphi \cos\chi = 0. \tag{73.12}$$

La stessa condizione si ottiene anche per una luce polarizzata nel piano d'incidenza. La riflessione totale può aver luogo in uno dei tre seguenti casi: 1) $\cos\varphi = 0$; 2) $n_\varphi = 0$; 3) $\cos\chi = 0$. Il primo caso corrisponde ad una incidenza radente. Nel secondo caso $n_\varphi = 0$, e quindi, in virtù della (72.7), si ha $n\varkappa = 0$. Nel terzo caso $\cos\chi = 0$ e quindi anche $n\varkappa$ è uguale a zero. Dunque, se $\varphi \neq \pi/2$, per la riflessione totale è necessario che $n\varkappa = 0$. Questa condizione può essere realizzata in due casi: 1) $n = 0, \varkappa \neq 0$; 2) $n \neq 0, \varkappa = 0$.

Caso 1. $n = 0, \varkappa \neq 0$. La riflessione sarà totale per un angolo d'incidenza qualsiasi. Infatti, in questo caso $\nu = n - i\varkappa = -i\varkappa$, e le formule di Fresnel assumono la forma

$$\frac{R_\perp}{\mathscr{E}_\perp} = \frac{\cos\varphi + i\varkappa\cos\psi}{\cos\varphi - i\varkappa\cos\psi}, \quad \frac{R_\parallel}{\mathscr{E}_\parallel} = -\frac{i\varkappa\cos\varphi + \cos\psi}{-i\varkappa\cos\varphi + \cos\psi}.$$

Visto che

$$\cos\psi = \sqrt{1 - \sin^2\psi} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\nu^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sin\varphi}{\varkappa}\right)^2},$$

ne segue che $\cos\psi$ è una quantità sempre reale. Nei denominatori delle formule di Fresnel compaiono quantità complesse coniugate di quelle presenti nei numeratori. Ne risulta che $|R_\perp/\mathscr{E}_\perp|^2 = |R_\parallel/\mathscr{E}_\parallel|^2 = 1$. Nel caso considerato $\varepsilon = \nu^2 = -\varkappa^2 < 0$, cioè il mezzo non è

assorbente e presenta una permettività dielettrica negativa. Questo caso si realizza nella riflessione delle onde radio sul plasma (si veda il § 87).

Caso 2. $n \neq 0, \varkappa = 0$. In questo caso si ha $\nu = n$, $\varepsilon = n^2 > 0$, il che significa che il mezzo è trasparente. La riflessione totale avrà luogo per $n < 1$ purché φ sia superiore all'angolo limite $\varphi_0 = \arcsin n$ (si veda il § 66).

§ 74. *Effetto skin anomalo e permettività dielettrica efficace*

1. La penetrazione di un'onda elettromagnetica in uno strato superficiale sottile di un metallo è un caso particolare dell'*effetto skin* che abbiamo esaminato al vol. III, § 144. Lo strato stesso nel quale penetra il campo elettromagnetico viene chiamato *strato skin*. Lo spessore dello strato skin è dato dalla formula (72.5), dedotta dalle equazioni macroscopiche di Maxwell (71.5). Dalle stesse equazioni segue che l'intensità di campo nello strato skin diminuisce in modo *esponenziale*. Tale strato skin si dice *normale*.

Perché le equazioni macroscopiche di Maxwell siano applicabili, è necessario che *le distanze interatomiche siano piccole rispetto non solo alla lunghezza d'onda, ma anche rispetto allo spessore di strato skin*. Questa condizione può essere considerata verificata per tutti i metalli. Risulta più difficile fissare le condizioni di validità della nozione di costante dielettrica $\varepsilon(\omega)$ definita al § 71. Là abbiamo tenuto conto del fatto che gli elettroni e gli ioni, il cui moto crea le correnti di conducibilità e di polarizzazione, si muovono in un campo variabile nel tempo, ma non è stata tenuta presente la sua *variazione nello spazio*. Ciò è possibile solo quando *la lunghezza del cammino libero medio degli elettroni è piccola rispetto alle distanze sulle quali varia notevolmente l'intensità del campo elettrico, cioè rispetto alla lunghezza d'onda ed allo spessore di strato skin*. Solo in questo caso l'elettrone si muove, tra due collisioni consecutive, in un campo praticamente uniforme. Se, invece, la lunghezza del cammino libero medio dell'elettrone è dell'ordine o superiore allo spessore di strato skin o alla lunghezza d'onda, i risultati del § 74 debbono essere rivisti, poiché la nozione di costante dielettrica $\varepsilon(\omega)$ non ha allora senso. L'intensità di campo e quella di corrente decrescono allora verso l'interno del metallo *non secondo una legge esponenziale*, ma secondo una legge più complicata. Il corrispondente effetto skin è detto *anomalo*.

Se utilizziamo i valori di $\varkappa$ riportati nella tavola 7, è facile convincersi che la quantità $h = \lambda/(4\pi\varkappa)$ per la luce visibile è dell'ordine di 10^{-6} cm per tutti i metalli menzionati in questa tavola. Dello stesso ordine di grandezza è anche la lunghezza del cammino libero medio degli elettroni a temperatura ambiente. Ciò dimostra il carattere anomalo dell'effetto skin. Solo per i metalli di debole conducibilità, nei quali la lunghezza del cammino libero medio è più piccola, l'effetto skin a temperatura ambiente è normale. Invece, a basse temperature quando la lunghezza del cammino libero medio

raggiunge, per campioni molto puri, valori di 10^{-2}-10^{-3} cm, non si può parlare dell'utilizzazione della teoria dell'effetto skin normale basata sulla nozione di costante dielettrica. Visto che il carattere dell'effetto skin dipende dal rapporto tra la lunghezza del cammino libero medio degli elettroni e lo spessore di strato skin, la teoria esauriente dell'effetto skin anomalo deve fondarsi sulla forma quantica della *cinetica degli elettroni.*

2. Ma, indipendentemente dal fatto se l'effetto skin sia normale o anomalo, la riflessione della luce è una conseguenza dell'emissione di onde elettromagnetiche da parte delle correnti circolanti in uno strato superficiale di metallo eccitate dall'onda incidente. Il meccanismo della riflessione su superfici metalliche è del tutto analogo al corrispondente meccanismo per i dielettrici esaminato nei §§ 68 e 69. Se l'effetto skin è normale, la densità di corrente totale decresce con la profondità secondo una legge esponenziale, mentre nel caso dell'effetto skin anomalo la legge è diversa. Ma se lo spessore di strato skin è molto più piccolo della lunghezza d'onda, la forma concreta della legge di variazione della densità di corrente nello strato superficiale può soltanto esercitare una debole influenza sulla riflessione della luce, poiché in questo caso le fasi delle sorgenti di onde secondarie, ripartite nello strato superficiale, sono praticamente le stesse su tutto il suo spessore. Perciò nel calcolo del campo dell'onda riflessa, la distribuzione reale di corrente totale nello strato skin può essere sostituita da una distribuzione la cui densità di corrente decresce in modo esponenziale. Questo equivale a sostituire ε con una *permettività dielettrica efficace* ε_{eff} *del metallo.*

Utilizzando ε_{eff} si può calcolare il campo dell'onda riflessa come se l'effetto skin fosse normale ed il metallo avesse una costante dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_{eff}$. Ma, se l'effetto skin è anomalo, non si può utilizzare ε_{eff} per calcolare il campo all'interno del metallo: il termine « efficace » deve essere inteso solo come *efficace per la riflessione*. La permettività dielettrica efficace può essere evidentemente introdotta anche nel caso di strati skin più spessi, ma in questo caso essa dipende generalmente dallo stato di polarizzazione dell'onda incidente e dall'angolo d'incidenza. Per poter realizzare il calcolo teorico di ε_{eff} si dovrebbe risolvere il problema della riflessione della luce mediante i metodi cinetici e statistici, il che è fuori dai limiti di questo manuale.

§ 75. *Propagazione di un'onda piana nei cristalli*

1. I cristalli sono nella maggior parte *otticamente anisotropi*, cioè le loro proprietà ottiche variano con la direzione. Una delle più importanti manifestazioni di questa anisotropia è la *birifrangenza*. Lo studio di questo fenomeno e della polarizzazione della luce ad esso legata costituisce l'oggetto principale di questo capitolo.

Le equazioni fondamentali di Maxwell sono valide senza alcuna modifica anche nei mezzi cristallini. In assenza di cariche e correnti elettriche esse sono della forma

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\,\dot{\boldsymbol{D}}, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\,\dot{\boldsymbol{H}}. \tag{75.1}$$

Ma le equazioni materiali diventano più complicate. I mezzi isotropi sono caratterizzati da una permettività dielettrica scalare $\varepsilon(\omega)$. Per caratterizzare le proprietà ottiche dei cristalli si devono utilizzare nove grandezze $\varepsilon_{jk}(\omega)$ che formano *il tensore permettività dielettrica* o *tensore dielettrico*. Esso è definito dalle relazioni

$$D_j = \sum_k \varepsilon_{jk} E_k \quad (j, k = x, y, z). \tag{75.2}$$

Come si può dimostrare a partire dalla legge di conservazione dell'energia, per i cristalli trasparenti il tensore dielettrico è *simmetrico*, cioè $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ (si veda il § 80). S'intende che in diversi sistemi di coordinate le componenti di questo tensore hanno diversi valori. Nel passare da un sistema di coordinate ad un altro queste componenti si trasformano come le componenti di ogni tensore. Grazie ad una relazione tensoriale tra $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$, le direzioni di questi vettori nei cristalli generalmente non coincidono.

2. Se i mezzi sono trasparenti ed omogenei, in essi possono propagarsi le onde monocromatiche piane. Ciascuna di queste onde può essere rappresentata nella forma

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}. \tag{75.3}$$

Consideriamo dapprima le proprietà di queste onde, che discendono dalle sole equazioni fondamentali (75.1) senza far appello alle equazioni materiali (75.2). Come nel caso dei mezzi isotropi, si ha

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -i[\boldsymbol{kH}], \quad \dot{\boldsymbol{D}} = -i\omega \boldsymbol{D}, \ldots \tag{75.4}$$

Sostituendo queste equazioni nella (75.1) ed introducendo il vettore unitario della normale d'onda $\boldsymbol{N}$, conformemente alla formula $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{v}\boldsymbol{N}$, otteniamo

$$\boldsymbol{D} = -\frac{c}{v}[\boldsymbol{NH}], \quad \boldsymbol{H} = \frac{c}{v}[\boldsymbol{NE}], \tag{75.5}$$

dove v è la velocità normale dell'onda, cioè la velocità di fase con la quale si propaga il fronte d'onda nella direzione della normale d'onda $\boldsymbol{N}$. Aggiungiamo a queste formule anche l'espressione del vettore di Poynting

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]. \tag{75.6}$$

L'importanza fondamentale di questo vettore nell'ottica dei mezzi cristallini consiste nel fatto che esso definisce la *direzione dei raggi luminosi*, cioè delle linee lungo le quali si propaga l'energia luminosa. Per convincersene, è sufficiente dimostrare che la direzione di $\boldsymbol{S}$ coincide con quella del vettore velocità di gruppo $\boldsymbol{u} = d\omega/d\boldsymbol{k}$ (si veda il § 8). Lo dimostreremo nel § 81. *Nei cristalli le direzioni dei vettori* $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{N}$ *sono generalmente diverse*. Proprio a questo fatto è dovuta la birifrangenza e la rifrazione conica.
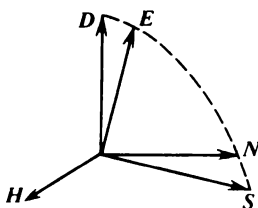
Fig. 257

Dalle formule (75.5) è evidente che i *vettori* $\boldsymbol{D}$ *e* $\boldsymbol{H}$ *sono reciprocamente perpendicolari*. Inoltre questi vettori, *essendo perpendicolari alla normale d'onda* $\boldsymbol{N}$, sono paralleli al fronte d'onda. Quindi, *le onde piane che si propagano in un cristallo sono trasversali rispetto ai vettori* $\boldsymbol{D}$ *e* $\boldsymbol{H}$. *Ma nel caso generale esse non sono trasversali rispetto al vettore* $\boldsymbol{E}$. *I quattro vettori* $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$ *sono situati in uno stesso piano perpendicolare al vettore* $\boldsymbol{H}$. La figura 257 illustra le posizioni reciproche di questi vettori. Si constata che,

per assegnazione nel cristallo della direzione del vettore $\boldsymbol{E}$ (o $\boldsymbol{D}$), *viene univocamente definita la direzione del vettore* $\boldsymbol{D}$ (o $\boldsymbol{E}$) *e, a meno di 180°, le direzioni di tutti gli altri vettori* $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$. *Viene determinato anche il valore della velocità normale* v dell'onda. Infatti, se è data la direzione del vettore $\boldsymbol{E}$, l'equazione (75.2) definisce in modo univoco la direzione del vettore $\boldsymbol{D}$ e con essa anche il piano $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D})$ al quale è perpendicolare il vettore $\boldsymbol{H}$. Con ciò è determinata, a meno di 180°, la direzione di $\boldsymbol{H}$ e di conseguenza anche le direzioni dei vettori $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{S}$. Se le direzioni dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{D}$ coincidono, ogni retta perpendicolare al vettore $\boldsymbol{E}$ può definire la direzione del campo magnetico. Gli stessi ragionamenti valgono nel caso in cui sia fissata la direzione del vettore $\boldsymbol{D}$. Per determinare v è sufficiente eliminare il vettore $\boldsymbol{H}$ dalla (75.5)

$$\boldsymbol{D} = \frac{c^2}{v^2}\boldsymbol{E} - \frac{c^2}{v^2}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{E})\boldsymbol{N}. \tag{75.7}$$

Essendo $(\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}) = 0$, il prodotto scalare per $\boldsymbol{D}$ ci dà

$$v^2 = c^2\frac{(\boldsymbol{D}\boldsymbol{E})}{D^2}. \tag{75.8}$$

Dunque, il vettore elettrico ($\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{D}$) in un cristallo è il vettore *principale*. Questo è naturale, poiché appunto questo vettore determina la polarizzazione elettrica del mezzo, e l'eccitazione di quest'ultimo costituisce l'essenza del processo di propagazione delle onde elettriche nei mezzi materiali.

§ 76. *Cristalli otticamente uniassici*

1. Le più semplici proprietà ottiche sono proprie dei *cristalli otticamente uniassici*, i quali hanno anche la più grande importanza pratica. Perciò è importante studiare in modo particolare questo caso semplice. Sono detti cristalli otticamente uniassici quei cristalli le cui proprietà possiedono una simmetria di rotazione rispetto ad una certa direzione detta *asse ottico del cristallo*.

Scomponiamo i vettori elettrici $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{D}$ nelle loro componenti $\boldsymbol{E}_\parallel$, $\boldsymbol{D}_\parallel$ lungo l'asse ottico ed in quelle $\boldsymbol{E}_\perp$, $\boldsymbol{D}_\perp$ perpendicolari a quest'asse. Si ha allora

$$\boldsymbol{D}_\parallel = \varepsilon_\parallel \boldsymbol{E}_\parallel, \quad \boldsymbol{D}_\perp = \varepsilon_\perp \boldsymbol{E}_\perp, \tag{76.1}$$

dove $\varepsilon_\parallel$ e $\varepsilon_\perp$ sono costanti dette *permettività dielettriche longitudinale e trasversale del cristallo*. Solo queste due grandezze definiscono il tensore dielettrico di un cristallo uniassico. Sono cristalli otticamente uniassici tutti i cristalli dei sistemi tetragonale, esagonale e romboedrico. I cristalli del sistema cubico sono un caso di degenerazione di questi tre sistemi e per essi

$\varepsilon_\parallel = \varepsilon_\perp$. Perciò *i cristalli cubici si comportano come corpi otticamente isotropi.* Il piano contenente l'asse ottico del cristallo e la normale N al fronte d'onda si dice *sezione principale del cristallo*. La sezione principale non è un piano definito, ma un'intera famiglia di piani paralleli.

Consideriamo ora due casi particolari.

Primo caso. Il vettore $\boldsymbol{D}$ è perpendicolare alla sezione principale del cristallo. In questo caso si ha $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}_\perp$, e perciò $\boldsymbol{D} = \varepsilon_\perp \boldsymbol{E}$. Il cristallo si comporta come un mezzo isotropo a costante dielettrica $\varepsilon_\perp$. Per questo mezzo

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_\perp \boldsymbol{E}, \tag{76.2}$$

e dalle equazioni (75.5) si ottiene

$$\boldsymbol{D} = \frac{c}{v}\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{c}{v}\boldsymbol{E} \tag{76.3}$$

o

$$\varepsilon_\perp \boldsymbol{E} = \frac{c}{v}\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{c}{v}\boldsymbol{E} \tag{76.4}$$

da cui

$$v = v_\perp \equiv v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}. \tag{76.5}$$

Dunque, *se il vettore elettrico è perpendicolare alla sezione principale, la velocità dell'onda non dipende dalla direzione di propagazione*. Quest'onda (o vibrazione) si dice *ordinaria*.

Secondo caso. Il vettore $\boldsymbol{D}$ è situato nel piano della sezione principale.
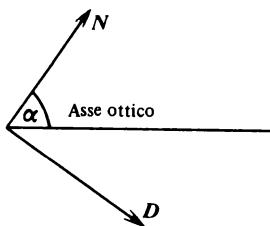
Fig. 258

Visto che anche il vettore $\boldsymbol{E}$ è situato nel piano della sezione principale (si veda la figura 257), si ha $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_N + \boldsymbol{E}_D$, dove $\boldsymbol{E}_N$ è la componente di questo vettore lungo $\boldsymbol{N}$ ed $\boldsymbol{E}_D$ la sua componente lungo $\boldsymbol{D}$. Dato che la componente $\boldsymbol{E}_N$ non figura nel prodotto vettoriale $[\boldsymbol{NE}]$ la seconda equazione (75.5) si può scrivere come segue:

$$\boldsymbol{H} = \frac{c}{v}[\boldsymbol{NE}_D].$$

È evidente che

$$E_D = \frac{ED}{D} = \frac{E_\parallel D_\parallel + E_\perp D_\perp}{D} = \frac{(D_\parallel^2/\varepsilon_\parallel) + (D_\perp^2/\varepsilon_\perp)}{D},$$

o

$$E_D = D\left(\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp}\right) = D\left(\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}\right),$$

dove α è l'angolo tra l'asse ottico e la normale al fronte d'onda (fig. 258). Se introduciamo la notazione

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}, \tag{76.6}$$

si ottiene $D = \varepsilon E_D$, ed otteniamo le relazioni

$$\varepsilon E_D = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E_D, \tag{76.7}$$

formalmente identiche alle relazioni (76.4). Il ruolo di $\varepsilon_\perp$ viene assunto ora da ε, definita dalla (76.6). Perciò la velocità normale dell'onda è data dall'espressione

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c\sqrt{\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}} \equiv v_\parallel. \tag{76.8}$$

La velocità dipende dalla direzione della normale d'onda N. Per questa ragione l'onda il cui vettore elettrico è situato nel piano della sezione principale è detta *onda straordinaria. La dipendenza della sua velocità $v_\parallel$ dalla direzione di propagazione è dovuta al fatto che, con la variazione di direzione della normale d'onda N, varia l'angolo tra il vettore elettrico e l'asse ottico del cristallo*. Quando si ha $N_\perp = 0$, cioè l'onda straordinaria si propaga lungo l'asse ottico del cristallo, dalla formula (76.8) segue che $v = c/\sqrt{\varepsilon_\perp} = v_\perp \equiv v_0$. In questo caso come è evidente a priori, non c'è alcuna differenza tra le onde ordinaria e straordinaria. Se, invece, $N_\parallel = 0$, cioè l'onda straordinaria si propaga in una direzione perpendicolare all'asse ottico, la velocità dell'onda è uguale a

$$v = v_e \equiv c/\sqrt{\varepsilon_\parallel}. \tag{76.9}$$

Il termine « asse ottico » fu introdotto per indicare la retta lungo la quale entrambe le onde nel cristallo si propagano con le stesse velocità. Nel ca-

so generale esistono due assi ottici (si vedano i §§ 80 e 81). Perciò in questo caso il cristallo si dice *otticamente biassico*. Nel caso particolare da noi studiato gli assi ottici coincidono unendosi in una retta, e perciò il cristallo è detto *otticamente uniassico*.

2. Visto che le equazioni di Maxwell nei cristalli sono lineari ed omogenee, *nel caso generale, l'onda che penetra nel cristallo da un mezzo isotropo, si divide all'interno del cristallo in due onde linearmente polarizzate: un'onda ordinaria il cui vettore induzione elettrica è perpendicolare al piano della sezione principale, ed un'onda straordinaria il cui vettore induzione elettrica è contenuto nel piano della sezione principale*. Queste onde si propagano nei cristalli in diverse direzioni e con differenti velocità $v_\perp$ e $v_\parallel$. Nella direzione dell'asse ottico le velocità di entrambe le onde coincidono, cosicché in questa direzione può propagarsi un'onda di polarizzazione qualsiasi.

Ad entrambe le onde sono applicabili tutti i ragionamenti che abbiamo utilizzato nella deduzione delle leggi geometriche della riflessione e della rifrazione (si veda il § 64). Ma nei cristalli questi ragionamenti concernono le *normali d'onda e non i raggi luminosi*. Le normali d'onda dell'onda riflessa e di entrambe le onde rifratte appartengono al piano d'incidenza. Le loro direzioni verificano formalmente la legge di Snellius

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\perp} = n_\perp, \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\parallel} = n_\parallel, \tag{76.10}$$

dove $n_\perp$ e $n_\parallel$ sono gli *indici di rifrazione delle onde ordinaria e straordinaria*, cioè

$$n_\perp = \frac{c}{v_\perp} = n_o, \quad n_\parallel = \frac{c}{v_\parallel} = \left(\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}\right)^{-1/2}. \tag{76.11}$$

$n_\perp \equiv n_o$ non dipende dall'angolo d'incidenza, mentre $n_\parallel$ ne dipende. La costante n_o si dice *indice di rifrazione ordinario del cristallo*. Quando l'onda straordinaria si propaga nella direzione perpendicolare all'asse ottico ($N_\perp = 1, N_\parallel = 0$), si ha

$$n_\parallel = \sqrt{\varepsilon_\parallel} \equiv n_e. \tag{76.12}$$

La grandezza n_e è detta *indice di rifrazione straordinario del cristallo*. Non si deve confonderlo con l'indice di rifrazione $n_\parallel$ dell'onda straordinaria; n_e è una grandezza *costante*, mentre $n_\parallel$ è *funzione della direzione di propagazione dell'onda*. Entrambe le grandezze coincidono solo quando l'onda si propaga perpendicolarmente all'asse ottico.

3. È facile ora comprendere la causa del fenomeno della *birifrangenza*. Ammettiamo che un'onda piana cada su una lamina piana a facce parallele tagliata da un cristallo uniassico. Nella rifrazione sulla faccia anteriore del-

la lamina l'onda all'interno del cristallo si scinde in un'onda ordinaria ed in un'onda straordinaria. Queste onde sono polarizzate in *piani reciprocamente perpendicolari* e si propagano all'interno della lamina *in diverse direzioni e con differenti velocità. Le normali ai fronti di entrambe le onde sono contenute nel piano d'incidenza. Un raggio ordinario è anch'esso contenuto nel piano d'incidenza,* poiché la sua direzione coincide con quella della normale al fronte d'onda. *Ma il raggio straordinario è generalmente situato fuori del piano d'incidenza.* (Nel caso dei cristalli biassici la divisione in onde ordinaria e straordinaria perde ogni significato, dato che all'interno del cristallo entrambe le onde sono « straordinarie ». Nella rifrazione le normali di entrambe le onde sono evidentemente contenute nel piano d'incidenza, ma entrambi i raggi non appartengono in generale a questo piano.)
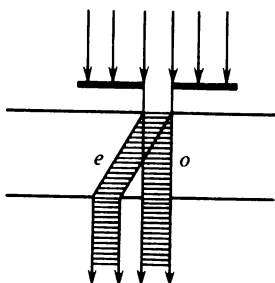
Fig. 259
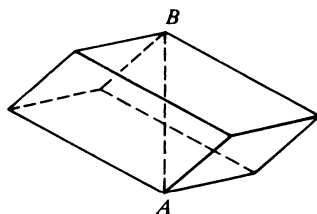
Fig. 260

Se l'onda incidente è limitata da un diaframma, nella lamina si osservano due fasci luminosi i quali risulteranno *separati spazialmente* se lo spessore della lamina cristallina è sufficiente. Nella rifrazione sulla faccia posteriore della lamina, da essa emergono *due fasci luminosi* paralleli al raggio incidente. Questi fasci sono linearmente polarizzati in piani reciprocamente perpendicolari. Se la luce incidente è naturale, emergono sempre due fasci. Se, invece, la luce incidente è linearmente polarizzata nel piano della sezione principale o perpendicolarmente ad esso, non si osserva alcuna birifrangenza: dalla lamina cristallina emerge *un solo fascio luminoso* con la stessa polarizzazione del raggio incidente.

La birifrangenza si manifesta anche nel caso di un'incidenza normale sulla lamina, ma in questo caso è rifratto il raggio straordinario, benché non siano rifratte né le normali d'onda, né i fronti d'onda. Questo avviene se si usa una lamina cristallina tagliata parallelamente all'asse ottico del cristallo (fig. 259). Un fascio cilindrico di raggi, limitato da un diaframma, cade normalmente sulla superficie della lamina. I fronti d'onda, disegnati in figura con linee orizzontali sottili, sono dappertutto paralleli alla stessa superficie. Il fascio di raggi ordinario *o* non è rifratto, mentre il fascio

straordinario e è deviato nella lamina, ma riprende la sua direzione quando riemerge in aria.

4. La birifrangenza fu scoperta nel 1669 da Erasmus Bartholin (1625-1698) nei cristalli di spato d'Islanda. Huygens interpretò questo fenomeno, supponendo che l'onda secondaria nel cristallo si scindesse in due onde: un'onda sferica (onda ordinaria) ed un'onda ellissoidale (onda straordinaria). Fu Huygens a scoprire la polarizzazione della luce nella birifrangenza.

Lo spato d'Islanda è una varietà di carbonato di calcio ($CaCO_3$). In natura esso si trova nella forma di cristalli otticamente puri e sufficientemente grandi. Il suo indice di rifrazione ordinario è $n_o = 1{,}6585$ e quello straordinario è $n_e = 1{,}4863$ (per la riga gialla). Grazie alla grande differenza tra n_o e n_e, la birifrangenza dello spato d'Islanda è visibile in modo molto netto. Finora i cristalli di spato d'Islanda sono i più adatti alla dimostrazione della birifrangenza e rappresentano il miglior materiale per la fabbricazione di prismi polarizzanti e di altri strumenti polarizzanti, benché siano noti molti cristalli naturali ed artificiali che presentano proprietà analoghe.

I cristalli di spato d'Islanda appartengono al sistema esagonale, ma s'incontrano sotto forme diverse. Per sfaldatura è facile rendere ogni cristallo a forma di romboedro, limitato da sei parallelogrammi simili di angoli 78°08′ e 101°52′ (fig. 260). Ai due vertici opposti A e B convergono gli spigoli che definiscono tre angoli ottusi, a due altri vertici convergono gli spigoli di un angolo ottuso e di due angoli acuti. La retta che passa per il punto A o B e che è ugualmente inclinata sugli spigoli convergenti in questi punti, nonché ogni retta ad essa parallela, è l'asse ottico del cristallo. Se il cristallo è lavorato in modo che tutti i suoi spigoli siano della stessa lunghezza, la linea AB rappresenterà l'asse ottico.

5. Per dimostrare la birifrangenza, si prende un romboedro in spato d'Islanda incastrato in una montatura rotante installata su un banco ottico. Il raggio luminoso deve passare perpendicolarmente a due facce opposte del romboedro. Davanti al condensatore di un proiettore, sullo stesso banco ottico, è installato un diaframma-iride. In assenza di spato d'Islanda, l'obiettivo a fuoco lungo del proiettore dà un'immagine dell'apertura del diaframma su uno schermo lontano. Quando tra il diaframma ed il condensatore è interposto il cristallo di spato d'Islanda, l'immagine si sdoppia. Diminuendo il diametro del diaframma, si può ottenere l'eliminazione della sovrapposizione tra le due immagini. Nell'illuminazione con luce naturale si ottengono immagini ugualmente brillanti. Se ruotiamo il cristallo di spato d'Islanda attorno all'asse ottico principale dell'installazione, e se tutte le regolazioni sono corrette, un'immagine resta fissa e l'altra si muove attorno alla prima lungo una circonferenza. Quando il cristallo di spato esegue una semirotazione, la seconda immagine fa una rotazione completa. Per mezzo di un polaroid, interposto dietro l'obiettivo, è facile constatare che entrambi i fasci luminosi sono linearmente polarizzati in piani reciprocamente perpendicolari. L'immagine fissa è formata dal rag-

gio ordinario e quella rotante dal raggio straordinario. Aumentando il diaframma, si può parzialmente sovrapporre un'immagine sull'altra. Ruotando il polaroid, le parti non sovrapposte delle immagini diventano periodicamente brillanti e scure: quando è massima l'illuminazione di una parte dell'immagine, l'illuminazione dell'altra parte s'annulla. L'illuminazione delle parti sovrapposte delle immagini resta sempre costante durante la rotazione del polaroid: queste parti sono illuminate da una luce non polarizzata.

Problemi

1. Se una lamina di spato d'Islanda è posta su una pagina stampata, le lettere si sdoppiano. Dire se avrà luogo lo sdoppiamento di immagine, se attraverso la stessa lamina viene osservato un oggetto lontano.

Risposta. No, l'immagine non sarà sdoppiata.

2. Gli indici di rifrazione di un cristallo si possono misurare per mezzo di un rifrattometro che funziona secondo il seguente principio. Una lamina del cristallo da esaminare viene messa sulla faccia piana di una semisfera di vetro avente indice di rifrazione N molto grande. La luce cade sulla parte semisferica lungo il suo raggio ed è riflessa dalla lamina. L'indice di rifrazione n della sostanza esaminata è calcolato con la formula $n = N \sin \varphi$, dove φ è l'angolo limite della riflessione totale. Nel caso di riflessione da un cristallo, esistono due angoli limite corrispondenti ai due raggi rifratti dal cristallo.

Dire come si deve orientare sul rifrattometro una lamina a facce parallele tagliata in modo arbitrario da un cristallo uniassico per poter misurare entrambi gli indici di rifrazione principali n_o e n_e del cristallo.

Soluzione. Per misurare l'indice ordinario n_o la lamina, evidentemente, può essere orientata a piacere. Per determinare l'indice straordinario n_e (cioè il valore massimo o minimo di $n_\parallel$), la lamina deve essere orientata in modo che il piano, passante per l'asse ottico del cristallo e per la normale alla superficie di separazione lamina-vetro del rifrattometro, sia perpendicolare al piano d'incidenza.

Infatti, nel caso di una riflessione totale, il campo luminoso penetra nel « secondo » mezzo generalmente nella forma di un'onda non omogenea (evanescente). Ma se la luce cade rigorosamente sotto l'angolo limite di riflessione totale, l'onda nel secondo mezzo sarà ancora omogenea. La sua normale d'onda è parallela alla linea d'intersezione del piano d'incidenza con il piano di separazione dei mezzi. Facciamo ruotare il cristallo finché il suo asse ottico sia perpendicolare a questa linea. L'onda nel cristallo si propagherà allora perpendicolarmente all'asse ottico. Nel caso di quest'orientamento del cristallo, il vettore elettrico dell'onda straordinaria è parallelo all'asse ottico. Quindi, in questo caso sul rifrattometro sarà misurato l'indice di rifrazione principale n_e dell'onda straordinaria.

3. Nella misura degli indici di rifrazione di una lamina cristallina con il metodo appena descritto, risultò che un indice di rifrazione conserva un valore costante n_o per tutte le rotazioni della semisfera di vetro. L'altro indice di rifrazione varia di modo che il valore n_o per esso 1) è massimo, 2) è minimo. Determinare il segno ottico [1] del cristallo e l'orientamento della lamina rispetto all'asse ottico.

Risposta. La lamina è stata tagliata parallelamente all'asse ottico. 1) Il cristallo è negativo. 2) Il cristallo è positivo.

---

[1] Un cristallo uniassico si dice *positivo* se l'indice di rifrazione ordinario n_o è inferiore a quello straordinario n_e ($n_o < n_e$). Nel caso contrario ($n_o > n_e$) il cristallo è detto *negativo*.

4. Come varieranno, durante la rotazione della semisfera del rifrattometro, entrambi gli indici di rifrazione di una lamina cristallina se essa è tagliata perpendicolarmente all'asse ottico?

Risposta. Entrambi gli indici di rifrazione resteranno costanti ed uguali rispettivamente a n_o e n_e.

5. Dire come si deve tagliare un prisma da un cristallo uniassico per poter misurare gli indici di rifrazione ordinario n_o e straordinario n_e di un cristallo mediante il metodo di deviazione minima del raggio rifratto.

Risposta. L'asse ottico deve essere parallelo allo spigolo rifrangente del prisma.

6. Un fascio di raggi paralleli di luce non polarizzata cade normalmente su una lamina di spato d'Islanda tagliata non perpendicolarmente all'asse ottico. Dopo aver attraversato la lamina il fascio cade su una seconda lamina identica e parallela alla prima, e finalmente cade su uno schermo. I piani della sezione principale delle lamine formano tra loro un angolo di 30°. Quale figura apparirà sullo schermo?

Risposta. Sullo schermo compaiono quattro macchie le cui intensità luminose sono nel rapporto 1:3:1:3. Due macchie d'intensità luminosa 1:3 sono linearmente polarizzate, le due altre delle stesse intensità sono anch'esse polarizzate linearmente, ma in un piano perpendicolare.

7. Il parabrezza ed i fari delle automobili sono ricoperti da polaroid i cui piani della sezione principale sono paralleli tra loro e formano un angolo di 45° con l'orizzonte. I polaroid di tutte le automobili debbono essere orientati identicamente (prendendo come riferimento il senso di marcia). Mostrare che in queste condizioni i guidatori vedranno la strada illuminata dai loro propri fari, e non saranno accecati dai fari delle automobili che vanno in senso opposto.

8. Calcolare l'angolo massimo $\delta_{\max}$ tra le direzioni del raggio e della normale al fronte d'onda in un cristallo di spato d'Islanda.

Soluzione. I vettori ***N, S, D, E*** dell'onda straordinaria sono situati in uno stesso piano, ed inoltre l'angolo δ tra ***N*** e ***S*** è uguale a quello tra ***D*** ed ***E***. Indichiamo con β l'angolo tra ***D*** e l'asse ottico del cristallo e con γ l'angolo tra ***E*** e l'asse ottico. Si ha allora

$$D_{\parallel} = D\cos\beta = \varepsilon_{\parallel} E_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel} E\cos\gamma,$$
$$D_{\perp} = D\sin\beta = \varepsilon_{\perp} E_{\perp} = \varepsilon_{\perp} E\sin\gamma.$$

Di qui $\mathrm{tg}\,\beta = (\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel})\,\mathrm{tg}\,\gamma = (n_o/n_e)^2\mathrm{tg}\,\gamma$. L'angolo cercato è $\delta = \beta - \gamma$. Perciò

$$\mathrm{tg}\,\delta = \mathrm{tg}(\beta - \gamma) = \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_o^2 + n_e^2\mathrm{tg}^2\beta}\,\mathrm{tg}\,\beta. \tag{76.13}$$

L'angolo δ è massimo per $\mathrm{tg}\,\beta = n_o/n_e = 1{,}1157$, cioè per $\beta = 48°7'53''$. L'angolo massimo $\delta_{\max}$ è dato dalla formula

$$\mathrm{tg}\,\delta_{\max} = \frac{n_o^2 - n_e^2}{2n_o n_e} = 0{,}1097. \tag{76.14}$$

Troviamo da questa formula $\delta_{\max} = 6°15'46''$.

9. Calcolare l'indice di rifrazione $n_{\parallel}$ dell'onda straordinaria in un romboedro di spato d'Islanda, se la normale al fronte d'onda è parallela allo spigolo laterale del cristallo. Per lo spato d'Islanda l'angolo tra lo spigolo laterale e l'asse ottico è uguale ad $\alpha = 64°$. Calcolare l'angolo δ tra le direzioni del raggio e della normale al fronte d'onda nel cristallo.

Risposta. $n_{\parallel} = \sqrt{(\sin\alpha/n_e)^2 + (\cos\alpha/n_o)^2} = 1{,}515$; $\delta = 4°36'20''$.

§ 77. *Polarizzatori*

1. I cristalli birifrangenti (prima di tutto quello di spato d'Islanda) si possono utilizzare per produrre luce polarizzata. A questo scopo nell'esperimento del tipo illustrato in figura 259 è sufficiente sopprimere uno dei due fasci luminosi linearmente polarizzati usciti dal cristallo. Ma è molto più comodo utilizzare non i cristalli semplici ma loro combinazioni dette *prismi polarizzatori*. Per fabbricare i prismi di polarizzazione è di solito utilizzato lo spato d'Islanda, a volte il quarzo ed il nitrato di sodio, il che riduce notevolmente il costo degli apparecchi di polarizzazione.

Un prisma polarizzatore è costituito da due o più prismi triangolari tagliati da un cristallo uniassico i cui assi ottici hanno la stessa orientazione o orientazioni diverse; questi prismi sono incollati gli uni agli altri per mezzo di sostanze trasparenti o sono separati da uno strato d'aria. Per incollare i prismi sono utilizzati il balsamo del Canada ($n_D = 1{,}550$), l'olio di lino ($n_D = 1{,}49$), la glicerina ($n_D = 1{,}474$) ed altre sostanze. Per l'ultravioletto sono utilizzati prismi incollati per mezzo di glicerina, olio di ricino, nonché prismi a strato d'aria.

Si hanno *prismi polarizzatori ad un fascio*, dai quali emerge un solo fascio luminoso linearmente polarizzato, e *prismi polarizzatori a due fasci* da cui emergono due fasci luminosi polarizzati in piani reciprocamente ortogonali. I prismi del primo tipo agiscono in base al principio di *riflessione totale*. Il fascio di luce naturale incidente, penetrando nel prisma, si divide in due fasci polarizzati linearmente in piani reciprocamente ortogonali. Uno di questi fasci subisce una riflessione totale alla frontiera di incollaggio ed è deviato, l'altro attraversa interamente il prisma ed è utilizzato ulteriormente.

2. Il primo polarizzatore fu inventato nel 1828 dal fisico scozzese Nicol (1768-1851). Questo prisma è in breve detto *nicol*. Lo stesso nome è spesso utilizzato per altri prismi basati sullo stesso principio. Per ottenere un prisma di Nicol si taglia, per sfaldatura di un cristallo di spato d'Islanda, un romboedro oblungo e, per abrasione, le basi del romboedro sono lavorate in modo che le nuove basi facciano un angolo di 68° con gli spigoli laterali (invece dell'angolo di 71° del cristallo naturale). Poi il cristallo è tagliato lungo un piano perpendicolare alle nuove basi ed alla sezione principale del cristallo (quest'ultima è normale alle basi e passa per l'asse ottico). Dopo aver levigato le facce di taglio, entrambi i pezzi sono incollati nella stessa posizione per mezzo di uno strato sottile di balsamo del Canada.

La sezione del prisma di Nicol con il piano della sezione principale è illustrata in figura 261. La retta con freccia doppia, inclinata di un angolo di 64° rispetto allo spigolo lungo, indica la direzione dell'asse ottico. Questa notazione è in seguito utilizzata per caratterizzare anche altri prismi. Un raggio luminoso cadendo sulla base artificiale del cristallo, si divide all'interno in un raggio ordinario AO ed un raggio straordinario AE. L'indice di

rifrazione del balsamo del Canada (1,550) ha un valore intermedio tra gli indici di rifrazione ordinario (n_o = 1,658) e straordinario (n_e = 1,486) dello spato d'Islanda. Gli angoli del prisma di Nicol sono calcolati in modo che il raggio straordinario attraversi lo strato di balsamo del Canada e quello ordinario subisca in questo strato una riflessione totale e sia assorbito da una faccia laterale annerita. (Nei grandi prismi, per evitare il loro riscaldamento, il raggio ordinario è evacuato all'esterno per mezzo di un piccolo prisma speciale, incollato sulla faccia laterale ed indicato in figura 261 mediante una linea punteggiata). In conseguenza di questi procedimenti la luce che emerge dal prisma risulta linearmente polarizzata.
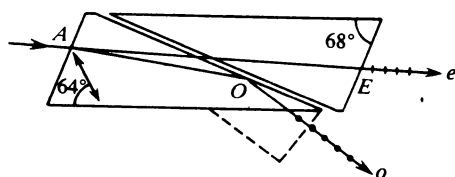
Fig. 261
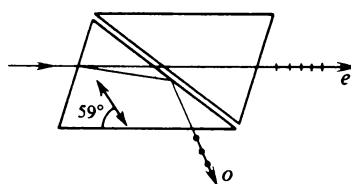
Fig. 262

Il fascio luminoso, che arriva sulla faccia d'entrata del prisma di Nicol, contiene di solito raggi di direzioni diverse. Se un raggio cade sulla faccia di taglio con un angolo troppo grande, si ha riflessione totale sia per il raggio ordinario che per quello straordinario. Se invece l'angolo è troppo piccolo, il prisma sarà attraversato anche dal raggio ordinario. Il prisma sarà attraversato unicamente dal raggio straordinario, se e solo se gli angoli d'incidenza dei raggi che arrivano sulla faccia d'entrata sono compresi entro limiti determinati. La differenza d'inclinazione dei raggi estremi del fascio incidente, che soddisfa questa condizione, definisce la cosiddetta *apertura di polarizzazione totale* del prisma. Per il prisma di Nicol quest'apertura è di 29° ed il rapporto della lunghezza del prisma alla sua larghezza è uguale a 3,28 (si veda il problema 1 di questo paragrafo).

Nel *prisma di Foucault* (fig. 262), costruito come il nicol, il balsamo di Canada è sostituito da uno strato d'aria sottile. Grazie a ciò, questo prisma può essere utilizzato per l'ultravioletto, mentre il balsamo del Canada assorbe l'ultravioletto. Dal nicol il prisma di Foucault differisce anche per il fatto che l'indice di rifrazione dello strato d'aria è inferiore ad entrambi gli indici n_o e n_e, e non è uguale ad un valore intermedio tra n_o e n_e, come nel caso del balsamo del Canada. Perciò la riflessione totale sul piano di taglio nel prisma di Foucault è realizzata sotto angoli più piccoli di quelli del nicol, ed il prisma di Foucault è più corto (per una sezione trasversale data) e, di conseguenza, è meno costoso del nicol. Ma la sua apertura di polarizzazione totale è uguale soltanto a 8°.

3. Le basi dei prismi di Nicol e di Foucault sono oblique e ciò provoca

una deviazione laterale del raggio incidente durante il suo passaggio attraverso il prisma. La conseguenza di ciò è uno spostamento circolare del raggio emergente durante la rotazione del prisma attorno al suo asse. Quest'inconveniente non esiste nei prismi aventi la forma di un parallelepipedo retto, che sono stati elaborati da Glazebrook (fig. 263), Glan, Glan-Thompson, Hartnack-Prazmowski, Frank-Ritter (fig. 264), Ahrens (fig. 265), ecc. La sezione del prisma incollato di Glazebrook è rappresentata in figura 263. L'asse ottico è perpendicolare al piano della figura (è indicato in figura con dei punti). In modo analogo sono costruiti i prismi di Glan, di
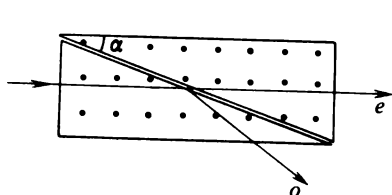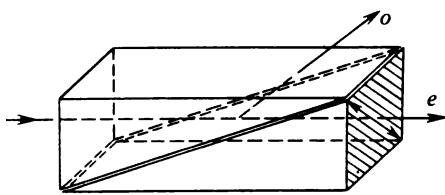
Fig. 263 Fig. 264

Glan-Thompson e di Hartnack-Prazmowski. Le loro differenze dal prisma di Glazebrook sono le seguenti. Il prisma di Glan è a strato d'aria, quello di Glan-Thompson ha parametri diversi. Nel prisma di Hartnack-Prazmowski l'asse ottico è normale al piano di taglio, mentre nel prisma di Frank-Ritter (fig. 264) esso è parallelo ad una delle diagonali di base del prisma. Il prisma di Ahrens è composto di tre prismi disposti come indicato in figura 265. I parametri di questi diversi prismi sono riportati nella tavola 8.

4. In figura 266 sono rappresentati diversi tipi di *prismi polarizzatori a due raggi emergenti*. Il primo è una combinazione di un prisma di vetro e di
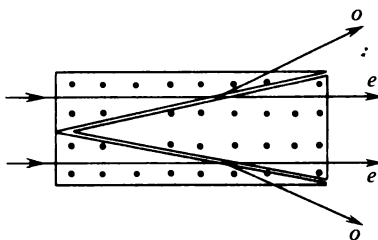
Fig. 265

un prisma di spato d'Islanda il cui asse ottico è parallelo allo spigolo rifrangente. Questi prismi sono a contatto oppure incollati come è mostrato in figura 266,*a*. L'indice di rifrazione del vetro (1,49) coincide quasi esattamente con l'indice straordinario n_e dello spato d'Islanda. Il fascio incidente di

Prisma	Apertura di polarizzazione totale	Angolo tra il piano di taglio e la faccia laterale	Rapporto tra lunghezza e larghezza del prisma
Prisma di Nicol	29°	22°	3,28
Prisma di Nicol accorciato, incollato:			
a) con balsamo del Canada	13°	25°	2,83
b) con balsamo di Copaive	24°	25°	2,83
Prisma di Foucault	8°	40°	1,53
Prisma di Glazebrook, incollato:			
a) con balsamo del Canada	35°	12,1°	4,65
b) con olio di lino	42°	14°	4,02
c) con glicerina	32,1°	17,3°	3,2
Prisma di Glan a strato d'aria	7,9°	50,3°	0,83
Prisma di Glan-Thompson, incollato:			
a) con balsamo del Canada	27,5°	13,5°	4,15
b) con olio di lino	41°	13,5°	4,15
Prisma di Hartnack-Prazmowski	41,9°	13,9°	4,04
Prisma di Frank-Ritter, incollato con balsamo del Canada	19°	17,5°	3,17
Prisma di Ahrens incollato con balsamo del Canada	35°	12,1°	2,32

luce non polarizzata si divide nel prisma cristallino in un fascio ordinario ed uno straordinario. Il fascio straordinario attraversa l'apparecchio senza subire rifrazione, mentre il fascio ordinario è fortemente deviato verso la base del prisma cristallino in conseguenza delle due rifrangenze sulle sue
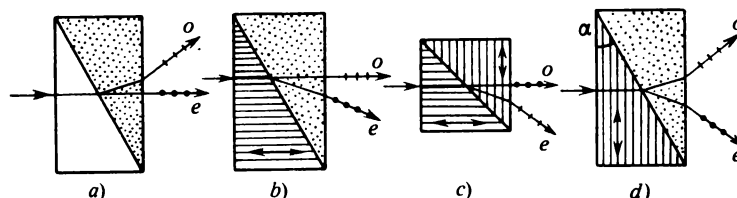
Fig. 266

facce. Analogamente agiscono i *prismi di Rochon* (fig. 266,*b*) e di *Sénarmont* (fig. 266,*c*). Nel *prisma di Wollaston* (fig 266,*d*) i raggi emergenti della luce polarizzata linearmente sono deviati in due direzioni simmetriche.

5. L'assorbimento della luce in molti cristalli dipende dalla direzione del vettore elettrico dell'onda luminosa. Questo fenomeno viene utilizzato per produrre luce linearmente polarizzata nelle cosiddette *lamine dicroiche*.

Ad esse appartengono, per esempio, le lamine di tormalina ed i polaroid. La tormalina assorbe più fortemente il raggio ordinario di quello straordinario, e perciò dopo aver attraversato la lamina, la luce naturale diventa parzialmente polarizzata nel piano della sezione principale. Se la lamina è sufficientemente spessa (press'a poco 1 mm), nella regione visibile dello spettro il raggio ordinario è assorbito quasi completamente di modo che tutta la luce trasmessa risulta polarizzata linearmente. Per certe regioni dello spetto visibile anche il raggio straordinario subisce un assorbimento notevole. Le lamine di tormalina di spessore appropriato agiscono non solo come *polarizzatori*, ma anche come *filtri di luce* che si lasciano attraversare prevalentemente della luce giallo-verde. Questo è un grosso inconveniente dalla tormalina quale polarizzatore. Al contrario, la sua apertura di polarizzazione totale è molto grande ed è limitata solo da condizioni costruttive.

Osserviamo anche che con la variazione della direzione della normale al fronte d'onda varia anche la direzione del vettore elettrico in entrambe le onde linearmente polarizzate, risultanti dalla divisione della luce naturale che si propaga secondo questa normale. In conseguenza di ciò varia anche l'assorbimento di queste onde, assorbimento che dipende di solito anche dalla lunghezza d'onda. Ciò conduce alla dipendenza della colorazione del cristallo dalla direzione di propagazione della luce. Questo fenomeno si dice *dicroismo* o, meglio, *pleocroismo* e si manifesta più o meno nella maggior parte dei cristalli birifrangenti.

Problemi

1. Nel prisma polarizzatore di Nicol il piano di taglio BC (fig. 267) è perpendicolare alle basi AB e CD. Il taglio è eseguito lungo la diagonale del prisma. Calcolare gli angoli limite di riflessione totale su uno strato di balsamo del Canada per le onde ordinaria e straordinaria. Determinare i corrispondenti angoli d'incidenza sulla base AB e l'apertura di polarizzazione totale del prisma. Calcolare l'indice di rifrazione $n_{\parallel}$ dell'onda straordinaria nel cristallo ed il
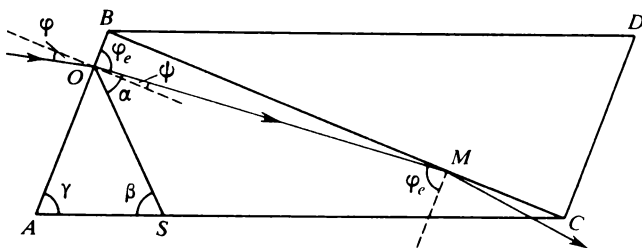
Fig. 267

rapporto tra la lunghezza l del prisma e la larghezza h della sua sezione retta. Eseguire i calcoli per due casi differenti: 1) le basi del prisma sono artificiali ($\gamma = 68°$); 2) la base del cristallo è la sua faccia naturale ($\gamma = 71°$).

Soluzione. Facciamo il calcolo per l'onda straordinaria supponendo che $\gamma = 68°$. Siano

$\beta = 64°$ l'angolo tra l'asse ottico del cristallo e lo spigolo longitudinale AC, OM la normale d'onda per il caso limite della riflessione totale, φ_e il corrispondente angolo d'incidenza sullo strato BC di balsamo del Canada. Si ha allora $\sin\varphi_e = n/n_\parallel$, dove n è l'indice di rifrazione del balsamo del Canada. L'indice di rifrazione $n_\parallel$ dell'onda straordinaria nel cristallo lungo la direzione considerata della normale d'onda è definito dall'equazione

$$\frac{1}{n_\parallel^2} = \frac{\sin^2\alpha}{n_e^2} + \frac{\cos^2\alpha}{n_o^2}.$$

Come è evidente dalla figura 267, $\alpha = \beta + \gamma - \varphi_e$. Sostituendo in questa relazione i valori numerici dati, si ottiene l'equazione

$$\mathrm{tg}^2\varphi - 7{,}046608\ \mathrm{tg}\,\varphi - 32{,}84593 = 0.$$

Ne segue

$$\mathrm{tg}\,\varphi = 10{,}250829,\quad \varphi = 84{,}422825°,\quad n_\parallel = n/\sin\varphi_e = 1{,}5573726.$$

L'angolo di rifrazione sulla base AB è uguale a $\psi = \pi/2 - \varphi_e = 5{,}5771175°$. In base alla legge di Snellius troviamo l'angolo d'incidenza

$$\sin\varphi = n_\parallel \sin\psi = 0{,}1513532,\quad \varphi = 8{,}705349°.$$

Perché l'onda straordinaria non subisca riflessione totale, l'angolo d'incidenza φ deve soddisfare la condizione $\varphi > 8{,}705349°$.

L'analogo calcolo per l'onda ordinaria è più semplice, poiché l'indice di rifrazione di quest'onda non dipende dalla sua direzione di propagazione. Per l'angolo limite di riflessione totale si ottiene in questo caso $\varphi_o = 69{,}20573°$, e per il corrispondente angolo d'incidenza $\varphi = 36{,}05854°$. Perché l'onda ordinaria subisca una riflessione totale, l'angolo d'incidenza deve essere inferiore a questo valore. Se l'angolo d'incidenza soddisfa la condizione $8{,}705349° < \varphi < 36{,}05854°$, la luce trasmessa sarà completamente polarizzata. L'apertura di polarizzazione totale $\varepsilon = 36{,}06 - 8{,}71 \approx 27{,}35°$. (Nei calcoli è stato utilizzato un valore non preciso dell'angolo β. I decimali sono stati conservati per non perdere la precisione dei calcoli.)

Per il rapporto l/h si ottiene

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{\sin\gamma\cos\gamma} = \frac{2}{\sin 2\gamma} = 2{,}88.$$

In pratica il prisma di Nicol è tagliato non secondo la diagonale, ma come indicato in figura 261, per facilitare il suo montaggio. In questo caso il rapporto l/h è un po' più grande.

Consideriamo ora il caso di un cristallo naturale per il quale $\gamma = 71°$. I calcoli per l'onda ordinaria restano gli stessi. I calcoli per l'onda straordinaria invece diventano molto più semplici grazie alla relazione fortuita: $\beta + \gamma = 135°$, e quindi $\sin(\beta + \gamma) = -\cos(\beta + \gamma)$. I risultati definitivi sono: $n_\parallel = 1{,}564955$, $\varphi_e = 82{,}0728°$, $\varphi = 12{,}46454°$, $\varepsilon = 23{,}59°$, $l/h = 3{,}25$. In confronto con il caso precedente i parametri del prisma polarizzatore sono peggiorati.

2. Un prisma di Wollaston (fig. 266,*d*) è stato costruito con spato d'Islanda. L'angolo $\alpha = 15°$. Quale sarà l'angolo di divergenza δ dei raggi ordinario e straordinario?

Risposta. $\delta = 5°17'$.

3. Due prismi polarizzatori a strato d'aria sono fatti di spato d'Islanda. In un prisma l'asse ottico è perpendicolare al piano d'incidenza e nell'altro prisma è parallelo a questo piano (fig. 268). Descrivere l'azione di ogni prisma. Come sarà polarizzata la luce trasmessa? Quale prisma trasmetterà più luce? In quali limiti dev'essere compreso l'angolo α perché dal prisma emerga luce linearmente polarizzata? La luce arriva sulla faccia d'entrata del prisma sotto incidenza normale.

Risposta. I prismi sono attraversati dal raggio straordinario. Il secondo prisma trasmette

più luce. In entrambi i casi deve essere verificata la condizione $1/n_o < \sin\alpha < 1/n_e$, cioè $37°6' < \alpha < 42°18'$.

4. In un prisma di Glazebrook (fig. 263) la colla è o il balsamo del Canada ($n = 1{,}550$), o l'olio di lino ($n = 1{,}494$). Calcolare la più vantaggiosa apertura di polarizzazione totale del prisma ed il corrispondente rapporto tra la lunghezza a e la larghezza b per entrambe le sostanze collanti. Il fascio di raggi incidenti deve essere simmetrico rispetto all'asse parallelo allo spigolo laterale del prisma, per poter ottenere una polarizzazione totale.

Soluzione. Nel caso considerato il vettore elettrico dell'onda straordinaria è sempre parallelo all'asse ottico e quello dell'onda ordinaria è perpendicolare a questo asse. Perciò le direzioni dei raggi e delle normali d'onda coincidono. Il raggio straordinario non può subire una
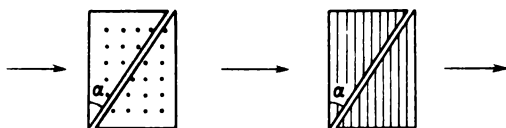
Fig. 268

riflessione totale sul piano di taglio poiché n_e è inferiore all'indice di rifrazione della colla. La massima inclinazione del raggio straordinario da sinistra a destra e verso il basso (fig. 269) è determinata dalla direzione della diagonale BC. L'angolo di rifrazione per questo raggio $\psi_e = \arcsin(1/\sqrt{1 + (a/b)^2})$ e l'angolo d'incidenza

$$\varphi = \arcsin \frac{n_e}{\sqrt{1 + (a/b)^2}} . \tag{77.1}$$

Se l'angolo d'incidenza è superiore a questo valore, il raggio straordinario non cade sul piano di taglio, ma è assorbito dalla faccia laterale AC. Cerchiamo ora il rapporto a/b tale che il raggio ordinario SO, cadente sotto l'angolo φ nella direzione dal basso verso l'alto e da sinistra a destra, incontri il piano di taglio BC sotto l'angolo limite di riflessione totale $\beta = \arcsin(n/n_o)$. Per questo valore del rapporto a/b, ogni raggio ordinario che arriva dal basso verso l'alto sotto un angolo inferiore a β, nonché ogni raggio che arriva dall'alto in basso,
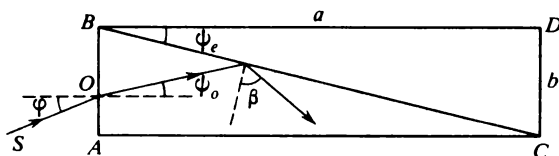
Fig. 269

si rifletterà totalmente sul piano di taglio BC. L'apertura di polarizzazione totale è $\varepsilon = 2\varphi$.

Dalla figura 269 risulta che $\beta = \frac{\pi}{2} - (\psi_e + \psi_o)$ e di conseguenza $\cos(\psi_e + \psi_o) = n/n_o$. Utilizzando ancora la legge della rifrazione $\sin\varphi = n_o \sin\psi_o = n_e \sin\psi_e$, otteniamo un sistema completo di equazioni che consentono di calcolare il rapporto a/b e l'apertura 2φ. Da questo sistema si ottengono formule che facilitano i calcoli

$$(n_o^2 - n^2)\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^2 + [n_o^2 - n_e^2 - 2n(n + n_e)]\frac{a^2}{b^2} - (n + n_e)^2 = 0, \tag{77.2}$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{n_e}{\sqrt{1+(a/b)^2}}\,. \tag{77.3}$$

Queste formule danno per il balsamo del Canada $a/b = 5{,}32$, $\varepsilon = 31°51'$, per l'olio di lino $a/b = 4{,}25$, $\varepsilon = 39°50'$.

5. Risolvere il problema precedente supponendo che lo strato di sostanza incollante sia sostituito da uno strato d'aria.

Soluzione. Perché il raggio ordinario che arriva sulla faccia AB sotto un angolo φ dal basso verso l'alto e da sinistra a destra (fig. 270) subisca una riflessione totale sul piano di taglio BC è necessario che l'angolo d'incidenza su questo piano sia superiore all'angolo limite

$$\alpha - \psi_o \geqslant \beta_o, \quad \sin\beta_o = 1/n_o. \tag{77.4}$$

Perché il raggio straordinario, che arriva sulla faccia AB sotto l'angolo φ' dall'alto verso il
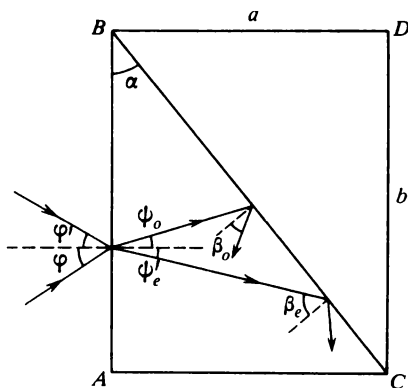
Fig. 270

basso e da sinistra a destra, attraversi il piano di taglio BC è necessario che esso cada su BC sotto un angolo non superiore all'angolo limite di riflessione totale

$$\alpha + \psi_e' \leqslant \beta_e, \quad \sin\beta_e = 1/n_e. \tag{77.5}$$

Alla massima apertura del prisma corrispondono nelle (77.4) e (77.5) i segni d'uguaglianza. In questo caso l'angolo $\varphi + \varphi'$ è uguale all'apertura ε di polarizzazione totale del prisma. Imponendo che $\varphi = \varphi'$, si ha

$$\alpha - \psi_o = \beta_o, \quad \alpha + \psi_e' = \beta_e, \tag{77.6}$$

ed inoltre

$$\sin\varphi = n_o \sin\psi_o = n_e \sin\psi_e', \tag{77.7}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = a/b. \tag{77.8}$$

Di qui si possono trovare tutte le grandezze che ci interessano. Dalla (77.6) otteniamo

$$\psi_o + \psi_e' = \beta_e - \beta_o = 5°12'. \tag{77.9}$$

Dunque, gli angoli ψ_o, ψ_e', φ sono piccoli ed i loro seni si possono sostituire con gli angoli stes-

si. Questo dà per l'apertura

$$\varepsilon = 2\varphi = \frac{2n_o n_e}{n_o + n_e}(\beta_e - \beta_o) = 8°9' \tag{77.10}$$

e per il rapporto tra le lunghezze

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}(\beta_o + \psi_o) = \operatorname{tg}\left(\beta_o + \frac{\varphi}{n_o}\right) = 0{,}826. \tag{77.11}$$

§ 78. *Analisi della luce polarizzata*

1. La polarizzazione della luce può essere messa in evidenza per mezzo di un prisma polarizzatore (nicol) o di un qualsiasi polarizzatore in grado di produrre luce totalmente polarizzata linearmente. (Per brevità, in seguito ogni polarizzatore si dice *nicol*). A questo scopo il nicol è interposto sul tragitto della luce da esaminare. Se il nicol viene fatto ruotare attorno alla direzione del raggio, l'intensità della luce trasmessa in generale varierà. Se per una certa posizione del nicol la luce trasmessa viene completamente smorzata, la luce incidente è polarizzata *linearmente*.

Se la luce incidente è naturale o polarizzata circolarmente, durante la rotazione del nicol, l'intensità della luce trasmessa non varierà. Per poter distinguere questi due casi si utilizza *una lamina quarto d'onda* ($\lambda/4$) che si chiama *compensatore*. Si tratta di una lamina di sostanza cristallina che introduce una differenza di fase supplementare di $\pi/2$ tra i raggi polarizzati in piani ortogonali. Questi piani definiscono nel piano della lamina due direzioni dette *direzioni principali* (*linee neutre*). Di solito una lamina quarto d'onda è tagliata in un cristallo uniassico (per esempio, il quarzo) parallelamente al suo asse ottico. La differenza di fase supplementare di $\pi/2$ è allora introdotta tra i raggi ordinario e straordinario. Ma una lamina quarto d'onda può essere tagliata anche in un cristallo biassico, per esempio, la mica. In seguito si suppone che la lamina quarto d'onda sia tagliata in un cristallo uniassico. Nel caso di una luce polarizzata circolarmente la differenza di fase tra due vibrazioni reciprocamente ortogonali qualsiasi è uguale a $\pm\pi/2$. Se sul tragitto di questa luce è interposta una lamina quarto d'onda, essa introduce una differenza di fase supplementare di $\pm\pi/2$. La differenza di fase risultante è allora uguale a 0 o a π, cioè la luce diventa allora polarizzata *linearmente*. Questa luce può essere completamente smorzata per mezzo di una rotazione del nicol. Se invece la luce incidente è naturale, essa non cambierà dopo aver attraversato la lamina quarto d'onda ed in questo caso l'estinzione non avrà luogo.

2. Lo stesso dispositivo può essere utilizzato per distinguere la polarizzazione circolare destra da quella sinistra. Supponiamo che la luce si propaghi lungo l'asse Z verso il lettore e l'asse ottico della lamina sia orientato

secondo l'asse Y. Il vettore E dell'onda straordinaria sarà allora parallelo all'asse Y e quello dell'onda ordinaria parallelo all'asse X. Per fissare le idee ammettiamo che la polarizzazione sia destra, cioè il vettore E ruota in senso orario (fig. 271). In questo caso prima della lamina, l'onda straordinaria è in anticipo di fase di $\pi/2$ sull'onda ordinaria (si veda il § 62, punto 4). Se z è lo spessore della lamina, dopo aver attraversato la lamina, tra queste onde appare una differenza di fase supplementare uguale a

$$\Delta_{\text{sup}} = (\omega t - kn_e z) - (\omega t - kn_o z) = k(n_o - n_e)z,$$

dove k è il numero d'onda nel vuoto. Per un cristallo negativo ($n_o > n_e$, spato d'Islanda) $\Delta_{\text{sup}} = +\pi/2$, per uno positivo ($n_o < n_e$, quarzo) $\Delta_{\text{sup}} = -\pi/2$. Nel primo caso la differenza di cammino totale è uguale a $\Delta = \pi$ ed il piano di vibrazione della luce trasmessa è diretto secondo la bisettrice
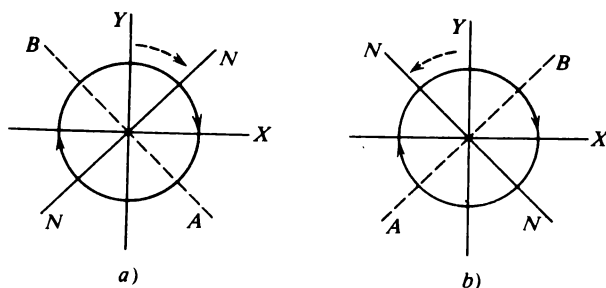
Fig. 271

AB (tratteggiata in figura 271,*a*). Se la sezione principale del nicol passa per l'asse ottico Y della lamina quarto d'onda, si deve farla ruotare nella posizione NN nel senso della freccia tratteggiata, cioè *nello stesso senso* nel quale ruota il vettore E dell'onda incidente per smorzare completamente la luce trasmessa. Nel secondo caso $\Delta = 0$ (fig. 271,*b*) ed il nicol dev'essere ruotato nel senso opposto, cioè *contro il senso di rotazione del vettore* $\boldsymbol{E}$ dell'onda incidente. Se la polarizzazione dell'onda incidente è *sinistra*, tutte le rotazioni del nicol debbono essere *invertite*.

I risultati si possono riassumere nella seguente regola. *Supponiamo che nella posizione iniziale il piano della sezione principale del nicol passi per l'asse ottico della lamina quarto d'onda. La rotazione del nicol a destra è definita positiva e quella a sinistra negativa (se la luce uscente dal nicol cade nell'occhio dell'osservatore). Allora, se il nicol e la lamina sono dello stesso segno, la polarizzazione circolare sarà sinistra, e se essi sono di segno contrario, la polarizzazione sarà destra.*

3. Consideriamo una questione più generale: come distinguere la luce naturale da quella polarizzata circolarmente o da una miscela di luce naturale e di luce polarizzata circolarmente? A questo scopo interponiamo di

nuovo sul tragitto della luce una lamina quarto d'onda ed un nicol. *Se la rotazione del nicol non modifica l'intensità della luce, quale che sia la posizione della lamina, la luce è naturale. Se l'intensità della luce varia e cade fino a zero, la luce è polarizzata circolarmente. Se l'intensità varia, ma non si ha estinzione, la luce incidente è una miscela di luce naturale e di luce polarizzata circolarmente.*

4. Ammettiamo ora che l'onda incidente sia *polarizzata ellitticamente*. Se interponiamo un nicol e lo facciamo ruotare, l'intensità luminosa della luce trasmessa sarà massima in due posizioni (che differiscono tra loro di 180°), e nelle posizioni perpendicolari a queste sarà minima. Queste posizioni determinano le direzioni degli assi principali dell'ellisse delle vibrazioni. Fatto ciò, interponiamo sul tragitto della luce incidente una lamina quarto d'onda il cui asse ottico sia orientato parallelamente ad uno degli assi principali dell'ellisse. Dopo aver attraversato la lamina, la luce sarà polarizzata lunearmente e può essere smorzata per rotazione del nicol. In questo caso il nicol deve essere ruotato di un certo angolo rispetto alla posizione iniziale, alla quale corrisponde un'intensità luminosa massima o minima. Infatti, nella posizione iniziale la sezione principale del nicol era orientata parallelamente ad uno degli assi principali dell'ellisse delle vibrazioni. Dopo aver attraversato la lamina quarto d'onda il piano di vibrazione della luce linearmente polarizzata passerà per una delle diagonali del rettangolo rappresentato in figura 236.

5. È facile comprendere come fare per distinguere 1) una luce polarizzata ellitticamente, 2) una miscela di luce naturale e di luce polarizzata linearmente (*luce parzialmente polarizzata linearmente*), 3) una miscela di luce naturale e di luce polarizzata ellitticamente (*luce polarizzata ellitticamente in modo parziale*). Di nuovo si deve interporre sul tragitto di propagazione della luce una lamina quarto d'onda e dietro ad essa un nicol. Se per rotazione della lamina attorno alla direzione del raggio si può trovare una posizione nella quale, facendo ruotare il nicol, si ottiene l'estinzione della luce trasmessa, allora la luce è *polarizzata ellitticamente*. Se l'estinzione è irrealizzabile, abbiamo a che fare con una miscela di luce naturale e di luce polarizzata linearmente, o con una miscela di luce naturale e di luce polarizzata ellitticamente. Per distinguere questi ultimi due casi, sul tragitto di luce è prima interposto un solo nicol che, per rotazione, ci fornisce la posizione del minimo d'intensità luminosa. Poi davanti al nicol è posta una lamina quarto d'onda. Per rotazione della lamina e del nicol si ottiene di nuovo il minimo d'intensità luminosa. Se questo minimo si ottiene nella stessa posizione del nicol (o per la sua rotazione di 180°), abbiamo a che fare con una *miscela di luce naturale e di luce polarizzata linearmente*. Se invece per ottenere il minimo d'intensità è necessario far ruotare il nicol di un certo angolo, si ha una *miscela di luce naturale e di luce polarizzata ellitticamente*.

6. Al posto della lamina quarto d'onda (o una lamina mezzonda che introduce una differenza di cammino supplementare uguale a $\lambda/2$) si utilizza-

no dispositivi più perfetti detti *compensatori*. I compensatori possono servire per l'analisi della polarizzazione della luce.

Il *compensatore di Babinet* (fig. 272) è composto da due cunei di quarzo *I* e *II* avvicinati i cui assi ottici sono reciprocamente perpendicolari (le orientazioni degli assi sono indicate nelle figure con dei punti e con un tratteggio). Il cuneo *I* è fisso, ed il cuneo *II* può spostarsi in alto ed in basso rispetto al cuneo *I* per mezzo di una vite micrometrica. Durante questi spostamenti i piani dei cunei rivolti l'uno verso l'altro restano paralleli. Supponiamo che un raggio cada sul compensatore da sinistra a destra perpendicolarmente alla sua superficie. Nel compensatore questo raggio si scinde in un
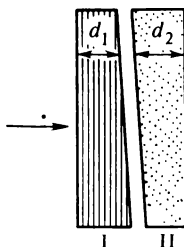
Fig. 272

raggio ordinario ed in un raggio straordinario propagantisi nella stessa direzione. Il raggio ordinario nel primo cuneo diventa raggio straordinario quando penetra nel secondo e viceversa. In conseguenza di ciò, tra le vibrazioni parallele e perpendicolari al piano della figura si stabilisce una differenza di fase supplementare

$$\Delta_{\text{sup}} = (\omega t - kn_e d_1 - kn_o d_2) - (\omega t - kn_o d_1 - kn_e d_2) = \\ = k(n_e - n_o)(d_2 - d_1)$$

dove d_1 e d_2 sono gli spessori del primo e del secondo cuneo lungo il raggio che li interseca, e $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda nel vuoto.

Per il quarzo (cristallo positivo) $n_e > n_o$. Là dove $d_1 = d_2$ la differenza di fase supplementare Δ_{sup} è nulla. Al di sopra di questo punto Δ_{sup} è positiva ed al di sotto negativa; inoltre, la differenza di fase supplementare Δ_{sup} cresce linearmente con la distanza quando il raggio si sposta verso l'alto. Se sul compensatore cade un fascio di luce polarizzata linearmente o ellitticamente, all'uscita in punti differenti la differenza di fase Δ totale sarà differente. Le linee di uguale differenza di fase sono rette parallele agli spigoli dei cunei. La luce emergente resta polarizzata ellitticamente, ma la forma dell'ellisse delle vibrazioni è diversa modificandosi nel passaggio da una linea ad un'altra. Quando la differenza di fase totale è uguale a $\Delta = 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), la luce sarà polarizzata linearmente. Se l'esaminiamo attraverso un nicol convenientemente orientato, sulla superficie del compen-

satore si osservano frange scure equidistanti e parallele. Se facciamo ruotare il nicol di 90°, le frange si spostano di mezza interfrangia, cioè appariranno là dove $\Delta = (2m + 1)\pi$. Spostando il cuneo *II* per mezzo della vite micrometrica, la posizione del raggio resta la stessa, mentre la differenza di fase supplementare Δ_{sup} varia. La scala sul tamburo della vite micrometrica si può graduare in modo che si possa ottenere subito il valore di Δ_{sup}.

La differenza di fase Δ_{sup}, introdotta dal compensatore di Babinet, dipende dal punto d'entrata del raggio incidente. Questo inconveniente è stato eliminato nel modello di compensatore perfezionato da Soleil (1798-1878): qui tutti i raggi incidenti acquistano la stessa differenza di fase supplementare. Come il compensatore di Babinet, il ***compensatore di Babinet-Soleil*** è costituito dagli stessi cunei di quarzo, ma i loro assi ottici sono
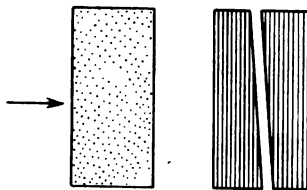
Fig. 273

orientati parallelamente l'uno all'altro (fig. 273). Davanti ai cunei è disposta una lamina di quarzo a facce parallele, il cui asse ottico è perpendicolare a quello dei cunei. Lo spessore della lamina è uguale allo spessore totale dei cunei in posizione zero (spostamento verticale nullo). L'insieme dei due cunei agisce come una lamina piana a facce parallele il cui spessore si può variare mediante una vite micrometrica. Dunque, l'azione del compensatore di Babinet-Soleil è equivalente a quella di due lamine cristalline i cui assi ottici sono reciprocamente perpendicolari.

Problemi

1. Calcolare lo spessore minimo d di una lamina di mica perché essa possa servire come lamina quarto d'onda per la luce gialla del sodio. Per questa radiazione gli indici di rifrazione delle onde che si propagano all'interno della lamina perpendicolarmente ad essa sono rispettivamente uguali a $n_1 = 1{,}5941$, $n_2 = 1{,}5887$. Eseguire lo stesso calcolo per il quarzo ($n_o = 1{,}5442$, $n_e = 1{,}5533$).

Risposta. 1) $d = \dfrac{\lambda}{4(n_1 - n_2)} = 27\mu m$; 2) $d = \dfrac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 16{,}2\mu m$.

2. Una miscela di luce naturale e di luce polarizzata circolarmente è esaminata attraverso una lamina cristallina quarto d'onda ed un nicol. Ruotando il nicol attorno all'asse del fascio luminoso si scopre che l'intensità massima della luce trasmessa per il sistema è $m = 3$ volte più

grande dell'intensità minima. Calcolare il rapporto tra l'intensità I_c della luce polarizzata circolarmente e l'intensità I_n della luce naturale.

Risposta. $I_c/I_n = 1/2(m - 1) = 1$.

3. Sul tragitto di una luce polarizzata linearmente è interposta una lamina mezzonda. Il piano di vibrazione della luce incidente fa un angolo α con l'asse ottico della lamina. Determinare la polarizzazione della luce trasmessa attraverso la lamina.

Risposta. La polarizzazione lineare si conserva, ma il piano di vibrazione sarà inclinato sull'asse ottico di un angolo $\beta = -\alpha$, cioè ruoterà di un angolo 2α. In particolare, se $\alpha = 45°$, il piano di vibrazione ruoterà di 90°.

4. Un fascio cilindrico di luce monocromatica polarizzata circolarmente destra cade sotto incidenza normale su una lamina mezzonda. Determinare lo stato di polarizzazione della luce trasmessa attraverso questa lamina.

Risposta. La luce sarà polarizzata circolarmente sinistra.
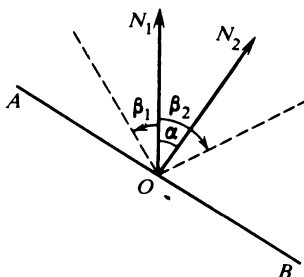
Fig. 274

5. Un fascio di raggi paralleli di luce monocromatica cade normalmente su un polaroid e poi su una lamina mezzonda. Il piano principale del polaroid (che contiene il vettore elettrico dell'onda che esso trasmette) forma un angolo α con l'asse di questa lamina. Determinare lo stato di polarizzazione della luce trasmessa che emerge dalla lamina.

Risposta. La luce resta polarizzata linearmente, ma il piano di vibrazione del vettore elettrico ruota di un angolo 2α disponendosi simmetricamente con la sua posizione iniziale rispetto all'asse della lamina mezzonda.

6. Un fascio di raggi paralleli di luce monocromatica attraversa due nicol'le cui sezioni principali formano un angolo $\alpha = 20°$. Tra i nicol è posta una lamina mezzonda tagliata in un cristallo uniassico parallelamente all'asse ottico. Quale dev'essere l'angolo β tra l'asse ottico della lamina e la direzione principale del primo nicol perché il sistema non lasci passare alcuna luce?

Soluzione. La luce non passerà attraverso il secondo nicol, se il vettore elettrico è perpendicolare alla sezione principale di questo nicol, cioè se esso è parallelo alla retta AB perpendicolare alla stessa sezione principale (fig. 274). L'asse della lamina dev'essere orientato secondo la bisettrice dell'angolo AON_1 o dell'angolo N_1OB complementare di π (si veda il problema precedente). Si ottengono due valori dell'angolo β

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = -35°, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = +55°.$$

7. Un'onda polarizzata linearmente attraversa una lamina cristallina, una delle direzioni principali della quale fa un angolo φ con la sezione principale del polarizzatore. La differenza di fase introdotta dalla lamina è δ. Determinare: 1) il rapporto dei semiassi dell'ellisse di vibra-

zione della luce polarizzata ellitticamente ottenuta; 2) l'angolo tra le direzioni principali della lamina ed i semiassi dell'ellisse.

Soluzione. Emergendo dalla lamina la luce polarizzata linearmente si trasforma in luce polarizzata ellitticamente:

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\cos(\omega t + \delta),$$

dove x e y sono le componenti del vettore elettrico secondo gli assi coordinati coincidenti con le direzioni principali della lamina. Per determinare i semiassi dell'ellisse ottenuta calcoliamo le proiezioni x' e y' del vettore luminoso sugli assi di un sistema di coordinate che forma un angolo θ con il sistema iniziale:

$$x' = a\cos\theta\cos\omega t + b\sin\theta\cos(\omega t + \delta) = A\cos(\omega t + \alpha),$$
$$y' = -a\sin\theta\cos\omega t + b\cos\theta\cos(\omega t + \delta) = B\cos(\omega t + \beta),$$

dove A e B sono i semiassi dell'ellisse definiti dalle equazioni

$$\begin{aligned} A\cos\alpha &= a\cos\theta + b\sin\theta\cos\delta, \quad A\sin\alpha = b\sin\theta\sin\delta, \\ B\cos\beta &= -a\sin\theta + b\cos\theta\cos\delta, \quad B\sin\beta = b\cos\theta\sin\delta. \end{aligned} \tag{78.1}$$

Di qui

$$\begin{aligned} A^2 &= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + ab\sin 2\theta\cos\delta, \\ B^2 &= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - ab\sin 2\theta\cos\delta. \end{aligned} \tag{78.2}$$

Sommando e sottraendo queste relazioni, otteniamo

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2 = R^2, \tag{78.3}$$
$$A^2 - B^2 = (a^2 - b^2)\cos 2\theta + 2ab\sin 2\theta\cos\delta, \tag{78.4}$$

dove R è l'ampiezza dell'onda trasmessa attraverso il polarizzatore. Perché le ampiezze A e B corrispondano alle vibrazioni lungo gli assi dell'ellisse, si deve scegliere l'angolo θ in modo che la differenza $A^2 - B^2$ sia massima o minima. Uguagliando la sua derivata a zero, si trova da questa condizione

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}\cos\delta. \tag{78.5}$$

Dalla (78.1) si trova

$$\begin{aligned} AB\sin(\alpha - \beta) &= -ab\sin\delta, \\ AB\cos(\alpha - \beta) &= ab\cos 2\theta\cos\delta - \frac{a^2 - b^2}{2}\sin 2\theta, \end{aligned} \tag{78.6}$$

o

$$\frac{AB\cos(\alpha - \beta)}{ab\cos 2\theta\cos\delta} = 1 - \frac{a^2 - b^2}{2ab\cos\delta}\operatorname{tg} 2\theta.$$

Sostituendo $\operatorname{tg} 2\theta$ con la sua espressione (78.5) otteniamo $\dfrac{AB\cos(\alpha - \beta)}{ab\cos 2\theta\cos\delta} = 0$, da cui

$\cos(\alpha - \beta) = 0$, $(\alpha - \beta) = \pm\pi/2$. Quindi, dalla prima equazione (78.6) abbiamo $AB =$

$= \pm ab \sin\delta$. Visto che $b/a = \mathrm{tg}\,\varphi$, si ha

$$\sin 2\varphi = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad \cos 2\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad \mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Dunque, l'equazione (78.5) acquista la seguente forma:

$$\mathrm{tg}\,2\theta = \mathrm{tg}\,2\varphi \cos\delta.$$

Proprio quest'equazione definisce l'angolo θ tra le direzioni principali della lamina e gli assi dell'ellisse. Per la seconda incognita introduciamo la notazione $B/A = \mathrm{tg}\,I$ ed utilizziamo la formula $\sin 2I = 2\,\mathrm{tg}\,I/(1 + \mathrm{tg}^2 I)$. Si ottiene allora

$$\sin 2I = \frac{2AB}{A^2 + B^2} = \frac{2ab\sin\delta}{a^2 + b^2} = \sin 2\varphi \sin\delta.$$

8. Su una lamina cristallina tagliata parallelamente all'asse ottico cade normalmente una luce polarizzata circolarmente. La luce trasmessa è esaminata attraverso un analizzatore.

1) Trascurando le perdite alla riflessione, determinare l'intensità della luce trasmessa, sapendo che la sezione principale dell'analizzatore fa un agnolo α con una delle direzioni principali della lamina. 2) Sotto quale angolo deve essere sistemato l'analizzatore per ottenere il massimo ed il minimo d'intensità?

Soluzione. 1) Se la luce è polarizzata circolarmente, le componenti delle vibrazioni secondo gli assi possono essere rappresentate nella forma

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t.$$

Dopo aver attraversato la lamina cristallina, che introduce una differenza di fase δ, le equazioni delle vibrazioni diventano

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin(\omega t + \delta).$$

All'uscita dall'analizzatore, la vibrazione risultante è

$$\xi = a\cos\alpha\cos\omega t + a\sin\alpha\sin(\omega t + \delta) = a(\cos\alpha + \sin\alpha\sin\delta)\cos\omega t + a\sin\alpha\cos\delta\sin\omega t.$$

Di qui si ottiene l'intensità della luce trasmessa

$$I = a^2\{(\cos\alpha + \sin\alpha\sin\delta)^2 + (\sin\alpha\cos\delta)^2\} = a^2(1 + \sin 2\alpha\sin\delta).$$

2) Per δ = costante l'intensità raggiunge il suo valore massimo o minimo, quando $\cos 2\alpha = 0$, cioè per $\alpha = 1/4\pi, 3/4\pi$. Se $\sin\delta > 0$, al primo valore di α corrisponde un massimo ed al secondo un minimo; per $\sin\delta < 0$ la situazione è contraria.

9. Un cuneo di sostanza birifrangente è interposto sul tragitto di una luce monocromatica polarizzata circolarmente. L'asse ottico è parallelo ad uno spigolo del cuneo. Descrivere le figure che si osservano attraverso un nicol quando il cuneo è immobile e quando ruota attorno alla direzione di propagazione della luce.

Soluzione. Secondo il precedente problema l'intensità della luce emergente dall'analizzatore è

$$I = a^2(1 + \sin 2\alpha\sin\delta).$$

Se $\sin 2\alpha > 0$, per α = costante l'intensità sarà minima quando

$$\sin\delta = -1, \text{ cioè per } \delta = 3\pi/2, 7\pi/2, \ldots,$$

e sarà massima quando

$$\sin\delta = 1, \text{ cioè per } \delta = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, \ldots$$

Se $\sin 2\alpha < 0$, si ottiene un massimo d'intensità nel primo caso ed un minimo nel secondo. In

tutti i casi nel campo visivo si troveranno frange chiare e scure alternate. La rotazione del cuneo fa variare l'angolo α e di conseguenza l'intensità luminosa in tutti i punti del cuneo. Quando $\alpha = 90$, 180 e 270°, tutto il cuneo sarà illuminato uniformemente e quando $\alpha = 45$, 135, 225, 315° si osserverà il massimo contrasto tra le frange chiare e scure. Passando per gli angoli $\alpha = 90$, 180, 270° le frange scure diventeranno chiare e quelle chiare diventeranno scure.

10. Due fasci coerenti di luce quasi-monocromatica non polarizzata, di uguale intensità, producono su uno schermo frange d'interferenza. Di quale spessore deve essere una lamina cristallina, interposta sul tragitto di uno di questi fasci, perché le frange d'interferenza spariscano di modo che esse non possano essere ristabilite mediante introduzione di una lamina di vetro qualsiasi sul tragitto dell'altro fascio? Quale modificazione subirà il sistema di frange se dietro la lamina cristallina è disposto un polaroid? Per quale posizione del polaroid spariscono le frange d'interferenza?

Soluzione. Scomponiamo mentalmente l'onda luminosa in due componenti i cui vettori elettrici siano reciprocamente perpendicolari e paralleli agli assi principali della lamina. Con l'introduzione della lamina le frange d'interferenza prodotte da ogni componente si spostano. Se la lamina introdotta è a mezzonda, la differenza di questi spostamenti sarà uguale a mezza interfrangia e l'introduzione di questa lamina farà sparire le frange d'interferenza. Introducendo il polaroid, facciamo riapparire le frange, eccetto il caso in cui gli assi del polaroid siano inclinati di 45° rispetto agli assi della lamina. In questo caso non si osserveranno frange d'interferenza.

11. Un'onda luminosa piana è polarizzata ellitticamente. Le lunghezze dei semiassi dell'ellisse delle vibrazioni sono uguali rispettivamente ad a e b. Quale lamina cristallina deve
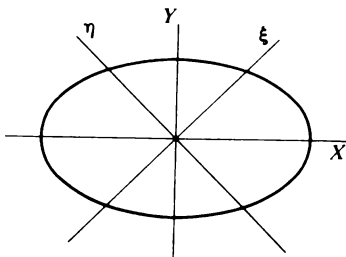
Fig. 275

essere interposta sul tragitto di propagazione dell'onda e come dev'essere orientata questa lamina per ottenere una luce polarizzata circolarmente: 1) dello stesso senso di rotazione; 2) di senso di rotazione opposto?

Soluzione. Nel sistema di assi principali X, Y la vibrazione ellittica ha equazione: $E_X = a\cos\omega t$, $E_Y = b\sin\omega t$ (fig. 275). Passiamo ad un altro sistema ξ, η i cui assi sono le bisettrici del primo sistema. In questo sistema la stessa vibrazione sarà rappresentata nella forma

$$E_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\cos(\omega t - \varphi),$$

$$E_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a\cos\omega t + b\sin\omega t) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\cos[\omega t - (\pi - \varphi)],$$

dove φ è un angolo acuto definito dall'equazione $\operatorname{tg}\varphi = b/a$. Le vibrazioni lungo gli assi ξ e η

sono della stessa ampiezza $\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$, ed inoltre la vibrazione lungo l'asse ξ è in anticipo di fase di un angolo $\delta = \pi - 2\varphi$ rispetto alla vibrazione lungo l'asse η. Interponiamo una lamina cristallina orientandola in modo che i suoi assi siano diretti lungo ξ e η e che essa faccia variare la differenza di fase fino a $\pm \pi/2$. Per farlo deve essere verificata la relazione

$$(\omega t - \varphi - k_\xi l) - (\omega t - \pi + \varphi - k_\eta l) = \pm\pi/2,$$

da cui

$$l = \frac{2\varphi - \pi \pm \pi/2}{k_\eta - k_\xi} = \lambda \frac{\varphi/\pi - 1/2 \pm 1/4}{n_\eta - n_\xi}.$$

L'onda iniziale sarà trasformata allora in un'onda polarizzata circolarmente. Al segno più corrisponde lo stesso senso di rotazione dell'onda ellitticamente polarizzata iniziale, ed al segno meno il senso opposto. Lo stesso risultato si otterrà se lo spessore della lamina viene modificato di $m\lambda/(n_\eta - n_\xi)$,dove m è un numero intero.

§ 79. *Interferenza in luce polarizzata*

1. La scoperta del fenomeno d'*interferenza della luce polarizzata* è di grande importanza per chiarire la questione fondamentale della *natura delle vibrazioni luminose*. Questo fenomeno fu oggetto dei famosi esperimenti di Fresnel ed Arago (1816). È evidente che i raggi inviati da sorgenti di luce
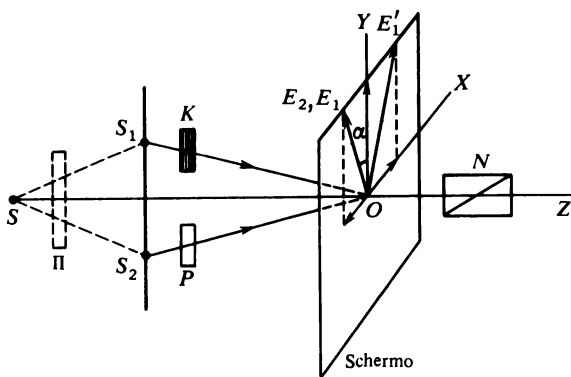
Fig. 276

indipendenti non interferiranno nemmeno se essi vengono preliminarmente fatti passare attraverso un polarizzatore. Perché ci sia interfenenza è necessario che le vibrazioni siano *coerenti*. Ma, come è chiaro dalla formula (26.2), il risultato dell'interferenza dei raggi polarizzati linearmente dipende dall'angolo tra i piani delle vibrazioni luminose. Le frange d'interferenza sono particolarmente nette quando i piani di vibrazione sono paralleli.

L'interferenza non si osserva mai se le onde sono polarizzate in piani ortogonali. Ciò è stato per la prima volta dimostrato negli esperimenti di Fresnel e Arago. Fresnel ne concluse che *le vibrazioni luminose sono trasversali* (si veda il § 26, punto 5).

2. Uno degli schemi possibili per lo studio dell'interferenza di raggi polarizzati è riportato in figura 276. I raggi inviati da una sorgente di luce primaria S attraversano il polaroid Π o un altro polarizzatore. Le sorgenti coerenti secondarie S_1 e S_2 sono realizzate con uno dei metodi applicati negli esperimenti d'interferenza a due fasci. I fasci di raggi che esse emettono sono polarizzati in piani paralleli. Sul tragitto di uno dei fasci è introdotta una lamina cristallina a mezzonda K. Nell'altro fascio, per compensare la differenza di cammino ottico viene introdotta una lamina di vetro P di spessore adeguato. La lamina di vetro non modifica le direzioni delle vibrazioni dell'onda polarizzata linearmente che l'attraversa. La lamina cristallina si comporta allo stesso modo solo nel caso in cui il suo asse ottico sia parallelo o perpendicolare al piano di vibrazione. In questo caso dalle lamine K e P emergono fasci coerenti con uguale polarizzazione. Le direzioni delle vibrazioni di questi fasci sono rappresentate in figura 276 dai vettori coincidenti $\boldsymbol{E}_1$ ed $\boldsymbol{E}_2$.

Se ruotiamo la lamina K attorno alla sua normale di un agnolo α il vettore $\boldsymbol{E}_1$ ruoterà di un angolo 2α e passerà nella posizione $\boldsymbol{E}_1'$ (si veda il problema 5 del paragrafo precedente). Dunque, si può esaminare l'interferenza per differenti valori dell'angolo 2α tra i piani di vibrazione delle onde interferenti.

La figura d'interferenza si può osservare sullo schermo o senza alcuno schermo per mezzo di una lente d'ingrandimento o di un cannocchiale. In quanto segue, il piano dello schermo è preso come piano coordinato XY, la direzione dell'asse ottico della lamina K come asse Y e la normale allo schermo orientata nel senso di propagazione della luce come asse Z. Quindi, se ruotiamo la lamina K, facciamo ruotare anche l'asse Y.

La sovrapposizione delle onde monocromatiche polarizzate linearmente produce dappertutto, anche sullo schermo, una polarizzazione ellittica della luce. Se l'angolo tra i piani di vibrazione resta costante, la forma e l'orientazione dell'ellisse delle vibrazioni variano cambiando la differenza di cammino tra i raggi interferenti. Per certi valori determinati della differenza di cammino le vibrazioni ellittiche possono degenerare in vibrazioni lineari. Le superfici di uguale differenza di cammino (sullo schermo esse saranno linee di uguali differenze di fase) sono simultaneamente superfici (linee) delle ellissi di vibrazioni identiche e di uguale orientamento.

Scomponiamo, nello schema descritto in fig. 276, tutte le vibrazioni secondo gli assi X e Y. Al centro O dello schermo le componenti y dei vettori $\boldsymbol{E}_1'$ ed $\boldsymbol{E}_2$ hanno lo stesso senso, cioè le vibrazioni lungo l'asse Y sono in fase. Le componenti degli stessi vettori lungo l'asse X sono di senso opposto, cioè lungo quest'asse sono in opposizione di fase e si distruggono recipro-

camente. Come risultato, nel punto O, come in ogni altro punto dell'asse X, appare una vibrazione lineare parallela all'asse Y. Se ci si sposta parallelamente all'asse Y di metà frangia, le componenti x delle vibrazioni sono di ugual fase e le componenti y sono in opposizione di fase. La vibrazione risultante è anch'essa lineare, ma orientata secondo l'asse X. Nei punti intermedi, data una differenza di cammino tra i raggi, l'estinzione non può essere completa né per le vibrazioni x, né per quelle y. Ma una di queste vibrazioni è sempre sfasata rispetto all'altra di $\pi/2$: la vibrazione risultante è ellittica, con gli assi principali dell'ellisse paralleli agli assi coordinati X e Y.

3. Il carattere ellittico della polarizzazione si manifesta nell'osservazione della luce attraverso un nicol. Se il nicol fa passare le vibrazioni parallele all'asse Y, sullo schermo si formano frange d'interferenza parallele all'asse X. La frangia centrale passante per il centro O dello schermo (dove la differenza di cammino è nulla) è chiara. Se ruotiamo il nicol di 90° queste frange spariscono, ma compare un altro sistema di frange d'interferenza spostato rispetto al precedente di metà frangia. La frangia centrale di questo nuovo sistema è scura. Dunque, una rotazione del nicol di 90° rispetto alla sua posizione iniziale conduce alla sostituzione delle frange chiare con frange scure e viceversa.

Lo stesso, in particolare, avrà luogo quando la polarizzazione è circolare (nella nostra installazione d'interferenza la lamina cristallina K deve allora essere ruotata di un angolo $\alpha = 45°$ rispetto alla sua posizione iniziale). In questo caso le frange d'interferenza, osservate ad occhio nudo, hanno lo stesso aspetto, quale che sia l'orientazione del nicol. Quando il nicol viene ruotato, le frange si spostano in modo continuo parallelamente a sé stesse. Per una rotazione di 90° questo spostamento è uguale a metà frangia e la direzione delle vibrazioni varia anch'essa di 90°. Se eliminiamo il nicol, si ha una sovrapposizione di due sistemi di frange d'interferenza incoerenti, spostati di una semifrangia l'uno rispetto all'altro, le cui vibrazioni sono reciprocamente perpendicolari. Ciò produce un illuminamento uniforme dello schermo, conformemente al fatto che le onde le cui vibrazioni sono reciprocamente perpendicolari, non interferiscono mai. Dunque, una rotazione di 90° del piano di vibrazione di uno dei raggi polarizzati linearmente (realizzata, per esempio, per rotazione della lamina cristallina K) modifica notevolmente l'illuminamento dello schermo. In assenza di una tale rotazione sullo schermo si osservano frange d'interferenza. Se le frange sono osservate attraverso un nicol, la loro intensità luminosa cambia; le frange spariscono quando le vibrazioni sono perpendicolari alla sezione principale del nicol. Invece, se il piano di vibrazione di uno dei raggi è ruotato di 90° e se non c'è il nicol, non si osserva alcuna frangia d'interferenza. Ma queste frange riappaiono non appena si interpone un nicol e si spostano in modo continuo parallelamente ad esse stesse se il nicol è fatto ruotare; quando il nicol è ruotato di 90° questo spostamento è uguale a metà frangia.

Se lo stesso esperimento è realizzato in luce non polarizzata (eliminando il polaroid Π), l'introduzione della lamina cristallina ruotata di un angolo qualsiasi non modifica la luce naturale che la attraversa. Ma, come ha mostrato e confermato con l'esperienza S.I. Vavilov, deve subire modifiche in questo caso la figura d'interferenza sullo schermo. Ciò è dovuto al fatto che anche dopo l'introduzione della lamina i raggi non restano indipendenti, ma sono in un certo modo correlati tra essi.

Infatti, la luce naturale incidente può essere rappresentata nella forma di una sovrapposizione di onde incoerenti polarizzate linearmente, i cui piani di vibrazione hanno direzioni qualsiasi. Consideriamo una di queste onde. In presenza della lamina cristallina K ed osservando attraverso il nicol N, sullo schermo si vedono i sistemi di frange d'interferenza descritti sopra. È importante notare che la posizione delle frange non dipende dall'angolo tra i piani di vibrazione delle onde interferenti. Quindi, tutte le componenti polarizzate linearmente, nelle quali è scomposta l'onda incidente, formano sistemi di frange nelle stesse posizioni. Ma, visto che questi sistemi non sono coerenti, la loro sovrapposizione porterà soltanto al rafforzamento reciproco delle frange d'interferenza. La rotazione del nicol non modifica l'aspetto delle frange d'interferenza, data l'isotropia statistica della luce naturale rispetto a tutte le direzioni perpendicolari al raggio. Avrà soltanto luogo uno spostamento parallelo delle frange come nel caso della luce polarizzata circolarmente. Se il nicol è ruotato di 90°, le frange chiare vengono sostituite da quelle scure ed inversamente. La situazione cambia quando non c'è la lamina cristallina. In questo caso si osservano le frange d'interferenza, anche senza nicol. Ma con l'introduzione del nicol l'intensità luminosa delle frange d'interferenza diminuisce di due volte, mentre la sua rotazione non esercita alcun'influenza né sulla posizione, né sull'intensità luminosa delle frange.

4. Un caso d'interferenza importante è realizzato nel passaggio attraverso un cristallo di una luce polarizzata. Supponiamo che su una lamina cristallina a facce parallele cada un'onda con un angolo φ (fig. 277). All'interno del cristallo l'onda iniziale si divide in due onde che si propagano in diverse direzioni e con velocità differenti. Siano AB ed AC le normali d'onda di queste onde, e ψ_1 e ψ_2 i corrispondenti angoli di rifrazione. All'interno del cristallo le direzioni di queste normali non coincidono, mentre all'esterno la differenza tra queste direzioni sparisce. Dal cristallo emergono due raggi 1 e 2, paralleli al raggio incidente e polarizzati in piani perpendicolari. La differenza di cammino ottico tra questi raggi è data dall'espressione

$$\Delta = (ACD) - (AB) = n_2 \cdot AC + CD - n_1 \cdot AB,$$

dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione delle onde considerate e D è il piede della perpendicolare abbassata dal punto B sul raggio 2. Se h è lo spessore

della lamina, si ha

$$AC = h/\cos\psi_2, \quad AB = h/\cos\psi_1, \quad CD = h(\mathrm{tg}\,\psi_1 - \mathrm{tg}\,\psi_2)\sin\varphi.$$

Secondo la legge della rifrazione, $\sin\varphi = n_1 \sin\psi_1 = n_2 \sin\psi_2$. Utilizzando queste espressioni, otteniamo

$$\Delta = h(n_2\cos\psi_2 - n_1\cos\psi_1). \tag{79.1}$$

La differenza di cammino Δ tra i raggi 1 e 2 è dovuta a due circostanze: 1) la differenza degli indici di rifrazione n_1 e n_2; 2) la differenza degli angoli
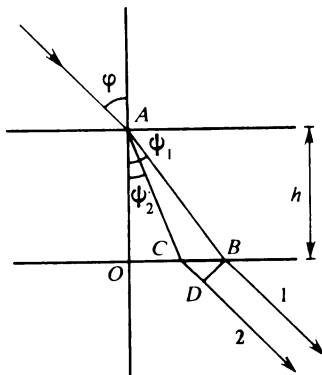
Fig. 277

di rifrazione ψ_1 e ψ_2. La seconda circostanza non è importante e nella maggior parte dei casi può essere trascurata: si può utilizzare un'espressione approssimata

$$\Delta = h\cos\psi(n_2 - n_1), \tag{79.2}$$

dove l'angolo ψ ha un valore intermedio qualsiasi tra quelli degli angoli di rifrazione ψ_1 e ψ_2.

5. La differenza di cammino Δ può essere utilizzata per ottenere le interferenze dei raggi 1 e 2. Se la luce, che cade sulla lamina cristallina, fosse naturale, l'interferenza sarebbe impossibile poiché in questo caso i raggi 1 e 2 non sarebbero correlati. Per ottenere raggi 1 e 2 correlati, la luce incidente dev'essere polarizzata, linearmente o ellitticamente. Ma anche in questo caso, se i raggi 1 e 2 subiscono una sovrapposizione, l'interferenza non apparirà, poiché i raggi 1 e 2 sono polarizzati in piani reciprocamente perpendicolari. È necessario che le vibrazioni in questi raggi avvengano secondo una stessa direzione, cioè occorre far preliminarmente passare i raggi attraverso un nicol. Nel caso di lamine piane a facce parallele, i raggi sono riuniti nel piano focale di una lente e si ottengono frange d'uguale inclinazione. Nel caso delle lamine sottili di spessore variabile si ottengono frange di ugual spessore localizzate sulla superficie delle lamine.

Lo schema per ottenere la cosiddetta *interferenza in raggi paralleli* è riportato in figura 278. La lamina cristallina K è introdotta tra il polarizzatore P e l'analizzatore A. Dopo aver attraversato la lamina cristallina K, la luce polarizzata, uscita dal polarizzatore P, diventa luce polarizzata ellitticamente e poi attraversa l'analizzatore A trasformandosi di nuovo in luce polarizzata linearmente. L'intensità della luce trasmessa dipende dall'orientamento dell'analizzatore; se facciamo ruotare l'analizzatore, l'intensità I varia.

La differenza di fase introdotta durante il passaggio della luce attraverso la lamina cristallina è uguale a $2\pi\Delta/\lambda$, cioè dipende dalla lunghezza d'onda λ. Se l'analizzatore è fisso, la differenza di fase dipende dalla lunghezza d'onda e per questa ragione le frange d'interferenza sono colorate.
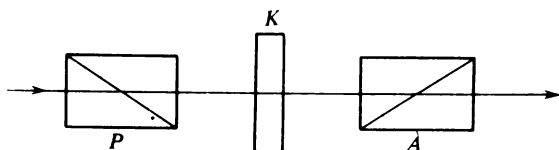
Fig. 278
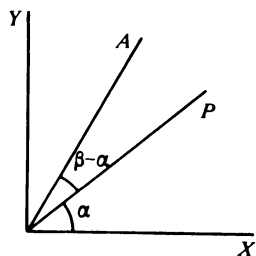
Fig. 279

Quando l'analizzatore è fatto ruotare, la colorazione cambia; quando esso è ruotato di 90°, la colorazione diventa quella complementare, le regioni chiare diventano scure e viceversa. Se le sezioni principali del polarizzatore e della lamina sono reciprocamente parallele o perpendicolari, la lamina sarà attraversata da un solo raggio; visto che non esiste un altro raggio con il quale questo potrebbe interferire, la colorazione sparisce. Tutti questi fenomeni sono stati chiamati *polarizzazione cromatica*, un termine non troppo fortunato dal punto di vista fisico. La polarizzazione cromatica fu scoperta da Arago nel 1811.

Generalmente le sezioni principali del polarizzatore e dell'analizzatore sono poste parallelamente (*nicol paralleli*) o perpendicolarmente le une alle altre (*nicol incrociati*). Nell'ultimo caso l'installazione è molto sensibile nell'evidenziare l'anisotropia dei corpi solidi. Attraverso due nicol incrociati la luce non passa (campo visivo oscuro). Se, invece, introduciamo tra questi nicol un corpo anisotropo, persino in presenza di una debole anisotropia, il sistema comincia a far passare luce (il campo visivo diventa chiaro).

Per un calcolo quantitativo prendiamo le direzioni principali della lamina cristallina come assi coordinati X e Y (fig. 279). Supponiamo che il polarizzatore lasci passare le vibrazioni soltanto nella direzione P e l'analizza-

tore soltanto nella direzione A. Gli angoli tra queste direzioni e l'asse X siano rispettivamente α e β. Prendiamo come unità l'ampiezza della luce uscita dal polarizzatore. All'uscita dalla lamina cristallina l'ampiezza delle vibrazioni sarà allora uguale a $\cos\alpha$ secondo l'asse X ed a $\sin\alpha$ secondo l'asse Y. L'analizzatore lascerà passare solo le vibrazioni d'ampiezza $a_1 = \cos\alpha\cos\beta$ ed $a_2 = \sin\alpha\sin\beta$ rispettivamente, ed inoltre nel passaggio attraverso la lamina, tra le due vibrazioni apparirà una differenza di fase δ. Per composizione di queste vibrazioni si ottiene una vibrazione la cui ampiezza a è data dalla relazione

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\delta = (a_1 + a_2)^2 - 4a_1a_2\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Dopo aver sostituito i valori di a_1 ed a_2 riportati sopra, otteniamo per l'intensità della luce trasmessa

$$I = \cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2\alpha\sin 2\beta\sin^2\frac{\delta}{2}. \qquad (79.3)$$

Le formule (79.3) e (79.1) forniscono la spiegazione di tutte le particolarità dell'interferenza della luce polarizzata in raggi paralleli. Finché la luce è monocromatica e lo spessore della lamina è dappertutto lo stesso, tutte le grandezze che figurano nella (79.3) sono costanti, e la lamina è *illuminata uniformemente*. Se l'analizzatore o il polarizzatore viene fatto ruotare di 90°, l'espressione (79.3) diventa

$$I' = \sin^2(\beta - \alpha) + \sin 2\alpha\sin 2\beta\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Quindi, $I + I' = 1$. Ciò è evidente anche dai ragionamenti generali, poiché con la rotazione menzionata tutta la luce che è stata trasmessa prima viene arrestata e quella arrestata viene trasmessa. Nel caso particolare in cui i nicol sono paralleli ($\alpha = \beta$), si ha

$$I = 1 - \sin^2 2\alpha\sin^2\frac{\delta}{2}, \qquad (79.4)$$

e nel caso in cui essi sono incrociati, si ha

$$I' = \sin^2 2\alpha\sin^2\frac{\delta}{2}. \qquad (79.5)$$

In luce bianca, scomposta nelle sue componenti spettrali, il primo termine della (79.3) resta costante, mentre il secondo dipende dalla lunghezza d'onda e determina la colorazione del campo visivo. Se la direzione P coincide con una delle direzioni principali della lamina ($\alpha = 0$ o $\alpha = \pi/2$), si ha $I = \cos^2(\beta - \alpha)$, cioè l'intensità I è costante e non dipende dalla lunghezza d'onda. In questo caso, come è stato già detto, non c'è alcuna inter

ferenza, e in luce bianca si ottiene un campo visivo non colorato e uniformemente illuminato. La sua intensità può essere variata, ruotando il nicol analizzatore A, ma il campo resta sempre bianco.

6. Fenomeni più complicati si osservano nell'*interferenza in raggi polarizzati convergenti*. Lo schema generalmente utilizzato per l'osservazione di questi fenomeni è rappresentato in figura 280. Un fascio di raggi paralleli di luce polarizzata linearmente è trasformato dalla lente L_1 in un fascio convergente che è concentrato sulla lamina cristallina K. Dopo aver attraversato la lamina K ogni raggio si divide in due raggi paralleli tra i quali appare una differenza di cammino. Se questi raggi si sovrappongono, si ottiene luce polarizzata ellitticamente, nella quale la differenza di cammino tra i
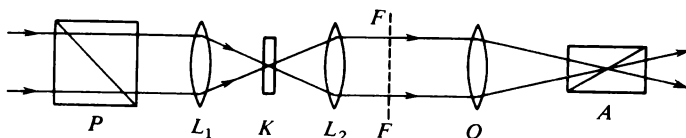
Fig. 280

raggi, nonché il carattere di polarizzazione ellittica, dipendono dall'inclinazione del raggio incidente. La lente L_2, identica a L_1, rende i raggi nuovamente paralleli. La ripartizione dell'illuminamento nel piano focale FF della lente è proiettata dall'obiettivo O e dal nicol analizzatore A su uno schermo, dove si osserva la figura d'interferenza.
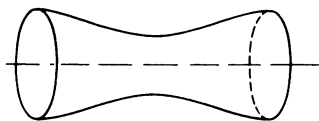
Fig. 281
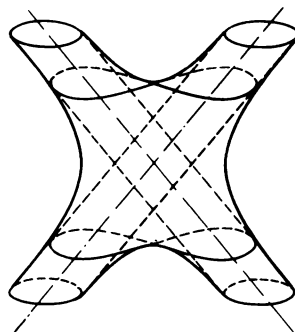
Fig. 282

Per dare un'idea della forma delle frange d'interferenza, introduciamo la nozione di *superficie isocromatica* (superficie di ugual colore). Prendiamo un punto O arbitrario in un mezzo cristallino illimitato ed immaginiamo che per questo punto passino onde piane della stessa fase ed in tutte le

direzioni. In ogni direzione della normale d'onda si propagano due onde polarizzate linearmente in piani reciprocamente perpendicolari. Ad una distanza r dal punto O tra queste onde appare una differenza di cammino $\Delta = (n_2 - n_1)r$, dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione di queste due onde. Dopo aver fissato Δ, portiamo lungo le normali d'onda dei segmenti di lunghezza $r = \Delta/(n_2 - n_1)$. Il luogo geometrico degli estremi di questi segmenti è la superficie di ugual differenza di fase tra le onde che possono propagarsi lungo una stessa normale d'onda. Quest'è la superficie che si chiama *superficie isocromatica*. Attribuendo a Δ tutti i possibili valori, otteniamo una *famiglia di superfici isocromatiche* di centro O comune. Le linee risultanti dalla sezione di questa famiglia con piani sono dette *linee isocro-*

Fig. 283

Fig. 284

matiche, o semplicemente *isocromatiche*. È evidente che le isocromatiche rappresentano *linee aventi differenza di fase costante* tra le corrispondenti onde che possono propagarsi lungo una stessa normale d'onda.

Per un cristallo uniassico la superficie isocromatica è una superficie di rivoluzione attorno all'asse ottico (fig. 281). Nella direzione dell'asse ottico l'isocromatica va all'infinito, poiché per questa direzione coincidono entrambi gli indici di rifrazione n_1 e n_2. Nei cristalli biassici si hanno due direzioni con questa proprietà (fig. 282), che sono gli assi ottici, più precisamente gli assi delle normali (si veda il § 80). Non ci occuperemo della deduzione dell'equazione della superficie isocromatica e ci limitiamo a considerazioni qualitative.

Ricordiamo che le onde che interferiscono appaiono per birifrangenza di una stessa onda incidente. Le normali d'onda risultanti all'interno della lamina cristallina hanno direzioni leggermente differenti, ma trascuriamo questa differenza come abbiamo già fatto quando abbiamo sostituito la formula esatta (79.1) con quella approssimata (79.2). Mostreremo che in quest'approssimazione le frange d'interferenza si possono identificare con

una determinata famiglia di isocromatiche. Infatti, immaginiamo di aver posto sulla faccia anteriore della lamina cristallina K (fig. 280) un piccolo diaframma. (Questo diaframma non è necessario, se il fuoco immagine della lente L_1 si trova sulla faccia anteriore della lamina.) Prendiamo il centro di questo diaframma come centro O della famiglia di superfici isocromatiche. La faccia posteriore della lamina K intersecherà questa famiglia lungo linee isocromatiche. Queste ultime, nell'approssimazione menzionata sopra, coincideranno con le linee d'interferenza sulla faccia posteriore della lamina K. Se il sistema ottico forma un'immagine di questa superficie su uno schermo, si ottiene un'immagine simile del sistema di linee d'interferenza considerato. Con una messa a punto differente, a causa della rifrazione delle normali d'onda all'uscita dalla lamina K, non si ottiene una similitudine completa tra le isocromatiche e le linee d'interferenza. Ma questa circostanza non influisce in modo sostanziale sull'aspetto delle frange d'interferenza. Le isocromatiche riproducono in modo qualitativamente corretto la forma delle frange d'interferenza.

La forma delle isocromatiche e delle frange d'interferenza dipende dalla simmetria del cristallo e dall'orientamento dei suoi assi ottici. In figura 283 sono rappresentate le frange l'interferenza formate da una lamina di cristallo uniassico, tagliata perpendicolarmente all'asse ottico. Conformemente alla simmetria assiale queste frange hanno forma di cerchi concentrici. Questa figura è stata ottenuta tra nicol incrociati. Gli anelli sono intersecati da una croce oscura. La sua origine si spiega in modo molto semplice. Sulla lamina K cade luce polarizzata linearmente. Consideriamo il piano della sezione principale ed un piano ad esso perpendicolare. Supponiamo che entrambi i piani s'intersechino lungo l'asse di rivoluzione del sistema. I raggi contenuti in questi piani non subiscono birifrangenza e quindi non interferiscono. Dopo aver attraversato la lamina entrambi i sistemi di raggi restano linearmente polarizzati, conservando la stessa direzione di vibrazione. L'estinzione di questi raggi è assicurata dal nicol analizzatore. Attorno alle rette lungo le quali i piani considerati s'intersecano con il piano dello schermo, si forma la croce oscura. Se i nicol sono posti in posizione parallela, la figura d'interferenza è sostituita dalla figura complementare e, in particolare, la croce oscura è sostituita da una croce bianca.

Se nell'esperimento precedente sostituiamo la lamina K con due lamine sovrapposte di quarzo destro e sinistro, tagliate perpendicolarmente all'asse ottico, si ottengono figure d'interferenza a spirale, dette *spirali d'Airy* (fig. 284). L'apparizione di queste spirali è dovuta al fatto che il quarzo *fa ruotare il piano di polarizzazione*. Per il quarzo destro questa rotazione si produce in un senso e per quello sinistro in senso inverso.

La figura 285 rappresenta le isocromatiche formate su una lamina tagliata in un cristallo uniassico parallelamente al suo asse ottico, e la figura 286 le isocromatiche formate su una lamina tagliata in un cristallo biassico perpendicolarmente alla bisettrice dell'angolo tra gli assi ottici.

7. L'interferenza dei raggi polarizzati fornisce un metodo comodo e sensibile per rivelare e studiare l'anisotropia ottica dei corpi debolmente anisotropi. A questo scopo è generalmente utilizzato un apparecchio in raggi paralleli a nicol incrociati rappresentato schematicamente in figura 278. Al posto della lamina cristallina si pone il campione in esame. In assenza del campione il sistema ottico non lascia passare alcuna luce. Con l'introduzione di un campione che possiede una certa anisotropia, il campo visivo diventa più chiaro e se si opera in luce bianca diventa colorato. Questo metodo è utilizzato per studiare l'*anisotropia artificiale*.
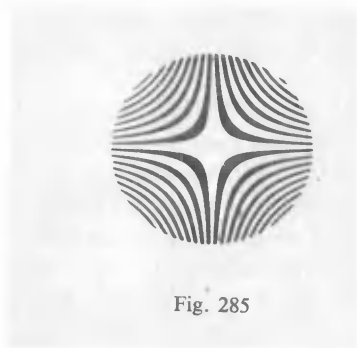
Fig. 285
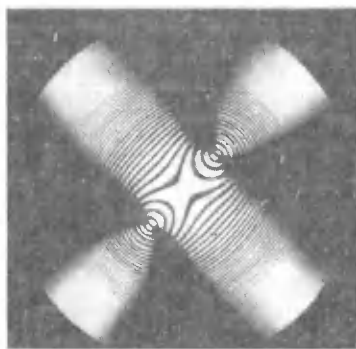
Fig. 286

Nel 1815 Brewster scoprì la *birifrangenza per deformazione meccanica* dei corpi isotropi. Il mezzo può essere costituito da molecole anisotrope. In assenza di deformazioni, queste molecole sono orientate caoticamente, ed il mezzo è macroscopicamente isotropo. Nelle deformazioni l'orientamento spaziale e la disposizione delle molecole si modificano consentendo spesso la comparsa di un orientamento privilegiato delle molecole e ciò porta all'apparizione della birifrangenza. Nel caso semplice di una compressione o di una trazione unilaterale il corpo si comporta come un cristallo uniassico ad asse ottico lungo la direzione della deformazione. L'esperienza mostra che la differenza $n_o - n_e$ tra gli indici di rifrazione ordinario e straordinario è proporzionale allo sforzo applicato ed il coefficiente di proporzionalità dipende dalla lunghezza d'onda. L'effetto si conserva anche in presenza di deformazioni residue; esso è utilizzato per lo studio di contrazioni elastiche e di deformazioni residue nei corpi solidi. La birifrangenza si manifesta nei liquidi a molecole anisotrope (effetto Maxwell), nonché nell'introduzione dei corpi in un campo elettrico o magnetico (si vedano i §§ 90 e 91).

1. Dire perché non si ottiene mai interferenza tra i raggi ordinario e straordinario uscenti da una lamina tagliata da un cristallo birifrangente e tanto sottile da non permettere una separazione notevole dei raggi.

2. Dire perché gli esperimenti concernenti l'interferenza di raggi polarizzati si possono eseguire più comodamente con lamine sottili che con quelle spesse. Perché persino con lamine sottili di spato d'Islanda è difficile ottenere figure d'interferenza in luce bianca?

Risposta. Lo spato d'Islanda ha una differenza molto grande tra gli indici d'interferenza ordinario e straordinario, cosicché persino in lamine sottili si ottengono grandi differenze di cammino per le quali è impossibile l'interferenza in luce bianca.

3. Due lamine spesse tagliate da un cristallo uniassico, di spessore quasi uguale ed ugualmente orientate, trasmettono ognuna luce bianca quando vengono poste tra due nicol incrociati. Dire perché nelle stesse condizioni può apparire una colorazione quando si fa ruotare di 90° una lamina rispetto all'altra.

Soluzione. Quando le lamine hanno lo stesso orientamento, la differenza di cammino da esse introdotta è grande, cioè corrisponde ad un grande ordine d'interferenza. In queste condizioni non può essere osservata l'interferenza in luce bianca. Se facciamo ruotare di 90° una lamina rispetto all'altra, la differenza di cammino introdotta da queste lamine è uguale alla differenza di cammino prodotta da una lamina di spessore uguale alla differenza tra gli spessori delle lamine considerate. Se la differenza tra questi spessori è piccola, la differenza di cammino può essere sufficientemente piccola da rendere possibile l'interferenza in luce bianca.

4. Una lamina di quarzo di spessore 1 mm è tagliata perpendicolarmente all'asse ottico. Come si può determinare se il quarzo è destro o sinistro, disponendo di due nicol e di una sorgente: 1) di luce monocromatica, 2) di luce bianca?

Risposta. 1) Ponendo la lamina di quarzo tagliata perpendicolarmente all'asse ottico tra i nicol incrociati ed illuminando il sistema con luce monocromatica, il sistema trasmette la luce; l'estinzione della luce è realizzata per rotazione dell'analizzatore di un angolo inferiore a 90°. Se l'osservatore deve ruotare l'analizzatore in senso orario, il quarzo è destrogiro, e se la rotazione è effettuata in senso antiorario, il quarzo è levogiro.

2) Se il sistema è illuminato da luce bianca, la lamina apparirà colorata. Il potere rotatorio aumenta con la diminuzione della lunghezza d'onda. Perciò, se l'analizzatore è ruotato in senso orario, per il quarzo destrogiro la colorazione evolverà verso le onde corte dello spettro; se il quarzo è levogiro la colorazione evolverà verso le onde lunghe.

§ 80. *Velocità normali e polarizzazione delle onde nei cristalli biassici*

1. Studiamo ora la propagazione delle onde nei *cristalli biassici dal punto di vista ottico*. Nel caso generale il vettore $\boldsymbol{D}$ può dipendere non soltanto dal vettore $\boldsymbol{E}$ ma anche dalle sue derivate spaziali. Questo fenomeno è detto *dispersione spaziale* (si veda il § 96). Si può ammettere che nei campi deboli tale dipendenza sia lineare. Per le onde monocromatiche piane la derivazione di $\boldsymbol{E}$ rispetto alle coordinate x, y, z si riduce ad una moltiplicazione delle sue proiezioni per $-ik_x$, $-ik_y$, $-ik_z$. In questo caso la variazione di $\boldsymbol{D}$ in funzione delle derivate spaziali può essere presa in considerazione mediante la formula (75.2), a condizione di considerare che il tensore dielettrico ε_{kj} è

complesso. Formalmente si può farlo anche nel caso di onde non piane, ma queste ultime debbono essere supposte monocromatiche.

Per i mezzi non assorbenti il tensore dielettrico deve essere ***hermitiano***, cioè $\varepsilon_{kj} = \varepsilon^*_{jk}$. Infatti, la derivata della densità u dell'energia elettromagnetica rispetto al tempo è data da (si veda vol. III, § 84)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}).$$

Per un'onda monocromatica in un mezzo non assorbente, il valore medio di questa derivata, per la legge di conservazione dell'energia, deve essere nullo. Se utilizziamo l'espressione complessa del campo monocromatico, questa condizione si scrive come segue: $(\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}^* + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}^*)$ + complessa coniugata = 0. Ma, visto che trascuriamo la differenza tra $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$, si ha $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}^*$ + + complessa coniugata = 0. Tenendo conto delle relazioni $\dot{\mathbf{D}} = i\omega\mathbf{D}$, $\dot{\mathbf{D}}^* = -i\omega\mathbf{D}^*$, ne segue che $\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{E}^*\mathbf{D} = 0$, ossia

$$\sum E_\alpha \varepsilon^*_{\alpha\beta} E^*_\beta - \sum E^*_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = 0.$$

Sostituiamo nella prima somma l'indice muto α con β e viceversa. Si ha allora

$$\sum (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha}) E^*_\alpha E_\beta = 0.$$

Questa relazione deve essere verificata per un campo $\mathbf{E}$ qualsiasi, il che è possibile se e solo se $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$. Infatti, siano nulle tutte le componenti del vettore $\mathbf{E}$, eccezion fatta per E_α. La relazione precedente diventa allora $(\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\alpha})E_\alpha E^*_\alpha = 0$, da cui $\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon^*_{\alpha\alpha}$. Supponiamo ora che due componenti E_α e E_β siano diverse da zero e la terza componente sia nulla. Si ha allora

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha})E^*_\alpha E_\beta + (\varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\beta})E_\alpha E^*_\beta = 0.$$

Ponendo qui $E_\alpha = E_\beta$, otteniamo

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha}) + (\varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\beta}) = 0.$$

Invece, ponendo $E_\beta = iE_\alpha$, troviamo

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^*_{\beta\alpha}) - (\varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon^*_{\alpha\beta}) = 0.$$

Da questa relazione e da quella precedente segue che $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$. Dunque, la relazione $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}$ è valida sia che gli indici α e β siano identici oppure differenti, cioè per i cristalli non assorbenti il tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ è hermitiano. Per i cristalli assorbenti esso non è hermitiano.

Ammettiamo ora che il mezzo non presenti nessuna dispersione spaziale o che si possa trascurare questo fenomeno, data la sua piccolezza. Le quantità $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sono allora reali e perciò $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$, cioè il tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ è *simmetrico*.

Nel seguito ci limitiamo a questo caso. Supponiamo inoltre che tutti gli elementi diagonali $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ siano *positivi*. Il mezzo è allora *trasparente*, cioè le onde piane si propagano in esso senza attenuazione. In caso contrario apparirà un'attenuazione senza assorbimento, come succede per esempio nel plasma (si veda il § 87).

Ogni tensore simmetrico può essere ridotto alla cosiddetta *forma diagonale*, cioè si può trovare un sistema di coordinate ortogonali tale che le componenti non diagonali del tensore s'annullano. Le componenti diagonali del tensore in questo sistema di coordinate vengono indicate con ε_x, ε_y, ε_z, cioè con indici x, y, z. Nel sistema considerato le equazioni materiali diventano

$$D_\alpha = \varepsilon_\alpha E_\alpha. \tag{80.1}$$

Gli assi coordinati, rispetto ai quali il tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ è diagonale, sono detti *assi principali del tensore* o *assi dielettrici del cristallo*, e le grandezze ε_x, ε_y, ε_z sono *costanti dielettriche principali*. Prendiamo questi assi come assi coordinati e li indichiamo con X, Y, Z in un ordine tale che siano verificate le disuguaglianze

$$\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_y \leqslant \varepsilon_z. \tag{80.2}$$

Visto che le componenti del tensore $\varepsilon_{\alpha\beta}$ possono dipendere dalla lunghezza d'onda λ, anche le direzioni degli assi dielettrici possono dipenderne. Questo fenomeno, detto *dispersione degli assi dielettrici*, s'incontra realmente nei cristalli triclini e monoclini che sono caratterizzati dalla simmetria più bassa.

Notiamo infine che l'angolo α tra i vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{D}$ è sempre acuto. Ciò è dovuto al fatto che il prodotto scalare $(\boldsymbol{ED}) = ED\cos\alpha$ è proporzionale alla densità d'energia elettrica che è essenzialmente positiva.

2. Passiamo ora ad uno studio generale delle onde piane (75.3) che si propagano nei cristalli trasparenti. Fissiamo la direzione della normale d'onda $\boldsymbol{N}$ e cerchiamo le onde piane che possono propagarsi in questa direzione. Utilizzando le equazioni materiali (80.1), riscriviamo la relazione (75.7) nella seguente forma:

$$(v^2 - a_\alpha^2)D_\alpha = -c^2(\boldsymbol{NE})N_\alpha, \tag{80.3}$$

dove è stata introdotta la notazione

$$a_\alpha = c/\sqrt{\varepsilon_\alpha}. \tag{80.4}$$

Dividendo per $v^2 - a_\alpha^2$, otteniamo

$$D_\alpha = -\frac{c^2}{v^2 - a_\alpha^2}(\boldsymbol{NE})N_\alpha. \tag{80.5}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri di questa relazione per N_α e sommiamo su α. Si ha allora

$$\sum_\alpha D_\alpha N_\alpha \equiv (\boldsymbol{DN}) = -c^2(\boldsymbol{NE}) \sum_\alpha \frac{N_\alpha^2}{v^2 - a_\alpha^2} = 0,$$

poiché $(\boldsymbol{DN}) = 0$. Il prodotto scalare $(\boldsymbol{NE})$ è generalmente diverso da zero. Di conseguenza

$$\sum \frac{N_\alpha^2}{v^2 - a_\alpha^2} = 0. \tag{80.6}$$

Nella forma sviluppata

$$\frac{N_x^2}{v^2 - a_x^2} + \frac{N_y^2}{v^2 - a_y^2} + \frac{N_z^2}{v^2 - a_z^2} = 0, \tag{80.7}$$

e dopo l'eliminazione dei denominatori

$$F(v^2) \equiv N_x^2(v^2 - a_y^2)(v^2 - a_z^2) + N_y^2(v^2 - a_z^2)(v^2 - a_x^2) + N_z^2(v^2 - a_x^2)(v^2 - a_y^2) = 0. \tag{80.8}$$

Benché l'equazione (80.8) sia stata ottenuta per trasformazione della (80.7), essa possiede in realtà una generalità maggiore. Come si vede dalla deduzione, per ottenere la (80.7) è stato necessario supporre che $v^2 - a_\alpha^2 \neq \neq 0$ e $(\boldsymbol{NE}) \neq 0$. L'equazione (80.7) perde senso quando almeno una delle differenze $v^2 - a_\alpha^2$ s'annulla. L'equazione (80.8) invece resta valida anche in questo caso, come dimostra un semplice studio matematico che omettiamo.

3. L'equazione (80.6) o (80.8) esprime *la legge di Fresnel per le velocità normali di propagazione delle onde luminose nei cristalli*. Se è data la direzione della normale $\boldsymbol{N}$, queste equazioni permettono di calcolare la velocità normale v. L'equazione (80.8) è di secondo grado in v^2. Dimostriamo che essa possiede radici reali e positive. Per i cristalli trasparenti le permettività dielettriche principali, e quindi le quantità a_α^2, sono essenzialmente positive, e dalla condizione (80.2)

$$a_x \geqslant a_y \geqslant a_z. \tag{80.9}$$

Attribuendo i valori a_x^2, a_y^2, a_z^2 all'argomento v^2 della funzione $F(v^2)$, otteniamo le disuguaglianze:

$$F(a_x^2) = N_x^2(a_x^2 - a_y^2)(a_x^2 - a_z^2) \geqslant 0,$$
$$F(a_y^2) = N_y^2(a_y^2 - a_z^2)(a_y^2 - a_x^2) \leqslant 0,$$
$$F(a_z^2) = N_z^2(a_z^2 - a_x^2)(a_z^2 - a_y^2) \geqslant 0.$$

Queste disuguaglianze mostrano che la funzione $F(v^2)$ cambia di segno due volte: una volta tra a_x^2 ed a_y^2 e l'altra volta tra a_y^2 ed a_z^2. Quindi, l'equazione $F(v^2) = 0$ possiede due radici reali e positive: v_1^2 e v_2^2, ed inoltre

$$a_x \geqslant v_1 \geqslant a_y \geqslant v_2 \geqslant a_z. \tag{80.10}$$

Ne segue che nella direzione N possono propagarsi due onde: l'una con la velocità normale v_1 e l'altra con la velocità normale v_2. In casi particolari le velocità v_1 e v_2 possono coincidere.

Se le velocità v_1 e v_2 sono differenti, ogni onda sarà polarizzata linearmente. Ciò segue dalla relazione

$$D_x : D_y : D_z = \frac{N_x}{v^2 - a_x^2} : \frac{N_y}{v^2 - a_y^2} : \frac{N_z}{v^2 - a_z^2}, \tag{80.11}$$

che risulta dalla (80.5) e nella quale con v si deve intendere v_1 e v_2. Tutte le grandezze che figurano nel secondo membro delle (80.11) sono reali. Ne segue che tra le componenti D_x, D_y, D_z non ci sono sfasamenti diversi da 0 o da π, e quindi l'onda è polarizzata linearmente.

Dimostriamo che se le velocità v_1 e v_2 sono differenti, i vettori $\boldsymbol{D}$ delle due onde che possono propagarsi nella direzione $\boldsymbol{N}$ sono ortogonali. Indicando con l'indice 1 le grandezze appartenenti ad una delle onde e con l'indice 2 quelle appartenenti all'altra, otteniamo dalla (75.7)

$$v_1^2 \boldsymbol{D}_1 - c^2 \boldsymbol{E}_2 = -c^2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{E}_1)\boldsymbol{N},$$
$$v_2^2 \boldsymbol{D}_2 - c^2 \boldsymbol{E}_2 = -c^2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{E}_2)\boldsymbol{N}.$$

Moltiplichiamo scalarmente la prima equazione per $\boldsymbol{D}_2$ e la seconda per $\boldsymbol{D}_1$ e sottraiamo membro a membro. Visto che $(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{N}) = (\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{N}) = 0$, si ottiene

$$(v_1^2 - v_2^2)\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 = c^2(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{D}_1).$$

Ma, evidentemente, si ha $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{D}_1$, poiché ciascuno di questi prodotti scalari è uguale a $\sum \varepsilon_\alpha E_{1\alpha} E_{2\alpha}$. Si ha quindi

$$(v_1^2 - v_2^2)\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 = 0.$$

Ne segue che per $v_1 \neq v_2$ si ha $(\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2) = 0$, come si voleva dimostrare. Si dimostra in modo analogo che $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2) = 0$.

*In ogni direzione nel cristallo possono propagarsi due onde linearmente polarizzate le cui velocità sono, in generale, differenti. Entrambe le onde sono trasversali rispetto ai vettori **D** e **B**. I vettori **D** (ed anche i vettori **B**) sono reciprocamente perpendicolari in queste onde. Rispetto al vettore **E** entrambe le onde nel cristallo non sono trasversali, eccetto i casi in cui il vettore **E** sia parallelo ad uno degli assi dielettrici del cristallo.* Ma la divisione delle onde in onde ordinarie e straordinarie è possibile solo per *cri-*

stalli uniassici. Nel caso generale questa divisione non ha senso: entrambe le onde si comportano nel cristallo come onde straordinarie.

Per chiarire il significato fisico delle costanti a_α orientiamo il vettore $\boldsymbol{E}$ secondo l'asse dielettrico α. Si ha allora $\boldsymbol{D} = \varepsilon_\alpha \boldsymbol{E}$ e l'equazione (75.8) diventa

$$v^2 = c^2 \frac{\varepsilon_\alpha E^2}{\varepsilon_\alpha^2 E^2} = \frac{c^2}{\varepsilon_\alpha} = a_\alpha^2,$$

da cui $v = a_\alpha$. Dunque, *la quantità a_α è la velocità normale di propagazione dell'onda il cui vettore elettrico è parallelo all'asse dielettrico α.* Quest'affermazione diventa evidente se osserviamo che, nel caso particolare in cui il campo elettrico sia parallelo all'asse dielettrico, le equazioni di propagazione delle onde nel cristallo non differiscono dalle equazioni nei mezzi isotropi.

Le quantità a_α sono dette *velocità principali di propagazione della luce nei cristalli*. Insieme con le velocità principali, per caratterizzare le proprietà ottiche dei cristalli vengono utilizzati gli *indici di rifrazione principali* definiti dalle espressioni

$$n_\alpha = c/a_\alpha = \sqrt{\varepsilon_\alpha}. \qquad (80.12)$$

Per un'onda di direzione arbitraria l'indice di rifrazione del cristallo è definito dall'espressione

$$n = c/v. \qquad (80.13)$$

Come si vede dalla (75.8), il suo valore è univocamente definito dalla direzione del vettore $\boldsymbol{D}$ o $\boldsymbol{E}$. Ad ogni direzione della normale N corrispondono *due* valori dell'indice di rifrazione, conformemente alle due polarizzazioni d'onda possibili.

4. Per esaminare l'equazione di Fresnel applichiamo un metodo geometrico. Da un punto abritrario O tracciamo in diverse direzioni delle rette e riportiamo su ogni retta segmenti di lunghezza uguale ai valori delle velocità normali in queste direzioni. Il luogo geometrico delle estremità di questi segmenti si dice *superficie delle normali*. In ogni cristallo a ciascuna direzione della normale corrispondono due valori della velocità. Perciò la superficie delle normali in un cristallo è una *superficie doppia*, cioè è costituita da due falde. Questa è una superficie del *sesto ordine* ed è di forma molto complicata. Per avere un'idea della superficie delle normali delle onde elettromagnetiche in un cristallo, consideriamo le sezioni di questa superficie con i piani coordinati XY, YZ, ZX.

Sezione con il piano XY. La normale d'onda è situata nel piano XY, cioè $N_z = 0$. L'equazione di Fresnel (80.8) assume la forma

$$(v^2 - a_z^2)[N_x^2(v^2 - a_y^2) + N_y^2(v^2 - a_x^2)] = 0.$$

Da quest'equazione si ottengono due valori delle velocità normali

$$v_2 = a_z, \quad v_1^2 = N_x^2 a_y^2 + N_y^2 a_x^2. \tag{80.14}$$

La velocità v_2 non dipende dalla direzione di N, ad essa corrisponde quindi una *sezione circolare* della superficie delle normali (fig. 287). La velocità v_1 varia con la direzione di N e ad essa corrisponde una sezione della superficie delle normali avente forma *ovale*. Dalle equazioni (80.14) segue che $v_1 \geqslant v_2$ il che significa che il cerchio è interamente contenuto all'interno dell'ovale. Il vettore $\boldsymbol{D}$ dev'essere perpendicolare a N. Da considerazioni di simmetria è evidente che il vettore $\boldsymbol{D}$ di un'onda è parallelo all'asse Z ed il
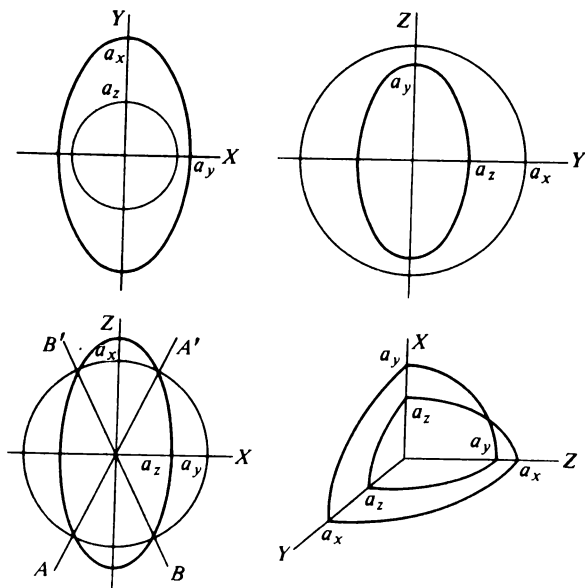
Fig. 287

vettore $\boldsymbol{D}$ dell'altra onda è parallelo al piano XY. Alla prima direzione del vettore $\boldsymbol{D}$ corrisponde una *sezione circolare* della superficie delle normali ed alla seconda una sezione *ovale*.

Sezione con il piano YZ. La normale d'onda N è contenuta nel piano YZ, cioè $N_x = 0$. L'equazione di Fresnel assume la froma

$$(v^2 - a_x^2)[N_y^2(v^2 - a_z^2) + N_z^2(v^2 - a_y^2)] = 0.$$

Essa fornisce due valori delle velocità normali:

$$v_1 = a_x, \quad v_2^2 = N_y^2 a_z^2 + N_z^2 a_y^2. \tag{80.15}$$

La velocità v_1 non dipende dalla direzione di N, ad essa corrisponde una *se-*

zione circolare della superficie delle normali ed il vettore $\boldsymbol{D}$ parallelo all'asse X. La velocità v_2 varia con la variazione della direzione di N e ad essa corrisponde una *sezione ovale* della superficie delle normali ed il vettore $\boldsymbol{D}$ parallelo al piano YZ. Questa sezione è interamente contenuta all'interno del cerchio, dato che $v_2 \leqslant v_1$, conformemente alle equazioni (80.15).

Sezione con il piano ZX. La normale d'onda N appartiene al piano ZX, cioè $N_y = 0$. L'equazione di Fresnel assume la forma

$$(v^2 - a_y^2)[N_z^2(v^2 - a_x^2) + N_x^2(v^2 - a_z^2)] = 0$$

e fornisce due valori delle velocità normali

$$v_1 = a_y, \quad v_2^2 = N_z^2 a_x^2 + N_x^2 a_z^2. \tag{80.16}$$

La velocità v_1 non dipende dalla direzione di N, ad essa corrisponde una *sezione circolare* della superficie delle normali ed il vettore $\boldsymbol{D}$ parallelo all'asse Y. La velocità v_2 varia in funzione della direzione di N e ad essa corrisponde una *sezione ovale* della superficie delle normali ed il vettore $\boldsymbol{D}$ parallelo al piano ZX.

5. Il terzo dei casi considerati differisce sostanzialmente dai primi due. Nei primi due casi l'ovale ed il cerchio non s'intersecano, mentre nel terzo caso essi s'intersecano in quattro punti (fig. 287). Ciò vuol dire che il piano ZX contiene *due direzioni* AA' e BB', simmetriche rispetto all'asse Z, lungo le quali entrambe le onde si propagano con una stessa velocità normale. *Le direzioni secondo le quali coincidono le velocità normali delle onde, si chiamano assi ottici di seconda specie o assi delle normali, o anche binormali.*

Se in un cristallo tutte e tre le velocità principali a_x, a_y, a_z *sono diverse, in questo cristallo esistono due e solo due assi ottici di seconda specie.* Infatti, se il vettore N è orientato secondo un asse ottico di seconda specie, dev'essere $v_1 = v_2$. In virtù delle relazioni (80.10) ciò è possibile solo se $v_1 = v_2 = a_y$. Ma in questo caso l'equazione (80.8) fornisce il seguente risultato: $N_y^2(a_y^2 - a_z^2)(a_y^2 - a_x^2) = 0$. Visto che per ipotesi $a_x \neq a_y \neq a_z$, ne segue che $N_y = 0$. Ciò vuol dire che gli assi ottici sono contenuti nel piano ZX; ma, come abbiamo dimostrato sopra, in questo piano sono contenuti due e solo due assi ottici di seconda specie che sono simmetricamente disposti rispetto all'asse Z e sono inclinati su questo asse di un certo angolo β. Per trovare β sostituiamo nell'uguaglianza $v_1 = v_2$ i valori di v_1 e v_2 forniti dalle formule (80.16). Si ottiene quindi

$$a_y^2 = N_z^2 a_x^2 + N_x^2 a_z^2 \qquad \text{o} \qquad a_y^2(N_x^2 + N_z^2) = N_z^2 a_x^2 + N_x^2 a_z^2,$$

da cui

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N_x}{N_z} = \sqrt{\frac{a_x^2 - a_y^2}{a_y^2 - a_z^2}}. \tag{80.17}$$

Ora è giustificato il termine « cristallo otticamente biassico » che abbiamo già utilizzato.

Se coincidono due delle tre velocità principali ($a_x = a_y$ o $a_y = a_z$), gli assi ottici si confondono in un solo asse parallelo all'asse Z (se $a_x = a_y$) o all'asse X (se $a_y = a_z$). Il cristallo diventa *otticamente uniassico*. Infine, se tutte e tre le velocità principali sono uguali, ogni direzione nel cristallo possiede proprietà di asse ottico. In tali cristalli le onde piane, indipendentemente dalle loro polarizzazione e direzione, si propagano con una stessa velocità: i cristalli dal punto di vista ottico si comportano come *mezzi isotropi*. I cristalli cubici sono cristalli isotropi [1].

Problemi

1. Dire come si deve orientare una lamina tagliata da un cristallo biassico perché le misure al rifrattometro forniscano i valori dei tre indici di rifrazione principali.

Risposta. La lamina dev'essere orientata perpendicolarmente ad uno degli assi dielettrici del cristallo.

2. Basandosi su considerazioni di simmetria, dimostrare che tutti i cristalli tri-, tetra- ed esagonali sono uniassici dal punto di vista ottico.

§ 81. *Raggi luminosi, normali d'onda e loro relazione*

1. La propagazione della luce nei cristalli, come quella di qualsiasi onda nei mezzi anisotropi, è caratterizzata da una rimarchevole *dualità* o *reciprocità*. Questa reciprocità è dovuta al fatto che nei mezzi anisotropi ad ogni normale d'onda corrisponde un raggio luminoso, cioè una retta lungo la quale si propaga l'energia dell'onda. Visto che l'energia si propaga con la velocità di gruppo, per esaminare le proprietà dei raggi luminosi e giustificare la nozione stessa di raggio, è necessario calcolare la velocità di gruppo nel mezzo anisotropo. In questo caso la velocità di gruppo è detta anche *velocità radiale*. Per calcolarla utilizziamo la formula (8.16), ponendo in essa $\omega = kv(k)$. Derivando rispetto a k_i e tenendo conto che $\partial k/\partial k_i = k_i/k$, otteniamo

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_i} = v\frac{k_i}{k} + k\frac{\partial v}{\partial k_i}.$$

---

[1] Si deve però notare che nel caso di *dispersione spaziale* i cristalli cubici possono essere otticamente anisotropi. Già H.A. Lorentz notò questa possibilità, ma solo nel 1960 E.F. Gross ed A.A. Kapljanskij osservarono il fenomeno d'assorbimento anisotropo della luce nei monocristalli di Cu_2O.

Si deduce di qui che il vettore velocità di gruppo è

$$\boldsymbol{u} = v\boldsymbol{N} + \boldsymbol{k}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{k}}, \tag{81.1}$$

dove $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{k}/k$ è il vettore unitario della normale d'onda e v la *velocità normale*, cioè la velocità di propagazione della fase secondo la normale d'onda.

La velocità di gruppo $\boldsymbol{u}$ in un mezzo anisotropo differisce dalla velocità normale v per un termine addizionale $k\,\partial v/\partial \boldsymbol{k}$. Questo termine contiene a sua volta una componente secondo la normale N. Per determinarla, osserviamo che $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{N}$ e quindi la componente menzionata è uguale a $\boldsymbol{k}\,\partial v/\partial \boldsymbol{k}$. Perciò la velocità di gruppo $\boldsymbol{u}_N$ nella direzione della normale d'onda N può essere espressa da

$$\boldsymbol{u}_N = \left(v + k\frac{\partial v}{\partial k}\right)\boldsymbol{N} = \left(v - \lambda\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)\boldsymbol{N}. \tag{81.2}$$

Questo risultato coincide con la formula di Rayleigh (8.6) per la velocità di gruppo in un mezzo isotropo. Questo era prevedibile, poiché questo risultato concerne non tutto il vettore velocità di gruppo, ma soltanto la sua proiezione sulla direzione della normale d'onda. Il calcolo di questa proiezione può essere effettuato esattamente come il calcolo della velocità di gruppo in un mezzo isotropo.

La differenza di u_N da v è dovuta alla *dispersione delle onde*, cioè alla dipendenza della velocità normale v dalla frequenza ω. La dispersione è in egual misura propria sia ai mezzi isotropi, sia a quelli anisotropi. La particolarità della propagazione delle onde luminose nei cristalli è dovuta non tanto alla dispersione, quanto alla *differenza delle direzioni delle normali d'onda e dei raggi*. Per non complicare le cose, trascuriamo completamente la dispersione, cioè supporremo che i cristalli *non siano dispersivi*. Si ha allora $\partial v/\partial \lambda = 0$, e quindi $\boldsymbol{u}_N = v\boldsymbol{N}$, o $u_N = v$. Ma $u_N = (\boldsymbol{u}\boldsymbol{N})$, e quindi

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{N}) = v. \tag{81.3}$$

2. Insieme con la superficie delle normali introdotta nel paragrafo precedente, introduciamo ancora la *superficie radiale*, detta anche a volte *superficie d'onda*. A questo scopo tracciamo da un punto arbitrario O raggi in tutte le possibili direzioni e riportiamo su questi raggi i valori della velocità radiale in queste direzioni. Il luogo geometrico delle estremità dei segmenti così costruiti è una superficie chiusa chiamata *superficie d'onda*.

Se la superficie d'onda e la superficie delle normali sono costruite a partire da un centro comune O, tra queste due superfici esiste una relazione semplice ed importante. Per stabilire questa relazione moltiplichiamo la

formula (81.3) per k e le daremo la forma

$$(\boldsymbol{uk}) = \omega. \tag{81.4}$$

Ne segue che le variazioni infinitesimali delle grandezze $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{k}$, ω sono legate tra loro dalla relazione $(\boldsymbol{u}\delta\boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{k}\delta\boldsymbol{u}) = \delta\omega$. Per definizione di velocità di gruppo, $(\boldsymbol{u}\delta\boldsymbol{k}) = \delta\omega$. Quindi, $(\boldsymbol{k}\delta\boldsymbol{u}) = 0$, o

$$(\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{u}) = 0. \tag{81.5}$$

Ma $\boldsymbol{u}$ è il raggio vettore della superficie d'onda, e perciò ogni vettore infinitesimale $\delta\boldsymbol{u}$ appartiene ad un piano tangente a questa superficie nel corrispondente punto di tangenza. Perciò dalle formule (81.5) e (81.3) segue che *il piano tangente alla superficie d'onda è perpendicolare alla corrispondente normale d'onda e taglia su questa un segmento uguale alla velocità normale dell'onda*. Ne segue a sua volta che *la superficie d'onda è l'inviluppo delle onde piane propagatesi dal suo centro nell'unità di tempo in tutte le direzioni*. Proprio questi teoremi stabiliscono la relazione geometrica cercata tra la superficie d'onda e la superficie delle normali.

Si può anche dire che *il piano tangente alla superficie d'onda è il fronte d'onda corrispondente al raggio tracciato dal punto di tangenza*. In questa forma il teorema ammette un'interpretazione semplice. Infatti, la superficie d'onda è la superficie di ugual fase sulla quale arriva la perturbazione luminosa emessa da una sorgente puntiforme in un secondo. Un piccolo elemento di questa superficie può essere considerato piano. Se le dimensioni di quest'elemento sono ancora molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda, la sua propagazione durante un corto intervallo di tempo obbedirà in modo sufficientemente preciso alle leggi dell'ottica geometrica. Secondo queste leggi, l'elemento di superficie deve propagarsi come un'onda piana illimitata nella direzione del raggio, ed inoltre le velocità radiale e normale sono legate dalla relazione (81.3). Ne segue direttamente che il fronte d'onda è il piano tangente alla superficie d'onda.

Quest'interpretazione semplice non può però sostituire una dimostrazione rigorosa. Essa è basata sull'affermazione che un fascio divergente, emesso da una sorgente puntiforme, si comporta come un sistema di onde piane indipendenti l'una dall'altra, la cui propagazione è in modo puramente geometrico rappresentata mediante la superficie d'onda. Per la prima volta nel 1852 Lamè (1795-1870) notò che si trattava di un problema matematico complesso: rappresentare in un modo preciso il complesso d'onde inviate in un mezzo anisotropo da una sorgente puntiforme (per analogia con un'onda sferica propagantesi in un mezzo isotropo). Lamé risolse questo problema per un *mezzo anisotropo elastico*, ed eliminando le onde longitudinali arrivò alla forma di Fresnel della superficie d'onda. Nella teoria elettromagnetica la questione analoga si riconduce al calcolo del campo creato da *un dipolo di Hertz puntiforme messo in un mezzo anisotropo omogeneo*.

3. Quanto esposto è valido per *qualsiasi onda che si propaga in mezzi anisotropi*. Il comportamento particolare delle onde elettromagnetiche nei cristalli consiste nel fatto che per queste onde la direzione dei raggi coincide con quella del *vettore di Poynting*. Dimostriamo quest'affermazione per il caso di cristalli non dispersivi. In questo caso la velocità radiale secondo la normale d'onda è uguale a $\boldsymbol{u}_N = v\boldsymbol{N} = v^2\boldsymbol{N}/v$, o in base alla (75.8)

$$\boldsymbol{u}_N = \frac{c^2}{D^2 v}(\boldsymbol{DE})\boldsymbol{N}. \tag{81.6}$$

Calcoliamo ora la componente della velocità radiale $\boldsymbol{u}_\perp = k\,\partial v/\partial \boldsymbol{k}$, perpendicolare alla normale d'onda. Moltiplicando la formula (80.6) per k^2, presentiamola nella forma

$$\sum_\alpha \frac{k_\alpha^2}{v^2 - a_\alpha^2} = 0.$$

Derivando questa relazione rispetto a k_i, otteniamo

$$\sum_\alpha \frac{k_\alpha \partial k_\alpha/\partial k_i}{v^2 - a_\alpha^2} - \sum_\alpha \frac{k_\alpha^2}{(v^2 - a_\alpha^2)^2}\, v\frac{\partial v}{\partial k_i} = 0,$$

o, tenendo conto delle relazioni $\partial k_\alpha/\partial k_i = \delta_{\alpha i}$ e $k_i = kN_i$,

$$(\boldsymbol{u}_\perp)_i v \sum_\alpha \frac{N_\alpha^2}{(v^2 - a_\alpha^2)^2} = \frac{N_i}{v^2 - a_i^2}.$$

Dalla formula (80.5) si trova

$$\frac{1}{v^2 - a_\alpha^2} = -\frac{D_\alpha}{c^2(\boldsymbol{NE})N_\alpha}, \quad \sum_\alpha \frac{N_\alpha^2}{(v^2 - a_\alpha^2)^2} = \frac{1}{c^4}\frac{D^2}{(\boldsymbol{NE})^2}.$$

Dopo aver sostituito questi valori nella relazione precedente ed esprimendo il risultato in forma vettoriale, si ottiene

$$\boldsymbol{u}_\perp = -\frac{c^2(\boldsymbol{NE})}{vD^2}\boldsymbol{D}. \tag{81.7}$$

Ne segue che

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_N + \boldsymbol{u}_\perp = \frac{c^2}{vD^2}\{(\boldsymbol{DE})\boldsymbol{N} - (\boldsymbol{NE})\boldsymbol{D}\} = \frac{c^2}{vD^2}[\boldsymbol{E}[\boldsymbol{ND}]].$$

Dalla prima formula (75.5)

$$[\boldsymbol{ND}] = -\frac{c}{v}[\boldsymbol{N}[\boldsymbol{NH}]] = \frac{c}{v}\boldsymbol{H},$$

e dalla (75.8) si ha $v^2D^2 = c^2(DE) = c^2H^2$, di modo che

$$vD = cH. \tag{81.8}$$

Si ottiene quindi

$$u = \frac{c}{H^2}[EH].$$

Dunque, la velocità radiale u e con essa il raggio stesso sono in realtà orientati lungo il vettore di Poynting. Visto che i vettori E e H sono reciprocamente perpendicolari, si ha $[EH] = EHs$, dove s è il vettore unitario nella
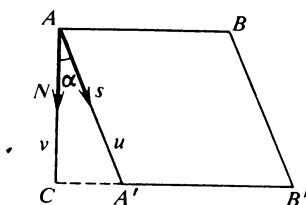
Fig. 288

direzione del raggio. Tenendone conto, abbiamo

$$u \equiv us = \frac{cE}{H}s. \tag{81.9}$$

Nella dimostrazione si suppone che il prodotto scalare (NE) non sia nullo. Se $(NE) = 0$, il vettore E è parallelo ad uno degli assi dielettrici del cristallo. In questo caso il teorema è evidente.

4. La giustificazione della nozione di raggio luminoso e la determinazione della sua direzione sono state date in funzione della velocità di gruppo in un mezzo anisotropo. Non abbiamo utilizzato il teorema di Poynting per far vedere che questa nozione e le sue proprietà generali non sono proprie delle onde elettromagnetiche, ma si applicano ad onde di *ogni natura fisica*. Inoltre, il teorema di Umov-Poynting è rigorosamente dimostrato soltanto per flussi d'energia attraverso *superfici chiuse*. La localizzazione spaziale di un flusso d'energia richiede considerazioni supplementari. Questa localizzazione non provoca difficoltà nei limiti di validità dell'ottica geometrica, cioè là dove è valida la nozione di raggio luminoso. In queste condizioni il teorema di Umov-Poynting fornisce un metodo semplice e generale per risolvere tutti i problemi concernenti la nozione di raggio luminoso.

Sia, per esempio, AB un elemento di un fronte d'onda piano delimitato da un diaframma interposto sul tragitto di un'onda elettromagnetica (fig. 288). Se le dimensioni di quest'elemento di superficie sono grandi rispetto

alla lunghezza d'onda, è valida l'ottica geometrica ed è sufficiente determinare le direzioni dei raggi luminosi. A questo scopo costruiamo sull'elemento AB preso come base un cilindro $ABA'B'$ le cui generatrici coincidono con le direzioni del vettore di Poynting. Il flusso d'energia elettromagnetica attraverso la superficie laterale di cilindro è allora indenticamente nullo e vi è soltanto un flusso attraverso le basi AB ed $A'B'$. L'energia che penetra attraverso AB, uscirà interamente attraverso $A'B'$. Ma allo stesso modo si comportano i raggi luminosi dell'ottica geometrica. Perciò le direzioni dei raggi luminosi e del vettore di Poynting debbono coincidere *non soltanto nei mezzi non dispersivi* (come è stato supposto nella dimostrazione data sopra), *ma anche nei mezzi dispersivi.*

5. La dualità caratteristica dell'ottica dei mezzi cristallini, della quale abbiamo detto all'inizio di questo paragrafo, nella teoria elettromagnetica è espressa da una proposizione generale detta *teorema d'inversione.* Quest'importante teorema permette di orientarsi nella moltitudine delle complicate formule dell'ottica dei mezzi cristallini ed aiuta a mettere in evidenza i legami esistenti tra queste formule. Per semplificare si può dire che il teorema d'inversione permette di sopprimere una metà delle formule e dei teoremi dell'ottica dei mezzi cristallini che si dovrebbero conoscere. Per dedurre questo teorema moltiplichiamo la prima equazione (75.5) vettorialmente per s. Si ottiene

$$[sD] = -\frac{c}{v}[s[NH]] = \frac{c}{v}\{(Ns)H - (sH)N\} = \frac{c}{v}(Ns)H.$$

Dalla (81.3) segue che $u(Ns) = v$. Eliminando (Ns), troviamo $H = \frac{u}{c}[sD]$. Allo stesso modo si trova $E = -\frac{u}{c}[sH]$. Dunque, si ottengono due serie di formule

$$\begin{aligned} D &= -\frac{c}{v}[NH], & E &= -\frac{u}{c}[sH], \\ H &= \frac{c}{v}[NE], & H &= \frac{u}{c}[sD], \\ N &= \frac{1}{DN}[DN], & s &= \frac{1}{EH}[EH], \\ D_\alpha &= \varepsilon_\alpha E_\alpha, & E_\alpha &= \frac{1}{\varepsilon_\alpha}D_\alpha. \end{aligned} \tag{81.10}$$

Tutti i risultati relativi alla propagazione delle onde piane nei cristalli omogenei sono stati ottenuti per mezzo della prima serie di formule. Ma le

formule della seconda serie si possono ottenere formalmente dalla prima serie mediante la sostituzione di tutte le grandezze secondo il seguente schema:

$$\begin{matrix} D & H & N & c & v & \varepsilon_\alpha \\ E & H & s & 1/c & 1/u & 1/\varepsilon_\alpha \end{matrix} \tag{81.11}$$

Quindi, *qualsiasi relazione tra le grandezze caratterizzanti la propagazione di onde piane in un mezzo cristallino omogeneo resterà verificata, se tutte le grandezze che compaiono in questa relazione sono sostituite con le corrispondenti grandezze secondo lo schema* (81.11). Sono corrispondenti due grandezze disposte l'una sotto l'altra nelle righe (81.11). Questo risultato è detto *teorema d'inversione*.

6. Applicando il teorema d'inversione è facile calcolare la velocità radiale in un cristallo, se è nota la direzione del raggio s. A questo scopo sostituiamo, nelle equazioni (80.6) o (80.7), N con s, v con $1/u$, a_α con $1/a_\alpha$ ed otteniamo

$$\sum_\alpha \frac{s_\alpha^2}{(1/u)^2 - (1/a_\alpha)^2} = 0, \tag{81.12}$$

o

$$\sum_\alpha \frac{a_\alpha^2 s_\alpha^2}{u^2 - a_\alpha^2} = 0. \tag{81.13}$$

Quest'equazione è detta *legge di Fresnel per la velocità radiale in un mezzo cristallino*. Essa è analoga alla legge di Fresnel per la velocità normale e può essere esaminata mediante gli stessi procedimenti. Tuttavia questo esame non è necessario, poiché tutti i risultati si possono dedurre direttamente dal teorema d'inversione. È sufficiente elencare questi risultati.

L'equazione (81.13) *è di secondo grado in* u^2. *Per ogni direzione* s, *essa possiede due radici reali positive* u_1^2 *ed* u_2^2, *ed inoltre*

$$a_x \geqslant u_1 \geqslant a_y \geqslant u_2 \geqslant a_z. \tag{81.14}$$

In ogni direzione nel cristallo possono propagarsi due raggi polarizzati linearmente, generalmente con velocità radiali u_1 *ed* u_2 *differenti. I vettori elettrici di questi raggi sono reciprocamente perpendicolari.*

La superficie d'onda, come quella delle normali, è composta di *due falde*. Quest'è una superficie del *quarto ordine*. Esaminiamo le sezioni di questa superficie con i piani coordinati *XY, YZ* e *ZX*. Si può utilizzare qui la figura 287, poiché le sezioni della superficie d'onda con i piani coordinati non differiscono qualitativamente dalle corrispondenti sezioni della superficie delle normali con gli stessi piani. È difficile rappresentare graficamente le differenze esistenti, ed è preferibile caratterizzarle con formule mate-

matiche. La sezione della superficie delle normali con i piani coordinati fornisce *cerchi* ed *ovali*. Le sezioni della superficie d'onda sono *cerchi* ed *ellissi*.

Sezione con il piano XY. Il raggio $\boldsymbol{s}$ è contenuto nel piano XY, cioè $s_z = 0$. La velocità radiale può assumere due valori

$$u_2 = a_z, \quad \frac{1}{u_1^2} = \frac{s_x^2}{a_y^2} + \frac{s_y^2}{a_x^2} . \tag{81.15}$$

La velocità u_2 non dipende dalla direzione del raggio; ad essa corrisponde una *sezione circolare* della superficie d'onda. La velocità u_1 varia in funzione della direzione del raggio e la corrispondente sezione ha la *forma di un'ellisse*. Infatti, l'equazione della sezione esaminata in forma vettoriale è del tipo $\boldsymbol{r} = u_1 \boldsymbol{s}$, da cui $s_x = x/u_1$, $s_y = y/u_1$. Sostituendo questi valori nella (81.15), otteniamo

$$\frac{x^2}{a_y^2} + \frac{y^2}{a_x^2} = 1, \tag{81.16}$$

cioè l'equazione di un'ellisse di semiassi a_y ed a_x. Date le relazioni (81.14), si ha $u_1 \geqslant u_2$, di modo che il cerchio è contenuto interamente all'interno dell'ellisse. Il vettore $\boldsymbol{E}$ dev'essere perpendicolare a $\boldsymbol{s}$. Da considerazioni di simmetria è evidente che il vettore $\boldsymbol{E}$ di un'onda è parallelo all'asse Z, ed il vettore $\boldsymbol{E}$ dell'altra onda è parallelo al piano XY. Alla prima direzione del vettore $\boldsymbol{E}$ corrisponde la sezione circolare della superficie d'onda ed alla seconda la sezione ellittica.

Sezione con il piano YZ. In questo piano le velocità radiali possono avere due valori

$$u_1 = a_x, \quad \frac{1}{u_2^2} = \frac{s_y^2}{a_z^2} + \frac{s_z^2}{a_y^2} . \tag{81.17}$$

La velocità u_1 non dipende dalla direzione del raggio e ad essa corrisponde la sezione circolare della superficie d'onda ed il vettore $\boldsymbol{E}$, parallelo all'asse X. La velocità u_2 varia in funzione della direzione del raggio. La corrispondente sezione è un'ellisse d'equazione

$$\frac{y^2}{a_z^2} + \frac{z^2}{a_y^2} = 1, \tag{81.18}$$

ed il vettore $\boldsymbol{E}$ è contenuto nel piano ZX. Secondo la (81.14), si ha $u_1 \geqslant u_2$, di modo che l'ellisse è interamente contenuta all'interno del cerchio.

Sezione con il piano ZX. La velocità radiale è definita da:

$$u_1 = a_y, \quad \frac{1}{u_2^2} = \frac{s_z^2}{a_x^2} + \frac{s_x^2}{a_z^2} . \tag{81.19}$$

Alla velocità u_1 corrisponde la sezione circolare della superficie d'onda ed il vettore E parallelo all'asse Y. Per u_2 si ottiene un'ellisse d'equazione

$$\frac{z^2}{a_x^2} + \frac{x^2}{a_z^2} = 1, \tag{81.20}$$

ed il vettore E è contenuto nel piano ZX. L'ellisse ed il cerchio s'intersecano in quattro punti (fig. 287). Conformemente a ciò nel piano ZX esistono due direzioni AA' e BB' simmetriche rispetto all'asse Z, lungo le quali entrambi i raggi si propagano con le stesse velocità radiali. Queste direzioni si dicono *assi ottici di prima specie o assi radiali.*

Se in un cristallo tutte e tre le velocità principali a_x, a_y, a_z sono differenti, in esso esistono due e solo due assi ottici di prima specie; questi assi sono contenuti nel piano ZX e sono simmetricamente disposti rispetto all'asse Z. L'angolo γ formato da uno degli assi ottici di prima specie con l'asse Z è definito dalla formula

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{(1/a_x^2) - (1/a_y^2)}{(1/a_y^2) - (1/a_z^2)}} = \frac{a_z}{a_x}\sqrt{\frac{a_x^2 - a_y^2}{a_y^2 - a_z^2}}\,. \tag{81.21}$$

Il confronto di questa formula con la formula (80.17) conduce alla relazione

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_z}{a_x}\operatorname{tg}\beta, \tag{81.22}$$

dalla quale segue che $\gamma < \beta$, cioè *gli assi ottici di prima specie sono disposti più vicino all'asse Z degli assi ottici di seconda specie*. Generalmente a_x ed a_z non differiscono molto l'uno dall'altro e perciò l'angolo tra gli assi di prima e di seconda specie è di regola piccolo e può essere trascurato nella considerazione di molti fenomeni. Per la mica esso è uguale all'incirca a 40′.

Se due delle tre velocità principali sono uguali, gli assi di seconda specie si confondono in un solo asse diretto parallelamente all'asse Z (quando $a_x = a_y$), o parallelamente all'asse X (quando $a_y = a_z$). In questo caso l'asse ottico di prima specie coincide con quello di seconda specie. Infine, quando tutte e tre le velocità principali sono uguali, ogni direzione nel cristallo possiede proprietà d'asse ottico.

Dal numero di assi ottici di prima specie, i cristalli si dividono in: 1) *cristalli biassici,* 2) *cristalli uniassici* e 3) *cristalli otticamente isotropi.* Questa classificazione coincide con la classificazione fondata sul numero di assi ottici di seconda specie.

7. Notiamo ancora un corollario del teorema d'inversione che ci sarà

utile nel seguente paragrafo. Moltiplicando scalarmente l'equazione (75.7) per s e tenendo conto del fatto che $(Es) = 0$, otteniamo

$$(Ds) = -\frac{c^2}{v^2}(NE)(Ns) = -\frac{c^2}{uv}(NE). \qquad (81.23)$$

Trasformiamo la (80.3), applicando il teorema d'inversione

$$\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{a_\alpha^2}\right)E_\alpha = -\frac{1}{c^2}(sD)s_\alpha,$$

o, in virtù della (81.23),

$$\frac{a_\alpha^2 - u^2}{a_\alpha^2}E_\alpha = \frac{u}{v}(NE)s_\alpha.$$

Moltiplichiamo e dividiamo il primo membro di questa relazione per ε_α e teniamo conto del fatto che $D_\alpha = \varepsilon_\alpha E_\alpha$, $a_\alpha^2\varepsilon_\alpha = c^2$. Si ottiene

$$(a_\alpha^2 - u^2)D_\alpha = \frac{c^2u}{v}(NE)s_\alpha. \qquad (81.24)$$

Il confronto di questa relazione con la (80.3) ci dà

$$u(a_\alpha^2 - v^2)s_\alpha = v(a_\alpha^2 - u^2)N_\alpha, \qquad (81.25)$$

da cui

$$\frac{us_\alpha}{a_\alpha^2 - u^2} = \frac{vN_\alpha}{a_\alpha^2 - v^2}. \qquad (81.26)$$

Moltiplicando questa relazione per N_α, sommando su α e tenendo conto della (80.6), si ottiene

$$\sum_\alpha \frac{N_\alpha s_\alpha}{a_\alpha^2 - u^2} = 0, \qquad (81.27)$$

o

$$N_xs_x(a_y^2 - u^2)(a_z^2 - u^2) + N_ys_y(a_z^2 - u^2)(a_x^2 - u^2) + \\ + N_zs_z(a_x^2 - u^2)(a_y^2 - u^2) = 0.$$

Quest'ultima relazione presenta un carattere più generale della (81.27), poiché la sua validità, come è facile dimostrare, non è legata all'ipotesi che sia $a_\alpha^2 - u^2 \neq 0$.

8. Il teorema concernente un legame tra la superficie d'onda e la superficie delle normali (si veda il punto 2) permette di costruire geometricamen-

te una di queste superficie se è nota l'altra. Sia, per esempio, ACB un elemento della superficie d'onda di centro O (fig. 289). In ogni punto di questa superficie tracciamo un piano tangente ed abbassiamo dal punto O una perpendicolare a questo piano. Il luogo geometrico dei piedi di queste perpendicolari è la superficie delle normali. Inversamente, per costruire la superficie d'onda a partire dalla superficie delle normali, si devono tracciare dal centro O in tutte le direzioni raggi vettori e dai punti d'intersezione di questi vettori con la superficie delle normali costruire piani perpendicolari ai raggi vettori. L'inviluppo di questi piani è la superficie d'onda.
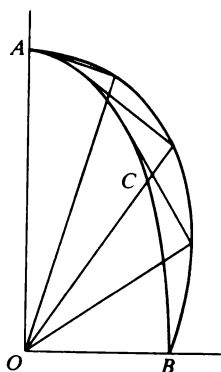
Fig. 289

Supponiamo che ad un certo istante t nel cristallo sia nota la posizione di un fronte d'onda piano. Per costruire il fronte d'onda ad un istante successivo t' si può, in base al teorema dimostrato, procedere nel seguente modo. Da ogni punto del fronte d'onda iniziale descriviamo un'onda elementare i cui raggi vettori si ottengono moltiplicando per $(t' - t)$ i corrispondenti raggi vettori della superficie d'onda. Il piano tangente a tutte le onde elementari definisce la posizione del fronte d'onda all'istante t'. Poiché esistono due piani tangenti possibili si deve scegliere quello al quale corrisponde l'onda che possiede la polarizzazione conveniente. La direzione di raggio luminoso è definita collegando il centro dell'onda elementare con il corrispondente punto di tangenza.

Questa costruzione è una generalizzazione della *costruzione di Huygens* per i mezzi isotropi. Huygens l'elaborò per interpretare la birifrangenza e postulò che nei cristalli l'onda elementare fosse composta di due onde: un'*onda sferica* ed un'*onda ellissoidale*. Le onde sferiche producono le *onde ordinarie* e le onde ellissoidali le onde *straordinarie*. Quest'ipotesi di Huygens è stata pienamente giustificata, ma essa è vera solo per i *cristalli otticamente uniassici*.

§ 82. *Rifrazione conica*

1. Quando la normale d'onda N è parallela ad uno degli assi ottici di seconda specie, le velocità normali v_1 e v_2 di entrambe le onde sono uguali, mentre le direzioni dei vettori $\boldsymbol{D}$ diventano indeterminate. Ne segue che nella direzione di un asse ottico di seconda specie può propagarsi un'onda piana di polarizzazione qualsiasi e la velocità di propagazione non dipende dal suo stato di polarizzazione. Da questo punto di vista il caso considerato è analogo alla propagazione delle onde in un mezzo isotropo. Ma se il cristallo è biassico, tra questi due casi esiste una differenza sostanziale.

In un mezzo isotropo le direzioni dei vettori $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$, nonché di N e S, coincidono sempre. Per un'onda che si propaga lungo un asse ottico di un cristallo biassico, la situazione è molto diversa. In questo caso il vettore $\boldsymbol{D}$ può assumere una direzione qualsiasi perpendicolare a N. Visto che N è contenuto nel piano ZX, una delle direzioni possibili del vettore $\boldsymbol{D}$ è l'asse Y. Solo in questo caso il vettore $\boldsymbol{D}$ coincide con la direzione del vettore $\boldsymbol{E}$ e la normale N con il raggio s. In tutti gli altri casi la normale d'onda ed il raggio hanno direzioni diverse. Attribuendo a $\boldsymbol{D}$ tutte le direzioni possibili perpendicolari all'asse ottico, si ottiene un'infinità di direzioni del raggio s. La direzione del vettore s diventa *indeterminata*. Dimostriamo che nel caso considerato tutti i raggi luminosi sono disposti sulla superficie di un cono.

Per dimostrarlo utilizziamo la relazione (81.27) che è valida per qualsiasi direzione della normale all'onda. Visto che la normale N all'onda è orientata lungo l'asse ottico, si ha $N_y = 0$ e la relazione (81.27) assume la forma

$$\frac{N_x s_x}{a_x^2 - u^2} + \frac{N_z s_z}{a_z^2 - u^2} = 0.$$

Ne segue che

$$a_z^2 N_x s_x + a_x^2 N_z s_z = u^2 (Ns).$$

In virtù della relazione (81.3) si ha $u(Ns) = v = a_y$. Di conseguenza,

$$(a_z^2 N_x s_x + a_y^2 N_z s_z)(N_x s_x + N_z s_z) = a_y^2.$$

Consideriamo un punto abritrario sul raggio s del raggio vettore $r(x, y, z)$. È evidente che $x_\alpha = r s_\alpha$ e la relazione precedente diventa

$$(a_z^2 N_x x + a_y^2 N_z z)(N_x x + N_z z) = a_y^2 (x^2 + y^2 + z^2). \qquad (82.1)$$

Quest'equazione omogenea di secondo grado rappresenta un *cono*. Le generatrici del cono sono i raggi luminosi corrispondenti alla normale all'onda N parallela ad uno dei due assi di seconda specie. Il cono (82.1) si dice

cono della rifrazione conica interna. La normale all'onda è una delle generatrici del cono (82.1). Ciò segue dal fatto che le direzioni di $\boldsymbol{s}$ e di $\boldsymbol{N}$ coincidono quando il vettore $\boldsymbol{D}$ è parallelo all'asse dielettrico Y.

2. Il cono di rifrazione conica interna è intersecato dal fronte d'onda

$$Nr \equiv N_x x + N_z z = a_y \tag{82.2}$$

secondo un cerchio. Infatti, la linea d'intersezione è definita dal sistema di equazioni (82.1) e (82.2) equivalente al sistema

$$\begin{gathered} a_z^2 N_x x + a_y^2 N_z z = a_y (x^2 + y^2 + z^2), \\ Nr = a_y. \end{gathered} \tag{82.3}$$

La prima equazione è quella di una sfera e la seconda è l'equazione di un
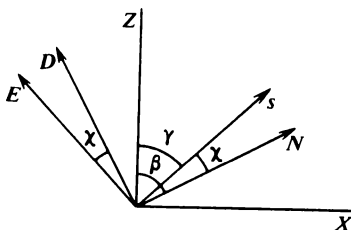
Fig. 290

piano. La loro intersezione è un cerchio, il che dimostra la nostra proposizione.

Determiniamo l'angolo d'apertura del cono di rifrazione conica interna, più esattamente l'angolo χ determinato dall'intersezione di questo cono con il piano ZX che passa attraverso l'asse ottico del cristallo (fig. 290). Quando di vettore $\boldsymbol{D}$ è diretto lungo l'asse dielettrico Y, i vettori $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{N}$, nonché l'asse ottico di seconda specie hanno la stessa direzione. Se invece il vettore $\boldsymbol{D}$ è contenuto nel piano ZX, allo stesso piano appartiene anche il raggio $\boldsymbol{s}$, poiché i quattro vettori $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{N}$ debbono sempre appartenere ad uno stesso piano (si veda il § 75). L'angolo cercato χ è uguale all'angolo che formano i vettori $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$, poiché i lati di questi angoli sono reciprocamente perpendicolari. Questo angolo si può determinare dalla formula (75.8), visto che nel caso in esame la velocità normale v è uguale ad a_y. La formula (75.8) dà

$$\cos \chi = \frac{D}{E} \left(\frac{a_y}{c} \right)^2.$$

Dalla figura 290 si vede che $D_x = -D \cos \beta$, $D_z = D \sin \beta$, dove β è l'ango-

lo tra l'asse ottico di seconda specie e l'asse Z. Di conseguenza,

$$E_x = \frac{D_x}{\varepsilon_x} = -\frac{D\cos\beta}{c^2}a_x^2, \quad E_z = \frac{D_z}{\varepsilon_z} = \frac{D\sin\beta}{c^2}a_z^2.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione di $\cos\chi$, otteniamo

$$\cos\chi = \frac{a_y^2}{\sqrt{a_x^4\cos^2\beta + a_z^4\sin^2\beta}},$$

da cui

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{1}{a_y^2}\sqrt{a_x^4\cos^2\beta + a_z^4\sin^2\beta - a_y^4}.$$

Utilizzando la formula (80.17), si trova dopo trasformazioni semplici

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{1}{a_y^2}\sqrt{(a_x^2 - a_y^2)(a_y^2 - a_z^2)}. \tag{82.4}$$

Il cono di rifrazione conica interna interseca la superficie d'onda secondo un cerchio lungo il quale il fronte d'onda è tangente a questa superficie d'onda. Ciò segue direttamente dal teorema dimostrato al § 81 (punto 2).

3. Il teorema d'inversione permette di estendere i risultati ottenuti ai raggi luminosi. Se il raggio nel cristallo biassico è diretto lungo uno degli assi ottici di prima specie, ad esso corrisponde un'infinità di normali all'onda che formano un cono. Questo cono è detto *cono di rifrazione conica esterna*. Il raggio luminoso è una delle generatrici di questo cono. La sezione del cono di rifrazione conica esterna con un piano perpendicolare al raggio è un cerchio. L'angolo d'apertura è dato dall'equazione

$$\operatorname{tg}\psi = a_y^2\sqrt{\left(\frac{1}{a_x^2} - \frac{1}{a_y^2}\right)\left(\frac{1}{a_y^2} - \frac{1}{a_z^2}\right)} = \frac{1}{a_x a_z}\sqrt{(a_x^2 - a_y^2)(a_y^2 - a_z^2)}. \tag{82.5}$$

Tracciamo un piano tangente alla superficie d'onda nel punto S della sua intersezione con l'asse radiale. Questo piano è perpendicolare alla normale all'onda e, siccome esiste un'infinità di normali corrispondenti al raggio diretto lungo l'asse radiale, nel punto S si possono tracciare un'infinità di piani tangenti alla superficie d'onda. Ciò significa che vicino a questo punto la superficie d'onda ha forma conica.

In figura 291 è rappresentata la sezione della superficie delle normali e della superficie d'onda con il piano ZX. Il punto N è il punto doppio della superficie delle normali, ON è l'asse ottico di seconda specie. La normale NA a quest'asse rappresenta la sezione del fronte d'onda con il piano della

figura. La retta *NA* è tangente alla superficie d'onda nel punto *A*, l'angolo $\chi = \angle NOA$ è l'angolo d'apertura del cono di rifrazione conica interna, *S* è il punto doppio della superficie d'onda, *OS* è l'asse radiale. La tangente alla superficie d'onda nel punto *S* interseca la superficie delle normali nel punto *B*; la retta *OB* è una delle normali all'onda appartenenti al raggio *OS*. Il raggio *OS* stesso è la normale all'onda piana che è tangente in *S* alla sezione circolare della superficie d'onda $u = a_y$. L'angolo $\psi = \angle SOB$ è angolo d'apertura del cono di rifrazione conica esterna.

Ad ogni raggio appartenente al cono di rifrazione conica interna, per esempio al raggio *OA* (fig. 291), corrisponde una polarizzazione lineare
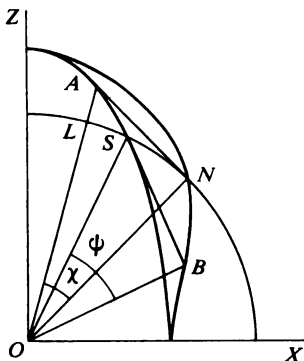
Fig. 291

ben determinata. Infatti, nella direzione *OA* possono propagarsi due raggi i cui vettori elettrici sono reciprocamente perpendicolari. Ma solo uno di questi raggi corrisponde all'onda che si propaga secondo la normale *ON* all'onda. All'altro raggio corrisponde la velocità radiale *OL* e, quindi, un'altra direzione della normale all'onda. Analogamente, ad ogni normale all'onda appartenente al cono di rifrazione conica esterna corrisponde una polarizzazione lineare ben determinata.

4. Il fronte d'onda *AN* che si propaga nella direzione dell'asse ottico di seconda specie *ON*, come è stato dimostrato prima, è tangente alla superficie d'onda in tutti i punti della sezione circolare formata per intersezione di questa superficie con il cono di rifrazione conica interna. Questo fronte d'onda non può intersecare la superficie d'onda. Infatti, intersechiamo la superficie d'onda con il piano *ANO* passante per l'asse ottico *ON* (fig. 292). La sezione è data dalla curva *CBA*. Se il fronte d'onda intersecasse la superficie d'onda, sulla curva *CBA* si potrebbero trovare punti *B* e *C* tali che le proiezioni dei raggi vettori *OB* e *OC* sulla direzione *ON* siano massimi o minimi. Se tracciamo il piano *ANO* in tutte le direzioni possibili passanti per l'asse ottico *ON*, i punti *B* e *C* descrivono curve chiuse. Su queste curve si possono trovare punti le cui proiezioni dei raggi vettori sulla dire-

zione della binormale ON sono massimi o minimi. Sia B uno di questi punti. Il piano tangente BN' alla superficie d'onda nel punto B è allora parallelo al fronte d'onda AN, cioè perpendicolare alla binormale ON. Dunque il piano BN' è esso stesso un fronte d'onda che si propaga nella direzione della binormale ON.

Quindi se il fronte d'onda NA potesse intersecare la superficie d'onda, lungo la binormale potrebbero propagarsi due onde aventi velocità normali diverse: $v = ON$ e $v' = ON'$, il che contraddice la definizione di binormale. Visto che il fronte d'onda è tangente alla superficie d'onda lungo una circonferenza (nei punti A), dalla dimostrazione segue che la superficie d'onda è interamente contenuta da quel lato del fronte d'onda in cui si trova il suo centro O (fig. 291). Quindi, nel punto S la superficie d'onda presenta una *cavità conica*.
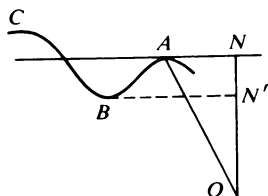
Fig. 292
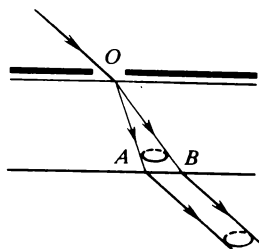
Fig. 293

5. Dopo aver chiarito queste relazioni geometriche, passiamo ad un'analisi della rifrazione conica interna prevista teoricamente da Hamilton (1805-1865) nel 1832. Il ragionamento di Hamilton fu il seguente. Supponiamo che una lamina a facce parallele, tagliata da un cristallo biassico, sia coperta da un lato con uno schermo opaco avente una piccola apertura O (fig. 293). Illuminiamo la lamina con un fascio di raggi paralleli non polarizzati in modo che dopo la rifrazione sulla faccia anteriore della lamina la normale all'onda risulti diretta lungo uno degli assi ottici di seconda specie OA. Alla normale all'onda OA corrisponde un cono di raggi. L'energia si propaga lungo i raggi e perciò, per dimensioni sufficientemente piccole dell'apertura O, il fascio luminoso all'interno della lamina formerà un cono OAB. Dopo la rifrazione sulla faccia posteriore della lamina la normale all'onda riprenderà la sua direzione iniziale e, dato che nei mezzi isotropi le direzioni dei raggi e delle normali all'onda coincidono, tutti i raggi emergono dalla lamina sotto forma di un fascio parallelo e si dispongono sulla superficie di un cilindro vuoto. Se sul tragitto di questi raggi mettiamo uno schermo, su quest'ultimo deve apparire un anello luminoso. Per suggerimento di Hamilton, Lloyd intraprese la ricerca di questo fenomeno; lo scoprì nel 1833 in un cristallo d'aragonite: sullo schermo apparve un'ellisse luminosa (per l'aragonite l'angolo d'apertura χ del cono è uguale a $1°52'$).

Benché Hamilton avesse previsto la rifrazione conica, la sua interpretazione del fenomeno era erronea. Un esame più dettagliato dimostrò che il fenomeno aveva un carattere diverso da quello predetto da Hamilton. Utilizzando aperture più piccole, Poggendorff (1796-1877) constatò che in realtà l'anello luminoso era *doppio*. Voigt (1850-1919) diede una spiegazione del fenomeno osservato. Hamilton ipotizzava un'onda perfettamente piana che si propaga nel cristallo esattamente lungo l'asse ottico, ma ciò è fisicamente irrealizzabile. Anche se si potesse illuminare l'orifizio O con un'onda rigorosamente piana, dopo averlo attraversato l'onda non sarebbe più piana, a causa della diffrazione. L'onda incidente si divide in un numero infinito di onde piane le cui direzioni di propagazione sono vicine alla direzione dell'asse ottico. Non ci si può limitare a considerare il comportamento di una sola onda che si propaga rigorosamente nella direzione
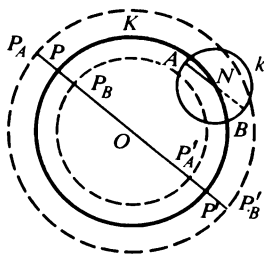
Fig. 294

dell'asse ottico. Ciò è già evidente dal fatto che questa onda trasporta una parte infinitesima dell'energia incidente e fisicamente non cambierebbe nulla se questa onda venisse eliminata dall'insieme di onde piane. Si devono considerare infinite onde piane le cui normali d'onda sono raggruppate attorno all'asse ottico. Proprio questo è stato fatto da Voigt.

Abbiamo mostrato che, se un'onda rigorosamente piana si propaga nella direzione di un asse ottico di seconda specie, il fronte d'onda è tangente alla superficie d'onda lungo un cerchio. Facciamo coincidere il piano di questo cerchio con il piano della figura 294. Sia N il punto d'intersezione del piano della figura con l'asse ottico. Supponiamo che vi sia un numero infinito di onde piane, le cui normali all'onda sono contenute all'interno di un cono di piccola apertura il cui asse coincide con l'asse ottico. Il piano della figura interseca questo cono secondo il cerchio k. Ad ogni normale all'onda corrisponde un punto che si trova all'interno o alla periferia del cerchio k. Determiniamo le posizioni dei raggi corrispondenti. Alla normale N all'onda corrisponde un fascio conico di raggi che intersecano il piano della figura secondo la circonferenza K. La superficie d'onda è in contatto con il piano della figura lungo questa circonferenza, e perciò la curvatura della superficie d'onda nella direzione di K è uguale a zero. Inoltre, la su-

perficie d'onda deve essere situata da un lato rispetto al piano della figura. Per concretizzare, poniamo che tutte le onde si propaghino verso il lettore. La superficie d'onda si troverà allora dietro il piano della figura e quindi la parte di superficie che si trova nei dintorni della circonferenza K sarà convessa rispetto al lettore. Questa parte di superficie d'onda presenta una forma anulare.

Intersechiamo la superficie d'onda con due piani paralleli $P_A P_B$ ed AB perpendicolari al piano della figura e passanti per i centri delle circonferenze K e k. I segmenti infinitamente corti $P_A P_B$ e $P_A' P_B'$ sono perpendicolari alla circonferenza K e perciò nella direzione di questi segmenti la curvatura della superficie d'onda sarà massima, mentre nelle direzioni perpendicolari sarà uguale a zero. Quindi, le perpendicolari a questi segmenti infinitesimi debbono essere situate nel piano $P_A P_B'$, cioè sono parallele alle normali d'onda situati nel piano AB. Ciò significa che il piano tangente alla superficie d'onda in un punto qualunque di segmenti $P_A P$ o $P_A' P'$ sarà perpendicolare alla corrispondente normale d'onda passante per il segmento AN. Il piano tangente alla superificie d'onda in un punto qualunque dei segmenti PP_B e $P' P_B'$ sarà perpendicolare alla normale all'onda passante per il segmento NB. Ciò significa che ad ogni normale d'onda passante per il segmento AN corrispondono due raggi, uno passante per il segmento $P_A P$, l'altro per il segmento $P_A' P'$. A ciascuna normale d'onda che passa per il segmento NB corrispondono due raggi che passano per i segmenti PP_B e $P' P_B'$. Dunque, ad ogni normale all'onda inclinata di un piccolo angolo sull'asse ottico di seconda specie corrispondono due raggi, uno dei quali passa all'interno del cono di rifrazione conica interna e l'altro all'esterno di questo cono.

È ora evidente l'origine dell'anello luminoso doppio di Poggendorff. Alle normali d'onda che intersecano il piano della figura all'interno di un piccolo cerchio di raggio dr e di centro N corrisponde una piccola parte d'energia che deve essere ripartita sull'area relativamente grande dS dell'anello, da entrambi i lati della circonferenza K. Se si prendono normali d'onda che intersecano il piano della figura all'interno di un anello di raggio medio r e di uguale spessore dr, a queste normali d'onda corrisponderà una parte d'energia notevolmente più grande, dato che essa è proporzionale all'area $2\pi r\, dr$ dell'anello. Quest'energia dev'essere ripartita sulle aree di due anelli, l'uno dei quali si trova all'interno della circonferenza K e l'altro all'esterno di essa. Le aree di entrambi gli anelli sono come prima uguali a dS a meno di infinitesimi di ordine superiore. Perciò l'illuminamento di entrambi gli anelli sarà molto più forte di quella dell'anello centrale nei pressi della circonferenza K. L'illuminamento deve essere nullo lungo la circonferenza K e crescere continuamente con l'allontanamento da questa circonferenza sia all'esterno, sia all'interno. Dunque, là dove secondo Hamilton si dovrebbe ottenere un massimo d'illuminamento, in realtà si osserva l'oscurità.

6. Hamilton aveva previsto anche la *rifrazione conica esterna*, scoperta da Lloyd sperimentalmente nel 1833. Questo fenomeno è legato al fatto che ad un raggio luminoso propagantesi lungo un asse radiale di un cristallo biassico corrisponde un insieme infinito di normali d'onda appartenenti ad una superficie conica. Non è necessario esaminare la teoria di questo fenomeno. È sufficiente fare riferimento al teorema d'inversione e descrivere il fenomeno osservato da Lloyd. Entrambe le facce di una lamina a facce parallele d'aragonite vengono coperte con schermi aventi piccole aperture O ed O' (fig. 295), i cui centri si trovano sull'asse ottico di prima specie. La lente L concentra su O un fascio di raggi convergenti. I diaframmi O ed O'
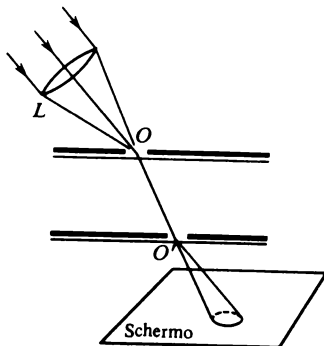
Fig. 295

isolano solo i raggi che si propagano lungo l'asse ottico OO'. Usciti dalla lamina, i raggi si aprono a cono e sullo schermo si osservava un anello chiaro. S'intende che se le dimensioni degli orifizi O ed O' sono sufficientemente piccole l'anello sarà *doppio*.

§ 83. *Osservazioni relative alla riflessione ed alla rifrazione della luce su superfici cristalline*

1. Come nell'ottica dei mezzi isotropi, il problema della riflessione e della rifrazione nell'ottica dei mezzi cristallini può essere interamente risolto in base alle *condizioni al contorno* che i vettori di campo elettromagnetico debbono verificare: da entrambi i lati della frontiera di separazione debbono essere uguali le componenti tangenziali dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$. Il problema si scinde in due parti: 1) una parte *geometrica* in cui vengono determinate le direzioni di propagazione, la polarizzazione e le velocità delle onde riflesse e rifratte, e nel caso di onde evanescenti il loro smorzamento spaziale; 2) una parte *fisica* in cui vengono determinate le ampiezze delle onde (che

sono complesse nel caso generale). Esaminiamo solo la parte geometrica del problema. Non deduciamo le formule per le ampiezze, data la loro complicatezza, benché la deduzione in linea di principio non sia molto difficile.

Supponiamo che su una frontiera di separazione piana cada un'onda monocromatica piana di vettore d'onda $\boldsymbol{k}_1$. Se il mezzo è isotropo, si formano una sola onda riflessa ed una sola onda rifratta. Generalmente per i mezzi anisotropi non è così. Ma, quale che sia il numero di onde riflesse e rifratte, dalla linearità e dall'omogeneità delle condizioni al contorno segue direttamente che le componenti tangenziali dei vettori d'onda delle onde incidente, riflessa e rifratta debbono essere uguali (si veda il § 69). Ne segue che *le normali alle onde incidente, riflesse e rifratte, nonché la normale alla frontiera di separazione sono tutte contenute in uno stesso piano.* Inoltre *la rifrazione delle normali d'onde verifica la legge di rifrazione di Snellius: il rapporto del seno dell'angolo d'incidenza al seno dell'angolo di rifrazione*
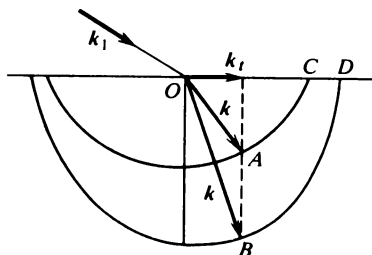
Fig. 296

è uguale al rapporto delle corrispondenti velocità normali delle onde. Praticamente questa legge è poco utile, in quanto non è sufficiente per trovare la direzione della normale d'onda di un'onda rifratta, poiché la velocità normale di un'onda rifratta *non è nota.* Essa dipende dalla direzione dell'onda incidente e *deve essere definita essa stessa.* Più semplicemente lo si può fare mediante un metodo grafico.

2. Consideriamo una delle onde rifratte. Siano $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{OA}$ o $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{OB}$ il suo vettore d'onda. In virtù delle condizioni al contorno la componente tangenziale $\boldsymbol{k}_t$ di questo vettore si può supporre nota: $\boldsymbol{k}_t = \boldsymbol{k}_{1t}$. Essa appartiene al piano d'incidenza. Non resta altro che determinare la componente normale $\boldsymbol{k}_n$. Prima di tutto essa deve essere diretta dall'alto in basso, verso il secondo mezzo, poiché l'onda rifratta deve *allontanarsi dalla frontiera di separazione.* Per risolvere il problema si può utilizzare la seguente costruzione geometrica. Tracciamo, dal punto O (fig. 296) verso il secondo mezzo, delle rette in tutte le direzioni possibili e riportiamo su queste rette le lunghezze del vettore d'onda $\boldsymbol{k}$. Visto che le direzioni di $\boldsymbol{k}$ e di $\boldsymbol{N}$ coincidono e ad ogni direzione di $\boldsymbol{N}$ corrispondono due valori della velocità normale, si

può anche dire che ad ogni direzione della normale N corrispondono due valori del numero d'onda k. La costruzione fornisce dunque una superficie complessa a due falde, che chiameremo *superficie dei vettori d'onda* [1]. Questa superficie è legata semplicemente alla superficie delle normali. Essendo $k = \omega/v$, la superificie dei vettori d'onda è *reciproca* rispetto alla superficie delle normali: le lunghezze dei suoi raggi vettori sono inversamente proporzionali alle lunghezze dei raggi vettori della superficie delle normali che sono a loro paralleli.

Intersechiamo la superficie dei vettori d'onda con il piano d'incidenza; la sezione ottenuta è composta di due curve (fig. 296). Tracciamo dal punto O lugno la frontiera di separazione la componente tangenziale $\boldsymbol{k}_t = \boldsymbol{k}_{1t}$ del vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ ed abbassiamo dalla sua estremità una perpendicolare sulla superficie di separazione. Questa perpendicolare interseca le due curve in due punti A e B. Collegando questi due punti con il punto O, otteniamo due vettori $\overrightarrow{OA}$ ed $\overrightarrow{OB}$, ciascuno dei quali può rappresentare il vettore d'onda dell'onda rifratta.

Ciò definisce le direzioni delle normali N alle onde ed i corrispondenti valori delle velocità normali. La superficie dei vettori d'onda permette di costruire la superficie delle normali e la superficie d'onda e determinare le direzioni dei corrispondenti raggi e le velocità radiali. I vettori N e s determinano la direzione del campo magnetico $\boldsymbol{H}$, poiché quest'ultimo è perpendicolare al piano (N,s). Simultaneamente vengono determinate anche le direzioni dei vettori $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$, cioè la polarizzazione di entrambe le onde nel cristallo. Nel caso generale le direzioni dei raggi e delle normali d'onda non coincidono. Nei cristalli otticamente biassici entrambi i raggi emergono di regola dal piano d'incidenza.

Se l'onda cade sul cristallo da un mezzo isotropo, essa può essere polarizzata a piacere e penetrerà nel cristallo sotto forma di due onde polarizzate linearmente. Ma se il primo mezzo è cristallino anch'esso, nella direzione di $\boldsymbol{k}_1$ possono propagarsi due onde di polarizzazione e velocità normali diverse. Queste onde debbono essere considerate come *onde indipendenti*. Ciascuna di queste onde si scinde nel cristallo in *due onde linearmente polarizzate* e nel secondo mezzo si otterranno in tutto *quattro onde*.

Può avvenire che la lunghezza del vettore $\boldsymbol{k}_{1t}$ sia superiore a quella di uno o di entrambi i segmenti OC e OD tagliati sull'asse X dalla superficie dei vettori d'onda. La costruzione illustrata in figura 296 diventa allora irrealizzabile. Resta allora una sola onda rifratta, o non resta alcun'onda.

---

[1] Se al posto di $k = \omega/v$ riportiamo sulle rette la quantità c/v, cioè l'indice di rifrazione n, si otterrà una superficie simile alla superficie dei vettori d'onda. Nell'ottica dei mezzi cristallini essa è detta *indicatrice* o *superficie degli indici di rifrazione*. Il raggio vettore di questa superficie fornisce il valore dell'indice di rifrazione per un'onda piana la cui normale coincide in direzione con questo raggio vettore.

Questo significa che una delle onde o entrambe subiscono una *riflessione totale*.

3. Lo stesso metodo può essere utilizzato per lo studio della direzione e della polarizzazione della luce riflessa. È solo necessario costruire la superficie dei vettori d'onda nel primo mezzo e non nel secondo. Se il primo mezzo è isotropo, la superficie dei vettori d'onda sarà sferica. Avremo quindi una sola onda riflessa, ed inoltre l'angolo d'incidenza è uguale all'angolo di riflessione. Se invece il primo mezzo è anisotropo, si ottengono per riflessione due onde polarizzate rettilineamente che si propagano in diverse direzioni.

VIII. OTTICA MOLECOLARE

§ 84. *Teoria classica della dispersione della luce*

1. Tutti i mezzi, eccetto il vuoto, sono *dispersivi*, il che vuol dire che l'indice di rifrazione delle onde elettromagnetiche dipende dalle loro frequenze. La migliore approssimazione di vuoto è lo spazio interplanetario ed interstellare. Secondo i dati astrofisici, la densità media di materia nello spazio interplanetario è di circa 1 atomo (ione) per cm^3. Nello spazio interstellare della nostra Galassia la concentrazione media di materia è all'incirca 10^{-2} atomi per cm^3 e nello spazio intergalattico essa è ancora più piccola. Nel vuoto artificiale essa è uguale o superiore a 10^4 atomi per cm^3.

L'assenza di dispersione della luce nello spazio interstellare è dimostrata da osservazioni astronomiche basate sulle eclissi delle *stelle doppie*. Supponiamo, per esempio, che i raggi rossi si propaghino nello spazio interstellare con velocità maggiore di quelli blu. Si dovrebbe osservare allora all'inizio dell'eclisse una variazione di colore di una stella da quello normale verso il blu, ed alla fine dell'eclisse una variazione dal rosso verso il colore normale. Tenendo conto delle distanze enormi alle quali si trovano le stelle, quest'effetto non avrebbe potuto sfuggire all'osservazione, persino se la differenza tra le velocità di propagazione dei raggi rossi e blu fosse estremamente piccola. Ma in realtà quest'effetto non è stato scoperto nello spettro visibile. Già Arago, in base alle sue osservazioni della stella doppia Algol, concluse che la differenza tra le velocità di propagazione dei raggi rossi e blu non può essere superiore ad un centomillesimo della velocità della luce.

È evidente che l'assenza di dispersione della luce visibile nello spazio interstellare è sperimentalmente dimostrata solo con la precisione data dagli esperimenti. Le osservazioni delle *pulsar*, per mezzo dei ricevitori radioelettrici moderni, hanno permesso di stabilire l'esistenza di una dispersione delle onde nello spazio interstellare nella regione delle radiofrequenze (si veda il § 87).

2. La teoria fenomenologica di Maxwell, non contenendo alcuna costante atomico-molecolare, non poteva spiegare il fenomeno della dispersione della luce. La spiegazione di questo fenomeno deve basarsi su conce-

zioni atomistiche. La dispersione della luce è determinata dalle *oscillazioni forzate* delle particelle cariche, cioè degli elettroni e degli ioni, sotto l'azione del campo alternato dell'onda elettromagnetica.

Nella teoria classica di Lorentz H.A. la struttura dei sistemi oscillanti, atomi e molecole, e le loro oscillazioni sono descritte in base alle concezioni classiche del moto e delle leggi di Newton. Nel nostro Corso possiamo limitarci alla teoria classica. Dal punto di vista teorico il caso più semplice è quello della *dispersione nei gas*, poiché in prima approssimazione si possono trascurare interazioni complesse tra gli atomi e le molecole del mezzo. Per i gas molto densi le principali ipotesi della teoria sono verificate più esattamente che nel caso dei mezzi condensati. Perciò la verifica sperimentale di queste ipotesi deve essere effettuata con i gas, per i quali anche la teoria è stata elaborata in modo migliore. Nel seguito ci limiteremo soprattutto a questo caso semplice.

Tutti gli elettroni contenuti in un atomo si possono suddividere in *elettroni periferici*, o *ottici*, ed in *elettroni degli strati interni.* L'emissione e l'assorbimento della luce nello spettro visibile sono praticamente determinati *soltanto dagli elettroni ottici.* Infatti le frequenze proprie degli elettroni degli strati interni sono troppo grandi, cosicché le loro oscillazioni nel campo dell'onda luminosa non possono essere eccitate. Perciò nella teoria della dispersione ci si può limitare a considerare i soli elettroni ottici.

Per semplificare, supponiamo dapprima che l'atomo contenga *un solo elettrone ottico.* Nella teoria classica della dispersione l'elettrone ottico è considerato come un *oscillatore armonico smorzato* le cui oscillazioni nel campo dell'onda luminosa sono descritte dall'equazione

$$m\ddot{r} = -kr - g\dot{r} + eE',$$

dove m è la massa dell'elettrone, e la carica dell'elettrone, $-kr$ la *forza di richiamo quasi-elastica* che tende a far ritornare l'elettrone nella posizione d'equilibrio, $-g\dot{r}$ una forza analoga alla *forza d'attrito* che è introdotta per tener conto dell'*assorbimento della luce*, E' l'intensità del campo elettrico *applicato* all'elettrone. In generale, il campo E' differisce dal campo macroscopico medio E che figura nelle equazioni di Maxwell (si veda il vol. III, § 35), ma nel caso di un gas di debole densità questa differenza può essere trascurata. Dividendo per m, riduciamo l'equazione precedente alla forma

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m}E', \tag{84.1}$$

dove $\omega_0^2 = k/m$, $2\gamma = g/m$. Abbiamo trascurato la forza magnetica $\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$ alla quale è sottoposto l'elettrone, poiché la velocità v dell'elettrone è trascurabile rispetto alla velocità c della luce. Questa forza magnetica si manifesta soltanto nella *pressione luminosa* che, nelle condizioni usuali,

è piccola e può essere trascurata nel caso considerato (si veda il problema 2 di questo paragrafo).

Tutte le forze agenti all'interno degli atomi e delle molecole sono di *natura elettrica*. Queste forze determinano la struttura interna di queste particelle. Ma risultò impossibile spiegare con queste forze l'esistenza e la struttura degli atomi e delle molecole in base alle concezioni classiche. Ciò è stato fatto soltanto nel quadro della *fisica quantistica*. Negli atomi e nelle molecole non esistono forze quasi-elastiche o forze d'attrito proporzionali alla velocità delle particelle cariche. Una teoria corretta della dispersione deve tener conto soltanto delle *forze realmente esistenti* e fondarsi sulle *leggi quantistiche*. La meccanica quantistica dà una teoria adeguata della dispersione, ma essa conduce ad un risultato sorprendente: *gli atomi e le molecole si comportano nei confronti dell'assorbimento e della dispersione della luce come se il mezzo fosse costituito da un insieme di oscillatori di differenti frequenze proprie, aventi coefficienti di smorzamento che soddisfano le equazioni del moto di Newton classiche.*

Le frequenze proprie ed i coefficienti di smorzamento non possono essere calcolati in base al modello classico. Nella teoria classica queste grandezze devono essere considerate come *costanti introdotte ad hoc*. Il calcolo di queste costanti e l'interpretazione del loro significato fisico è possibile soltanto con i *metodi della teoria quantistica*. La teoria classica invece deve essere considerata come una teoria che fornisce un *modello di mezzo dispersivo* che conduce a risultati corretti solo se ad esso sono applicate le leggi della meccanica classica.

Fatte queste osservazioni, possiamo esporre la teoria classica della dispersione senza temere di essere fraintesi.

3. Supponiamo che il campo E sia rappresentato da un'onda piana $E = Ae^{i(\omega t - kr)} = E_0(r)e^{i\omega t}$. L'ampiezza del campo $E_0 = Ae^{-ikr}$ varia da un punto all'altro. Ne segue che in punti diversi della sua traiettoria l'elettrone è sottoposto all'azione di un campo di ampiezza variabile. (La circostanza menzionata porta al fenomeno della cosiddetta *dispersione spaziale*.) Ma si può trascurare questa circostanza supponendo che l'ampiezza r_0 delle oscillazioni sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda λ. La soluzione generale della (84.1) interessa poco, poiché per la teoria della dispersione è importante *la soluzione particolare* poiché questa rappresenta le *oscillazioni forzate* dell'oscillatore $r = r_0e^{i\omega t}$. L'ampiezza r_0 si può trovare per sostituzione di quest'espressione nella (84.1). Trascurando la differenza tra E ed E', si ottiene

$$r = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} E. \tag{84.2}$$

Un atomo situato nel campo elettrico acquista un momento dipolare $p = er = \beta E$, dove β è la polarizzabilità dell'atomo definita dalla formula

$$\beta = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \tag{84.3}$$

Se N è il numero di atomi contenuti nell'unità di volume, il vettore polarizzazione del mezzo è $\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = N\beta\boldsymbol{E}$ e la sua induzione è

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{84.4}$$

dove

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \tag{84.5}$$

L'equazione materiale $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ assume la stessa forma che nella teoria formale di Maxwell, eccetto per il fatto che la permettività dielettrica ε *dipende* ora *dalla frequenza* ω. Perciò sono validi tutti i risultati ottenuti prima, se in essi la costante ε viene sostituita con la funzione $\varepsilon(\omega)$. Questa funzione è *complessa*, come ci si poteva aspettare, poiché nel nostro modello abbiamo tenuto conto dell'*assorbimento della luce*. Introduciamo l'indice di rifrazione complesso secondo la formula

$$\sqrt{\varepsilon} = n - i\varkappa, \tag{84.6}$$

dove n è l'*indice di rifrazione reale* e $\varkappa$ l'*indice d'estinzione del mezzo*. Entrambe le funzioni $n(\omega)$ e $\varkappa(\omega)$ dipendono dalla frequenza. Dunque si ottiene una spiegazione di principio, benché formale, non solo della dispersione, ma anche dell'assorbimento della luce.

Eleviamo la (84.6) al quadrato e identifichiamo le parti reali ed immaginarie della relazione ottenuta con quelle della relazione (84.5). Si ottiene allora

$$n^2 - \varkappa^2 = 1 + 4\pi\frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}(\omega_0^2 - \omega^2), \tag{84.7}$$

$$n\varkappa = 4\pi\frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}\omega\gamma. \tag{84.8}$$

Queste formule permettono di esprimere n e $\varkappa$ in funzione della frequenza ω e dei parametri molecolari N ed e^2/m.

Lontano dalla frequenza propria ω_0 dove $2\omega\gamma \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$, la parte immaginaria della (84.5) può essere trascurata e si può ottenere la formula approssimata

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{84.9}$$

Una formula per n di questo tipo è stata per la prima volta stabilita da Sellmeier nel 1871 basandosi sulla teoria meccanica dell'etere universale [1)].

[1)] Come notò Rayleigh la formula (84.9) era stata ottenuta due anni prima da Maxwell che già nel 1869 aveva esposto le basi della teoria meccanica della dispersione in un problema d'esame. Le formule di Maxwell contenevano anche i termini d'estinzione.

È ben evidente che nella formula di Sellmeier non c'è alcun'indicazione sull'esistenza di un legame tra l'indice di rifrazione n e la permettività dielettrica ε oppure con altre grandezze caratterizzanti le proprietà elettriche del mezzo.

In figura 297 la linea continua rappresenta il grafico della funzione $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. Passando per il punto $\omega = \omega_0$ questa funzione passa bruscamente da $+\infty$ a $-\infty$. L'indice di rifrazione n è rappresentato da una linea tratteggiata e l'indice d'estinzione $\varkappa$ da una linea tratteggiata mista. La grandezza n s'annulla là dove $\varepsilon(\omega) < 0$. Al contrario, l'indice d'estinzione $\varkappa$ è qui diverso da zero, annullandosi per tutte le altre frequenze. La grandezza $\varkappa$ caratterizza appunto l'***estinzione delle onde e non il loro assorbimento***, poiché le curve della figura 297 concernono un modello di ***mezzo non assorbente*** (la permettività dielettrica ε è dappertutto reale).
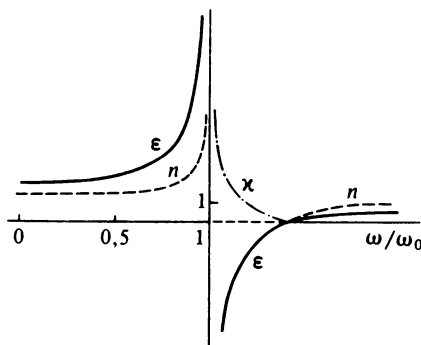
Fig. 297

Del resto questi risultati hanno un carattere formale, poiché nelle vicinanze della frequenza propria ω_0 la relazione $2\omega\gamma \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$ non è verificata e perciò la formula (84.9) non è utilizzabile. In realtà, passando per il punto $\omega = \omega_0$, le grandezze ε, n, $\varkappa$ debbono variare ***con continuità*** senza diventare infinite. In particolare, il ramo ascendente della curva $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, che si trova a sinistra del punto $\omega = \omega_0$, deve cedere il posto al ramo discendente per unirsi con un altro ramo ascendente disposto a destra dello stesso punto.

Quest'osservazione permette facilmente di rappresentare l'andamento delle curve n e $\varkappa$ nelle vicinanze della banda d'assorbimento. La figura 298 illustra la forma tipica delle curve $n = n(\omega)$ e $\varkappa = \varkappa(\omega)$. Là dove l'assorbimento è piccolo, l'indice di rifrazione $n(\omega)$ cresce con la frequenza. In questo caso si dice che *la dispersione è normale*. Nella banda di forte assorbimento $n(\omega)$ diminuisce con la frequenza, e questa dispersione si dice *anomala*; è difficile osservarla proprio a causa del forte assorbimento.

4. Le considerazioni teoriche esposte sopra sono valide non soltanto

per elettroni, *ma anche per ioni*, dato che le concezioni classiche si applicano meglio quanto più le masse degli ioni sono grandi. In tutti i corpi si osservano parecchie bande d'assorbimento. Per tenerne conto, nella teoria classica si ammette che la materia sia costituita di particelle di *tipi diversi*, cioè di elettroni e di ioni che si comportano come oscillatori armonici smorzati aventi *frequenze proprie differenti*. Nel caso di sostanze gassose si possono trascurare le interazioni reciproche di questi oscillatori e la formula
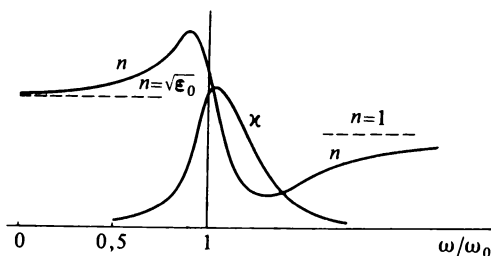
Fig. 298

(84.5) si scrive allora

$$\varepsilon = 1 + \sum_k \frac{4\pi N_k e_k^2/m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma_k}, \tag{84.10}$$

dove N_k, m_k, e_k, ω_k, γ_k sono la concentrazione, la massa, la carica, la frequenza propria ed il coefficiente di smorzamento dell'oscillatore del
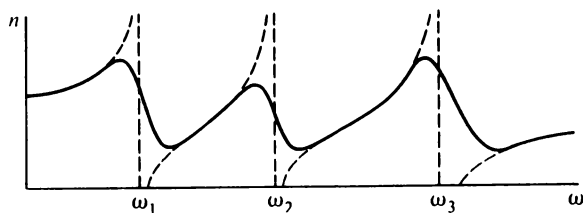
Fig. 299

k-esimo tipo, e la sommatoria è estesa su tutti i k. Ad ogni frequenza propria corrisponde una riga d'assorbimento distinta, vicino alla quale l'indice di rifrazione varia in modo anomalo. L'andamento generale della variazione dell'indice di rifrazione con la frequenza è schematicamente rappresentato in figura 299.

Confrontando la formula (84.10) con i dati sperimentali, si possono determinare i coefficienti $C_k \equiv N_k e_k^2/m_k$. Conoscendo questi coefficienti, si

possono stimare le cariche specifiche e_k/m_k e trarre conclusioni relative alla natura degli oscillatori. Infatti, le cariche e_k come ordine di grandezza non possono sostanzialmente differire dalla carica elementare $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ CGSE, e N_k deve essere dell'ordine del numero di atomi contenuti nell'unità di volume, cioè $N_{Av}\rho/A$, dove N_{Av} è il numero di Avogadro, ρ la densità della sostanza ed A la massa atomica. Dunque,

$$C_k = \frac{N_k e_k^2}{m_k} \approx \rho \frac{N_{Av} e}{A} \frac{e_k}{m_k} = \rho \frac{F}{A} \frac{e_k}{m_k},$$

dove $F \equiv N_{Av} e = 2{,}9 \cdot 10^{14}$ CGS·g-eq.$^{-1}$ è il numero di Faraday. Con l'aiuto di questa formula si può stimare il valore di e_k/m_k. In questo modo, conformemente alle concezioni teoriche, è stato trovato che tutti gli oscillatori si dividono nettamente in due gruppi: le cariche specifiche di un gruppo sono dello stesso ordine di grandezza della carica degli elettroni, le cariche dell'altro gruppo sono confrontabili con quelle degli ioni. Agli oscillatori del primo gruppo corrispondono bande d'assorbimento appartenenti all'*ultravioletto* (più raramente allo *spettro visibile*) ed agli oscillatori del secondo gruppo bande appartenenti all'*infrarosso*.

5. La formula (84.10) e le corrispondenti formule di n e $\varkappa$ sono applicabili anche ai *metalli*. Nell'infrarosso il ruolo principale viene svolto dagli *elettroni liberi* per i quali si deve porre $\omega_k = 0$. Una certa azione viene esercitata anche dagli ioni in prossimità delle loro frequenze proprie. Nella regione visibile e nell'ultravioletto vicino la formula (84.10) è in accordo soddisfacente con i risultati sperimentali, se insieme con gli elettroni liberi si tiene conto degli *elettroni legati contenuti negli ioni metallici* (le oscillazioni degli ioni stessi in queste regioni dello spettro non esercitano un'influenza notevole).

6. Prendiamo ora in considerazione, utilizzando però a questo scopo un metodo tutt'altro che impeccabile, l'interazione delle molecole polarizzate dal campo elettrico dell'onda luminosa. Per farlo utilizziamo il metodo di campo efficace. Nei cristalli del sistema cubico costituiti da atomi puntiformi ed isotropi, il campo $\mathbf{E}'$, agente su una molecola, è legato al campo maxwelliano medio $\mathbf{E}$ dalla relazione

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \tag{84.11}$$

(si veda vol. III, § 35). La stessa relazione è approssimativamente verificata per i gas ed i liquidi isotropi, se per $\mathbf{E}'$ s'intende il campo efficace mediato sui centri delle molecole in un volume che è fisicamente infinitamente piccolo. La formula (84.11) è una formula d'elettrostatica, ma si può utilizzare come prima approssimazione anche nel caso di campi alternati quando la lunghezza d'onda è grande rispetto alle distanze intermolecolari.

Supponiamo che tutte le molecole siano identiche e che ogni molecola

contenga un solo elettrone ottico. Inoltre, trascuriamo lo smorzamento supponendo che la frequenza ω sia situata lontano dalla banda d'assorbimento. Con queste ipotesi tutto quello che è necessario fare è sostituire, nell'equazione (84.1), E' con l'espressione (84.11). I calcoli ulteriori sono molto semplici, ma li omettiamo poiché sono stati già fatti nell'elettrostatica (cfr. vol. III, § 35). Abbiamo in questo caso ottenuto, con un metodo uguale a quello che utilizziamo qui, la formula di Clausius-Mosotti:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N\beta. \tag{84.12}$$

Sostituendo in questa formula $\varepsilon = n^2$ e l'espressione per β data dalla formula (84.3), si ottiene l'espressione

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{84.13}$$

Questa formula è stata simultaneamente stabilita (1880) nella teoria elettronica dal fisico olandese H.A. Lorentz e dal fisico danese L. Lorenz (1829-1891), che si basava su concezioni premaxwelliane della luce. Questa formula detta *formula di Lorentz-Lorenz*, mostra che per una sostanza data a frequenza costante ω deve essere verificata la seguente relazione:

$$r \equiv \frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \text{costante}, \tag{84.14}$$

poiché la concentrazione N delle molecole è proporzionale alla densità ρ della sostanza. La quantità che compare al primo membro di questa relazione si dice *rifrazione specifica.* Dunque secondo la formula di Lorentz-Lorenz *la rifrazione specifica di una sostanza è indipendente dalla sua densità.*

In numerosi casi la formula (84.14) fornisce risultati soddisfacenti. Così, per l'aria, per una variazione di pressione da 1 a 200 atm, la rifrazione specifica resta costante con un errore dello 0,1%. Abbastanza frequentemente la rifrazione specifica resta approssimativamente costante persino nel passaggio di una sostanza dallo stato di vapore allo stato liquido. Così la liquefazione dell'ossigeno gassoso (la sua densità varia di 800 volte) o la condensazione del vapore d'acqua (la sua densità varia di 1200 volte) non fanno variare la rifrazione specifica di queste sostanze che del 2-3%. Questi risultati sono sorprendenti, poiché nel caso di queste sostanze le ipotesi sulle quali si basa la formula (84.11) non sono sicuramente verificate. Sono però conosciuti molti casi in cui si osservano deviazioni dalla formula (84.14).

7. Ancor più sorprendente è una regola empirica secondo la quale si può in modo approssimato calcolare la rifrazione di una miscela o di un composto chimico. Se la sostanza è composta da particelle identiche (atomi

o molecole), si ha $\delta = Nm$, dove m è la massa di una particella. Perciò, tenendo conto della relazione $\varepsilon = n^2$, dalla formula (84.12) si ottiene

$$\beta = \frac{3}{4\pi} mr. \qquad (84.15)$$

La polarizzabilità β di una particella e con essa la quantità mr caratterizzano soltanto la *particella stessa*. La regola menzionata sopra consiste nel fatto che *la polarizzabilità delle particelle è additiva, cioè la polarizzabilità di una particella complessa è uguale alla somma delle polarizzabilità delle particelle che la compongono*. Di conseguenza,

$$mr = \sum m_i r_i, \qquad (84.16)$$

dove m e m_i sono le masse del composto e dei suoi componenti, e r e r_i sono le rifrazioni specifiche delle corrispondenti sostanze chimiche. È sorprendente che questa regola è applicabile non soltanto alle miscele meccaniche, ma anche ai *composti chimici*. Prendiamo come componenti gli atomi e come composti le molecole. Si ha allora $m_i = A_i m_{\mathrm{H}}$, $m = Mm_{\mathrm{H}}$, dove m_{H} è la massa dell'atomo d'idrogeno e M ed A_i sono le corrispondenti masse molecolare e atomica. Perciò la formula (84.16) si trasforma in

$$Mr = \sum A_i r_i. \qquad (84.17)$$

Il prodotto della rifrazione specifica per la massa atomica si dice *rifrazione atomica* ed il prodotto per la massa molecolare è la *rifrazione molare*. Dunque *la rifrazione molare di un composto chimico è uguale alla somma delle rifrazioni atomiche.*

Nel libro di Born [1)] sono riportate vaste tabelle che dimostrano la validità della formula di Lorentz-Lorenz e l'additività della rifrazione atomica. Nello stesso libro sono anche citati esempi di notevoli deviazioni da queste regole.

8. Oltre alla dispersione dovuta alle oscillazioni forzate degli elettroni e degli ioni, esiste un altro tipo di dispersione messo in evidenza da Debye. Questo tipo di dispersione si manifesta nei mezzi a *molecole polari*, per lo più nei mezzi liquidi. Sono polari le molecole che possiedono momenti dipolari « rigidi » dovuti ad una distribuzione asimmetrica delle cariche all'interno della molecola. Le molecole polari possono anche possedere momenti dipolari « indotti » eccitati da un campo elettrico esterno. Di regola, i momenti indotti nelle molecole polari sono piccoli rispetto ai momenti dipolari rigidi.

In assenza di campo elettrico, i momenti dipolari delle molecole polari di un mezzo isotropo sono orientati nello spazio in tutte le direzioni possibili in modo caotico. In questo caso il mezzo non possiede alcuna polarizzazione elettrica. Se viene applicato un campo elettrico, quest'ultimo tende

---

[1)] M. Born, *Optik*, Springer, Berlin, 1933.

ad orientare i momenti dipolari delle molecole lungo la sua direzione, ma quest'orientamento è costantemente perturbato a causa dell'agitazione termica delle molecole. In conseguenza di ciò nel mezzo compare una polarizzazione elettrica (cfr. vol. III, § 36). Se il campo elettrico varia nel tempo con la frequenza ω, con la stessa frequenza varierà questa polarizzazione « d'orientamento » e la permettività dielettrica del mezzo. Le ampiezze delle rotazioni forzate delle molecole polari dipendono dalla frequenza ω del campo elettrico applicato. A questo fatto è dovuta la dispersione della *componente rotatoria* della permettività dielettrica e dell'indice di rifrazione.

Ci limitiamo ad osservazioni qualitative senza dettagliate considerazioni quantitative.

Quando la frequenza del campo elettrico è bassa, il mezzo può acquistare la stessa polarizzazione istantanea che acquisterebbe in un campo statico. In questa regione di frequenza le grandezze ε e n sono praticamente costanti, cioè non dipendono dalla frequenza ω. Se i momenti dipolari delle molecole polari sono grandi, come è nel caso dell'acqua e degli alcool, in questa regione di frequenza i valori di ε e di n sono grandi. Per esempio, per l'acqua $\varepsilon = 81$, $n = \sqrt{\varepsilon} = 9$.

Nell'altro caso limite, in cui le frequenze sono molto alte, le molecole dipolari non fanno in tempo a ruotare in modo notevole nel corso di un tempo dell'ordine del periodo delle vibrazioni luminose. In questa regione di frequenza non ci sono praticamente rotazioni forzate delle molecole, il che significa che i termini rotatori di ε e n non esistono. Perciò deve esistere una regione di frequenza intermedia nella quale i valori di ε e di n diminuiscono anomalmente fino ai valori che queste grandezze posseggono nella regione ottica dello spettro. Per l'acqua e gli alcool questa regione di frequenza intermedia è situata nella regione delle onde elettromagnetiche centimetriche. All'infuori di questa regione dove le frequenze sono superiori, le molecole cominciano a comportarsi come se non fossero polari. A questo fatto è dovuta la differenza molto grande esistente tra il valore dell'indice di rifrazione dell'acqua n nella regione ottica dello spettro ed il valore di $\sqrt{\varepsilon}$ nell'elettrostatica e nella regione delle onde elettromagnetiche di bassa frequenza.

Queste stesse considerazioni permettono di spiegare perché nell'ottica la permeabilità magnetica μ può essere quasi sempre posta uguale all'unità per tutte le sostanze. Infatti, il meccanismo della magnetizzazione è simile al meccanismo della polarizzazione dei dielettrici polari e consiste in un processo d'orientamento dei momenti magnetici degli atomi e delle molecole secondo la direzione del campo magnetico applicato. Ma quest'effetto non ha luogo nei campi ad alta frequenza, nella regione visibile dello spettro e nelle regioni contigue.

9. Concludendo questo paragrafo, diamo una rassegna schematica della dispersione in tutta la gamma di frequenze delle onde elettromagnetiche.

Nella regione delle onde radio più lunghe di 1 cm è essenziale soltanto la frequenza propria $\omega_0 = 0$ degli elettroni o degli ioni liberi. Nella regione considerata la dispersione può essere provocata praticamente soltanto dai *gas ionizzati* (si veda il § 86). Se non esistono né elettroni né ioni liberi, in questa regione non esiste dispersione.

Nei dielettrici polari la dispersione comincia ad essere presente all'incirca a partire dalla regione delle onde radio centimetriche. L'indice di rifrazione decresce con la frequenza, cioè la dispersione è *anomala* e l'assorbimento è grande.

A misura che ci si avvicina alle frequenze proprie degli ioni la dispersione tende a diventare *normale*, mentre all'interno della banda d'assorbimento dovuta alle oscillazioni degli ioni la dispersione è *anomala*. Dopo aver passato la regione d'assorbimento infrarossa, le oscillazioni forzate degli ioni praticamente non si manifestano più. In questa regione, come nelle regioni visibile ed ultravioletta dello spettro, la dispersione è determinata dalle oscillazioni dei soli *elettroni ottici legati*. Nella regione di trasparenza (più esattamente nella regione di debole assorbimento) la dispersione è *normale* e nella banda di forte assorbimento essa è *anomala*. La banda d'assorbimento è generalmente situata nell'ultravioletto ed a volte nello spettro visibile.

Dopo aver attraversato la banda d'assorbimento, cioè la regione di dispersione anomala, dovuta alle oscillazioni degli elettroni, la dispersione ridiventa *normale*. Se la frequenza ω è grande rispetto a tutte le frequenze proprie degli elettroni, nella formula (84.10) si possono trascurare le quantità ω_k^2 rispetto a ω^2. Entriamo nella regione dei *raggi* X *molli*. Se non teniamo conto dell'assorbimento ed osserviamo che alle oscillazioni partecipano soltanto gli elettroni, per questa regione si può mettere la formula di dispersione (84.10) nella forma

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}. \tag{84.18}$$

L'indice di rifrazione è qui *inferiore all'unità*, benché differisca pochissimo da essa. Si è riusciti a misurarlo osservando la deviazione subita dai raggi X nell'attraversare prismi di differenti materiali; questo metodo non può naturalmente pretendere di avere grande precisione.

Risultati più degni di fede si ottengono dalle misure dell'angolo limite di riflessione totale dei raggi X che passano dall'aria ad un corpo solido ($n < 1$). Risultò che l'indice di rifrazione dei raggi X è inferiore all'unità di una quantità uguale a $(10^{-5}\text{-}10^{-6})\cdot\rho$ dove ρ è la densità della sostanza. Così, per il vetro (crown di densità 2,52) e per $\lambda = 0{,}1279$ nm l'indice risultò essere uguale a $n = 0{,}999995 = 1 - 5\cdot 10^{-6}$.

A misura che i raggi X diventano più duri, fenomeni di risonanza possono manifestarsi per gli elettroni degli *strati interni degli atomi* che sono

più fortemente legati al nucleo degli elettroni ottici. Infatti, si è riusciti ad osservare una dispersione *anomala* dei raggi X in prossimità del loro vero assorbimento fotoelettrico.

Problemi

1. Calcolare la velocità massima delle oscillazioni forzate di un elettrone libero nel campo di radiazione solare in prossimità della superficie terrestre (si veda il problema del § 5). Calcolare anche il rapporto della forza massima F_B agente su questo elettrone da parte del campo magnetico alla forza massima F_E dovuta al campo elettrico. Sostituire il campo di radiazione solare con una radiazione monocromatica $E = E_0 \cos \omega t$ di lunghezza d'onda $\lambda = 550$ nm.

Soluzione. Nell'equazione di moto dell'elettrone libero $m\dot{v} = e\left(E + \frac{1}{c}[vB]\right)$ trascuriamo l'azione del campo magnetico. Si avrà allora

$$m\dot{v} = eE = eE_0 \cos \omega t, \quad v = \frac{e}{m\omega} E_0 \sin \omega t, \quad v_{max} = \frac{eE_0}{m\omega} = \frac{eE_0\lambda}{2\pi mc}.$$

Essendo $\overline{E^2} = \frac{1}{2} E_0^2 = 5{,}85 \cdot 10^{-4}$, si ha $E_0 = \sqrt{2\overline{E^2}} = 0{,}034$ un. CGSE. Sostituendo questo valore, si ottiene

$$v_{max} = 5{,}3 \text{ cm/s}, \quad \frac{F_B}{F_E} = \frac{v_{max}}{2c} = 0{,}9 \cdot 10^{-10}.$$

2. Determinare la pressione luminosa media su un oscillatore armonico smorzato oscillante nel campo di un'onda luminosa monocromatica omogenea. Calcolare anche l'energia media ε assorbita dall'oscillatore al secondo ed esprimere la pressione luminosa in funzione di quest'energia media. Dimostrare che se non vi fosse assorbimento della luce, la pressione luminosa media sarebbe nulla.

Soluzione. Nel luogo dove si trova l'oscillatore il campo elettromagnetico è del tipo $E = Aee^{i\omega t}$, $B = Abe^{i\omega t}$, dove e e b sono vettori unitari reciprocamente perpendicolari. Trascurando dapprima l'azione del campo magnetico, per derivazione della (84.2) troviamo

$$v = \frac{i\omega e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma} E.$$

La forza che il campo magnetico esercita sull'elettrone è $F = \frac{e}{c}[vB]$. Ma, visto che i calcoli sono eseguiti in forma complessa, si deve sostituire quest'espressione con

$$F = \frac{e}{4c}[(v + v^*)(B + B^*)].$$

Otteniamo per la forza media

$$\bar{F} = \frac{e}{4c}\{[v^*B] + [vB^*]\},$$

o, dopo qualche trasformazione semplice,

$$\bar{F} = \frac{m\gamma}{c} vv^*[eb].$$

Quest'ultima formula mostra che la forza media di pressione luminosa è orientata secondo il prodotto vettoriale [*eb*], cioè secondo la direzione di propagazione dell'onda.

L'energia assorbita per unità di tempo è

$$\int_0^1 2m\gamma \left(\frac{v + v^*}{2}\right)^2 dt,$$

ed il suo valore medio è

$$\varepsilon = \int_0^1 m\gamma vv^* \, dt = m\gamma vv^*.$$

Dunque,

$$\bar{F} = \varepsilon/c. \qquad (84.19)$$

Questa formula può essere ottenuta per mezzo di un ragionamento semplice. La radiazione assorbita da un atomo di sostanza gli comunica non soltanto l'energia ε, ma anche un impulso $g = \varepsilon/c$ ad essa legato, il quale si manifesta nelle forze di pressione luminosa.

Se la luce si propaga attraverso un gas assorbente, secondo quanto esposto essa deve esercitare su quest'ultimo una certa pressione. Per la prima volta quest'idea fu avanzata da Keplero in relazione con le sue osservazioni sulle code delle comete. La dimostrazione sperimentale dell'esistenza di una pressione luminosa fu data da P.N. Lebedev (nel 1910).

§ 85. *Approccio della meccanica quantistica alla formula di dispersione*

1. La formula di dispersione classica (84.10), stabilita per i gas, descrive con una grande precisione l'andamento sperimentale dell'indice di rifrazione in prossimità di diverse righe d'assorbimento ω_k, ma solo a condizione di considerare i coefficienti N_k, le frequenze proprie ω_k ed i coefficienti di smorzamento γ_k come *costanti determinate a partire dalla curva di dispersione stessa e dalla posizione reale delle righe spettrali nello spettro di radiazione e di assorbimento della sostanza*. In particolare, per assicurare un accordo con i risultati sperimentali, risultò necessario sostituire in questa formula le grandezze N_k con $f_k N_k$, dove f_k sono coefficienti costanti inferiori all'unità, detti *forze degli oscillatori*.

La teoria della dispersione nella meccanica quantistica si può costruire applicando lo stesso schema della fisica classica. Il problema si riduce al calcolo della *polarizzabilità degli atomi e delle molecole* nel campo elettrico dell'onda luminosa, ma nel risolvere questo problema si utilizzano anziché le equazioni classiche quelle di moto quanto-meccanico, per esempio l'*equazione d'onda di Schrödinger* (1887-1961). Visto che in questo libro la meccanica quantistica è supposta sconosciuta, qui è impossibile un'esposizione sistematica della teoria quantistica della dispersione. Si può solo darne una descrizione generale ed alcuni risultati ottenuti con questa teoria.

2. La teoria quantistica della dispersione (e questo è uno dei suoi vantaggi rispetto alla teoria classica) non utilizza il modello dell'elettrone legato in modo quasi-elastico e non introduce alcuna forza che non esiste effettivamente in natura. La meccanica quantistica spiega la struttura e la stabilità dei sistemi atomici per mezzo delle *sole forze elettriche.* Per semplificare, supponiamo che l'atomo possegga un solo *elettrone di valenza* che determina le sue proprietà chimiche ed ottiche. Gli altri elettroni sono solidamente trattenuti negli strati interni, perché le loro energie di legame sono molto più grandi. Gli stati di questi elettroni non sono praticamente perturbati da un campo elettrico debole come quello dell'onda luminosa. Il loro ruolo si riduce soltanto alla modificazione del campo elettrico del nucleo atomico nel quale si sposta l'elettrone di valenza. Proprio per questa ragione è possibile considerare l'atomo come *costituito da un solo elettrone.* Questo modello d'atomo corrisponde molto alla realtà.

In assenza dei campi esterni l'atomo può trovarsi soltanto in *stati stazionari* ben determinati; in questi stati la sua energia può assumere solo valori discreti ben determinati W_1, W_2, W_3, ... (*livelli d'energia*). Essi vengono numerati nell'ordine delle energie crescenti. Quando un atomo passa da un livello d'energia superiore k ad un livello inferiore n, esso emette luce liberando un quanto d'energia

$$\hbar\omega_{kn} \equiv h\nu_{kn} = W_k - W_n. \tag{85.1}$$

Nella transizione inversa dell'atomo da un livello d'energia n inferiore ad un livello superiore k l'atomo è eccitato ed assorbe un quanto d'energia uguale. Dunque, a differenza dell'oscillatore armonico classico l'atomo, persino se esso contiene un solo elettrone, irradia non una sola frequenza ω_0, ma un intero spettro di frequenze ω_{kn} che nella teoria quantistica della dispersione giocano il ruolo di frequenze proprie dell'atomo. Se la transizione è effettuata da un livello più basso k ad un livello più alto n (assorbimento), per conservare invariata la relazione (84.10) è comodo introdurre *frequenze negative* ω_{kn}. Se non c'è alcuna perturbazione esterna (assenza di campi di forza, temperature moderate), in conseguenza dei processi di radiazione tutti gli atomi passeranno sul livello *inferiore* o *fondamentale*, cioè nello *stato* cosiddetto *fondamentale* o *normale.* Sul livello fondamentale un atomo isolato può restarci per un tempo infinitamente lungo, fino a che non passi su un altro livello in conseguenza di un'azione esterna.

Quando viene applicato un campo esterno l'atomo lascia il suo stato fondamentale stazionario iniziale. Secondo la meccanica quantistica, il suo nuovo stato può essere caratterizzato come una sovrapposizione di stati stazionari ciascuno dei quali ha una probabilità ben determinata. Se il campo elettrico è debole e varia in modo armonico nel tempo con la frequenza ω, anche queste probabilità varieranno nel tempo con la stessa frequenza. L'atomo acquista un momento dipolare indotto dal campo elettrico dell'onda luminosa. Questo momento può essere rappresentato come p =

$= \beta E$. Nel caso generale la polarizzabilità β dell'atomo è un *tensore*, ma ci limitiamo al caso semplice in cui esso è uno *scalare*. Se non si tiene conto dell'assorbimento (il che è ammissibile lontano dalle frequenze proprie ω_{nk}), la meccanica quantistica fornisce il seguente risultato:

$$\beta = \frac{e^2}{m} \sum_k \frac{f_{nk}}{\omega_{nk}^2 - \omega^2}, \tag{85.2}$$

dove f_{nk} sono costanti. La formula suppone che prima dell'applicazione del campo esterno l'atomo si trovi nello stato stazionario n. La sommatoria è effettuata su tutti i valori possibili di k, superiori ed inferiori a n.

Per chiarire il significato fisico delle costanti f_{nk}, osserviamo che esiste una certa probabilità che nel corso di un intervallo di tempo dato (per esempio uguale all'unità di tempo) l'atomo, in assenza di campi esterni, passi *spontaneamente* dallo stato stazionario superiore k ad uno stato stazionario inferiore n. La costante f_{nk} è proporzionale a questa probabilità. La transizione spontanea dell'atomo dallo stato inferiore n a quello superiore k è evidentemente impossibile. In questo caso f_{kn} è definita dalla relazione $f_{kn} = -f_{nk}$. Ne segue che per $n = k$ le quantità f_{nk} sono nulle, di modo che la sommatoria nella (85.2) è effettuata soltanto su $k \neq n$. La quantità f_{nk} è detta *forza dell'oscillatore di frequenza* ω_{nk}.

Utilizzando le espressioni (85.2), arriviamo alla seguente formula di dispersione per gli atomi ad un elettrone di valenza

$$n^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{m} \sum_{k \neq n} \frac{f_{nk}}{\omega_{nk}^2 - \omega^2}. \tag{85.3}$$

Il confronto di questa formula con la formula classica (84.10) (senza tener conto dell'assorbimento) conduce alla seguente analogia. Tutto avviene come se gli atomi, che si trovano nello stesso stato iniziale n, venissero suddivisi in gruppi ordinati e numerati dall'indice k. Gli atomi di uno stesso gruppo si comportano come *oscillatori armonici classici* di frequenza propria ω_{nk}. Se $k > n$, la frequenza ω_{nk} è considerata *positiva*, e *negativa* per $k < n$. Il numero di atomi del k-esimo gruppo contenuti nell'unità di volume è dato dall'espressione $N_k = f_{nk}N$. Visto che $\sum N_k = N$, dev'essere

$$\sum_k f_{nk} = 1. \tag{85.4}$$

Se l'atomo possiede Z elettroni di valenza, questa relazione si trasforma in

$$\sum_k f_{nk} = Z. \tag{85.5}$$

Le formule ottenute esprimono la cosiddetta *regola delle somme*, stabilita indipendentemente da Thomas e Reiche da una parte, e da Khun,

dall'altra (1925). I ragionamenti citati, che servono solo ad illustrare il metodo, non possono costituire la dimostrazione delle formule (85.4) e (85.5). Ciò è evidente dal fatto che per $k < n$ le forze degli oscillatori f_{nk} e quindi anche i numeri N_k di atomi sono negativi. Ma le formule stesse (85.4) e (85.5) possono essere rigorosamente dimostrate mediante i metodi della meccanica quantistica.

3. Se prima dell'applicazione del campo elettrico gli atomi di gas non si trovavano tutti nello stesso stato stazionario, ma erano distribuiti tra svariati stati stazionarî, la formula (85.3) dev'essere sostituita con

$$n^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{m} \sum_n \sum_k \frac{f_{nk}}{\omega_{nk}^2 - \omega^2}. \qquad (85.6)$$

Allo stesso modo debbono essere generalizzate le espressioni (85.4) e (85.5): la sommatoria in queste formule dev'essere effettuata non soltanto su tutti i valori di k, ma anche su tutti i valori di n.
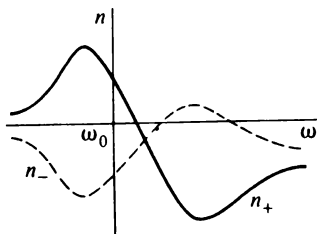
Fig. 300

Un fenomeno nuovo in linea di principio viene qui previsto dalla meccanica quantistica e risulta dal fatto che nella formula (85.6) possono comparire termini contenenti f_{nk} positivi (se $k > n$) e f_{nk} negativi (se $k < n$). Essendo $\omega_{nk}^2 = \omega_{kn}^2$, nella formula di dispersione figureranno soltanto le somme $(f_{nk} + f_{kn})$ e non questi termini presi separatamente. Se il livello energetico inferiore possiede più atomi di quello superiore, si ha $(f_{nk} + f_{kn}) >$ > 0; nel caso contrario si ha $(f_{nk} + f_{kn}) < 0$. Nel primo caso la frequenza propria $|\omega_{nk}|$ introduce nella formula di dispersione (85.6) un termine dello stesso segno che nella formula classica, e nel secondo caso essa introduce un termine di segno opposto. Basandosi su questa determinazione, si può parlare di *dispersione positiva* e *negativa*. La variazione dell'indice di rifrazione $n(\omega)$ in prossimità della frequenza propria $\omega_0 = |\omega_{nk}|$ in entrambi i casi è rappresentata schematicamente in figura 300 (n_+ dispersione positiva, n_- dispersione negativa). Quanto al coefficiente di smorzamento γ, nel caso della dispersione negativa è *negativo* anch'esso, cioè nella propagazione della luce ha luogo la sua *amplificazione* e non l'indebolimento. Ciò è evidentemente dovuto alle transizioni degli atomi da livelli energetici supe-

riori a livelli inferiori, accompagnate da un'emissione di quanti di luce (radiazione indotta, si veda il § 119).

Nelle condizioni usuali, prima dell'applicazione del campo esterno, gli atomi del mezzo occupano il livello energetico più basso, cioè il livello fondamentale. In questo caso l'onda luminosa farà passare gli atomi soltanto sui livelli più alti, di modo che tutte le f_{nk} risulteranno positive. Lo stesso avrà luogo anche nel caso dell'eccitazione termica di un sistema di atomi in equilibrio termodinamico, poiché secondo la formula di Boltzmann il numero di atomi che occupano lo stato iniziale decrescerà con il crescere del numero d'ordine dei livelli energetici. Ma se si utilizza un procedimento d'eccitazione non termico, facendo, per esempio, passare una corrente elettrica intensa attraverso la sostanza, si possono produrre stati metastabili, *fuori equilibrio termodinamico*, con *popolazioni invertite sui livelli energetici*, come realmente accade nei laser. Per popolazione invertita di due diversi livelli energetici s'intende uno stato tale che nel livello superiore si trovano più atomi che in quello inferiore. In questo caso si può ottenere e si ottiene effettivamente un mezzo a dispersione negativa. L'influenza esercitata dai termini negativi della formula di dispersione fu osservata per la prima volta da Ladenburg (1930) in un gas attraverso il quale veniva fatta passare una forte scarica elettrica, benché nei suoi esperimenti la dispersione restasse in totale positiva.

§ 86. *Metodi di studio sperimentale della dispersione anomala*

1. La dispersione anomala fu per la prima volta osservata da Le Roux (1832-1907) nel 1861. Le Roux scoprì che in prisma riempito da vapori di iodio i raggi blu venivano rifratti meno di quelli rossi (i raggi intermedi sono fortemente assorbiti dai vapori di iodio e sfuggono all'osservazione). Ne segue che quando si passa dai raggi rossi a quelli blu l'indice di rifrazione dei vapori di iodio deve diminuire, il che significa che in questa regione di spettro la dispersione dei vapori di iodio è *anomala*.

La scoperta di Le Roux non richiamò la dovuta attenzione fino a che Christiansen (1848-1917) scoprì nel 1870 e studiò dettagliatamente la dispersione anomala in una soluzione alcoolica di fucsina. In questo caso l'indice di rifrazione è minore ($n = 1{,}285$) per i raggi violetti e maggiore ($n = 1{,}561$) per i raggi gialli (i raggi verdi sono assorbiti).

Studi sperimentali sistematici sulla dispersione anomala sono stati effettuati da Kundt (1839-1894), il quale stabilì un importante risultato sperimentale: *l'andamento anomalo della dispersione è sempre accompagnato da assorbimento.* Dopo gli esperimenti di Kundt e lo sviluppo della teoria della dispersione diventò evidente che la dispersione anomala non è un fenomeno straordinario, ma che essa deve manifestarsi per tutte le sostanze nelle regioni spettrali dove si produce un forte assorbimento.

Per lo studio della dispersione anomala Kundt utilizzava il *metodo dei prismi incrociati*, che era stato utilizzato già da Newton nei suoi studi sulla dispersione della luce. L'idea del metodo è la seguente. Si prendono due prismi il primo dei quali è ottenuto da una sostanza di *dispersione normale* (generalmente in vetro) ed il secondo dalla sostanza in esame. Come sempre in spettroscopia, la sorgente di luce è una stretta fenditura illuminata, messa nel piano focale della lente che assicura la collimazione. Il primo prisma, il cui spigolo è messo *verticalmente*, scompone la luce incidente in una banda colorata orizzontale (spettro). Il secondo prisma, il cui spigolo rifrangente è *orizzontale*, è messo dietro il primo prisma. Questo prisma sposta ogni punto della banda colorata in alto o in basso, a seconda che la sua
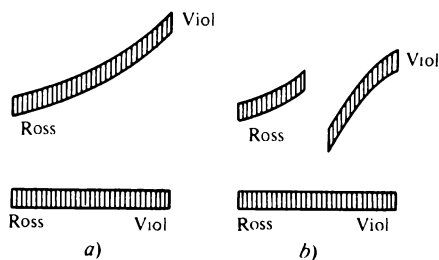
Fig. 301
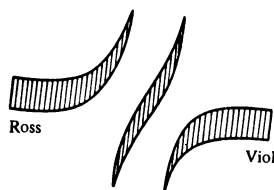
Fig. 302

base sia in alto o in basso. Lo spostamento dipende dalla lunghezza d'onda ed in conseguenza di questo fatto la banda s'incurva e diventa inclinata. Se la dispersione del secondo prisma è normale, la banda si alza o s'abbassa in modo monotono (fig. 301,*a*). Se invece la dispersione è anomala, in conseguenza dell'assorbimento dei raggi a rifrangenza anomala, la banda si scinde in due parti i cui bordi adiacenti alla banda d'assorbimento s'incurvano in sensi opposti (fig. 301,*b*). S'intende che per ottenere una tale figura si deve utilizzare un sistema di lenti che dà sullo schermo immagini colorate della fenditura illuminata.

Kundt realizzò un elegante esperimento di dimostrazione, utilizzato ancora oggi, in cui il secondo prisma è costituito dalla fiamma conica di un fornello a gas nella quale viene introdotto del sodio metallico. Facendo passare la luce attraverso la fiamma, nello spettro si osserva non soltanto una banda oscura corrispondente alla riga gialla d'assorbimento del sodio, ma anche la curvatura in sensi opposti dei bordi delle parti di spettro separate adiacenti alla regione d'assorbimento (fig. 301,*b*). La riga D d'assorbimento dei vapori di sodio nella parte gialla dello spettro è composta da due righe fini molto vicine di lunghezze d'onda $\lambda_{D_1} = 589{,}0$ nm e $\lambda_{D_2} =$ $= 589{,}6$ nm. Nell'esperimento di dimostrazione di Kundt la densità dei vapori di sodio era tanto grande che entrambe le righe si confondevano e davano una sola banda, e non si risolvevano i dettagli del fenomeno. Si pos-

sono risolvere questi dettagli, diminuendo la densità dei vapori di sodio e migliorando le condizioni dell'esperimento. È allora possibile osservare due regioni di dispersione anomala corrispondenti alle righe d'assorbimento di lunghezze d'onda λ_{D_1} e λ_{D_2} (fig. 302).

2. Come è stato già indicato al punto 2 del § 84, per verificare la teoria è consigliabile utilizzare gas di piccola densità caratterizzati da righe d'assorbimento fini e nette. Ma se la densità è piccola, il che è necessario per poter lavorare vicino alla riga d'assorbimento, gli indici di rifrazione dei gas sono piccoli anch'essi. Per la loro misura si può ricorrere al metodo interferenziale elaborato da Puccianti (1901) e perfezionato da D.S. Roždestvenskij nelle sue opere classiche concernenti la dispersione anomala nei vapori di sodio (1912).

In questo metodo un interferometro (per esempio quello di Jamin) è incrociato con uno spettrografo (reticolo di diffrazione o prisma a grande dispersione). L'interferometro è disposto in modo che in luce bianca produca frange d'interferenza orizzontali sulla fenditura verticale dello spettrografo. La figura d'interferenza a colori formata sulla fenditura viene sviluppata dallo spettrografo lungo la direzione orizzontale. Lo spettro è intersecato secondo la direzione longitudinale da frange d'interferenza caratterizzate dallo stesso ordine d'interferenza. Il colore di una frangia, seguendo la sua lunghezza, passa dal rosso al violetto, e le interfrange diminuiscono col diminuire della lunghezza d'onda. Ai minimi d'interferenza corrispondono righe scure. In tal modo, lo spettro sarà intersecato nella direzione longitudinale da righe scure la cui larghezza diminuisce dal rosso al violetto.

Prima di procedere alle misure l'apparecchio è regolato in modo che la frangia d'interferenza di ordine zero sia rettilinea e orizzontale. Prendiamola come asse X orientato dal rosso al violetto e dirigiamo l'asse Y parallelamente alla fenditura dello spettrografo. La larghezza dell'interfrangia è proporzionale a λ e può essere rappresentata nella forma $\Delta y = \alpha\lambda(x)$, dove α è la costante dell'apparecchio, praticamente indipendente dal numero d'ordine della frangia (dall'ordine d'interferenza) k. Quindi l'ordinata della k-esima frangia è $y_k = k\Delta y = \alpha k\lambda(x)$. Quest'è l'equazione della curva che definisce la forma della frangia considerata.

Introduciamo ora in un braccio dell'interferometro uno strato di spessore l della sostanza da esaminare d'indice di rifrazione $n(\lambda)$. Si aggiungerà allora la differenza di cammino $(n-1)l$, e in conseguenza di ciò le frange d'interferenza si sposteranno in alto o in basso di un numero di interfrange uguale a $(n-1)l/\lambda$, cioè di una distanza uguale a $(n-1)l/\lambda(\Delta y)$. L'equazione che descrive la forma della k-esima frangia, è

$$y_k = \alpha[k\lambda(x) \pm (n-1)l] \qquad (86.1)$$

(il segno dipende dal braccio dell'interferometro nel quale è stato introdotto lo strato di sostanza da esaminare). In particolare, per $k = 0$ si ottiene $y_0 = \alpha(n-1)l$. Si vede che la frangia d'ordine zero descrive in una certa

scala la curva di variazione dell'indice di rifrazione n in funzione dell'ascissa x, e quindi in funzione della lunghezza d'onda λ e determina dunque la dispersione della sostanza esaminata. Le frange di ordine diverso da zero presentano un'inclinazione supplementare dipendente da k (si veda la figura 303 estratta dalle opere di Roždestvenskij).

3. Una piccola modifica del metodo ha permesso a Roždestvenskij di aumentare notevolmente la precisione delle misure in prossimità delle bande d'assorbimento. Il metodo modificato fu detto *metodo dei « ganci »*.
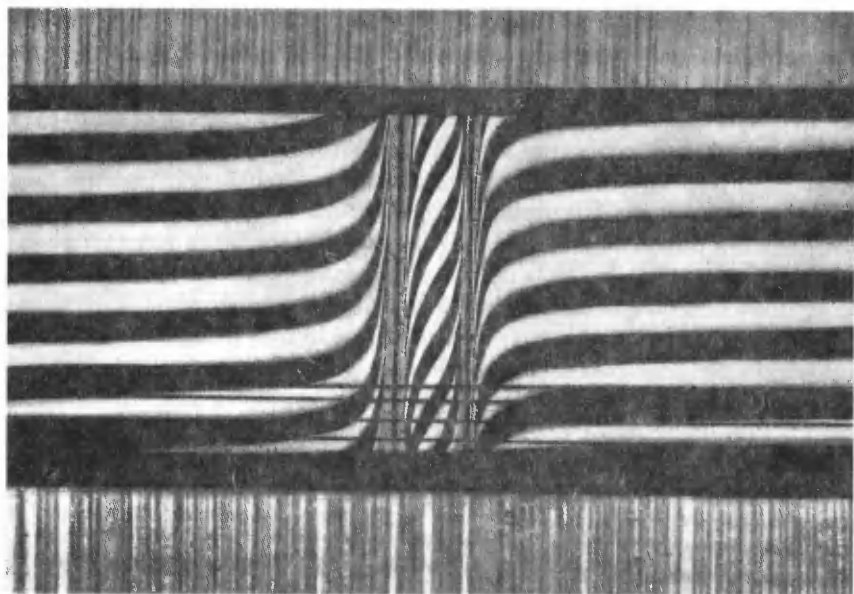
Fig. 303

Ammettiamo che in un braccio dell'interferometro sia introdotta la sostanza da esaminare (gas o vapore) e nell'altro una lamina di vetro di spessore l_v ad indice di rifrazione n_v. La lamina introduce tra i fasci una differenza di cammino $(n_v - 1)l_v$, spostando la figura d'interferenza verso l'alto o verso il basso di una distanza $(n_v - 1)l_v\alpha$. L'ordinata della k-esima frangia è ora determinata dall'espressione

$$y_k = \alpha[k\lambda(x) \pm (n - 1)l \mp (n_v - 1)l_v]. \tag{86.2}$$

La frangia d'interferenza di ordine zero sparisce dal campo visivo. Il suo posto nel campo visivo viene occupato da un'altra frangia d'interferenza, il cui ordine d'interferenza k è dato dalla (86.2) dove si pone $y_k = 0$. Si trova allora

$$k = \pm \frac{n_v - 1}{\lambda} l_v \mp \frac{n - 1}{\lambda} l. \tag{86.3}$$

Visto che gli indici di rifrazione dei gas sono vicini all'unità, l'ultimo termine è piccolo e può essere trascurato nel calcolo di k. In tal modo per una lamina di spessore $l_v = 1$ mm, $n_v = 1{,}5$ mm e per una lunghezza d'onda $\lambda = 600$ nm si ottiene $k \sim 10^4$. In luce bianca è impossibile un'interferenza di ordine tanto alto. L'interferenza diventa possibile grazie alla utilizzazione di uno spettroscopio che funge da monocromatore che scompone la luce bianca nelle sue componenti quasi-monocromatiche. La lunghezza d'onda λ varia in funzione della coordinata x lungo ogni frangia d'interferenza.

Derivando y_k rispetto a x per k costante, troviamo l'inclinazione della frangia di ordine k

$$\frac{dy_k}{dx} = \alpha \frac{d\lambda}{dx} \left(k \pm l \frac{dn}{d\lambda} \mp l_v \frac{dn_v}{d\lambda}\right). \tag{86.4}$$

Grazie alla piccola dispersione del vetro l'ultimo termine è piccolo e può essere trascurato. Se, in assenza della lamina di vetro e della sostanza esaminata, la frangia d'interferenza di ordine zero è orizzontale, l'introduzione della lamina provoca l'inclinazione delle frange d'interferenza. L'inclinazione di una frangia è data dalla derivata $\frac{dy_k}{dx} = k\alpha \frac{d\lambda}{dx}$, cioè essa è tanto più grande quanto più grande è l'ordine d'interferenza k. L'inclinazione provocata dalla lamina di vetro ha lo stesso senso in tutta la regione spettrale. Quando la lamina viene messa nell'altro braccio dell'interferometro, k cambia di segno e con esso cambia di segno anche l'inclinazione delle frange d'interferenza. Mettiamo la lamina nel braccio dell'interferometro dove $k > 0$, cioè

$$k \approx \frac{n_v - 1}{\lambda} l_v. \tag{86.5}$$

Con la determinazione adottata del senso positivo dell'asse X ($d\lambda/dx < 0$) si ottiene $dy_k/dx < 0$, cioè la pendenza delle frange d'interferenza è diretta dall'estremità positiva dell'asse Y verso l'estremità positiva dell'asse X (estremità violetta).

Supponiamo ora che nel secondo braccio dell'interferometro sia introdotto il gas esaminato. L'indice di rifrazione del gas lontano dalla riga d'assorbimento è molto vicino all'unità e la sua presenza non modifica praticamente l'inclinazione delle frange. Invece, in prossimità della riga d'assorbimento la derivata $dn/d\lambda$ è grande e provoca una forte curvatura delle frange d'interferenza. In assenza della lamina di vetro l'inclinazione delle frange sarà determinata dalla derivata

$$\frac{dy_k}{dx} = -\alpha l \frac{d\lambda}{dx} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

Per conseguenza, nella regione della dispersione normale ($dn/d\lambda < 0$) si ottiene $dy_k/dx > 0$, cioè in questo caso le frange d'interferenza si abbassano quando ci si sposta verso sinistra.

Dunque, nella regione di dispersione normale la lamina di vetro e il gas esaminato provocano un'inclinazione delle frange in sensi opposti. Quando la lamina e il gas agiscono simultaneamente, per una scelta conveniente della lamina si può ottenere una compensazione dei loro effetti in un certo punto della frangia d'interferenza. In questo punto la tangente alla frangia è orizzontale, cioè sulla frangia si ottiene un « *gancio* ». In prossimità della riga d'assorbimento si ottengono due ganci, entrambi situati nella regione di dispersione normale. A sinistra (dal lato delle onde lunghe) il vertice del gancio è orientato verso il basso ed a destra (dal lato delle onde corte) esso è diretto verso l'alto (fig. 304). Al vertice di gancio dev'essere $dy_k/dx = 0$, o
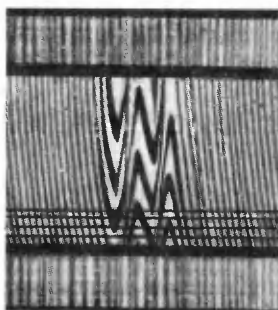
Fig. 304

$dy_k/d\lambda = 0$, cioè

$$k + l\frac{dn}{d\lambda} - l_v\frac{dn_v}{d\lambda} = 0,$$

o

$$l\frac{dn}{d\lambda} = -k + l_v\frac{dn_v}{d\lambda}. \tag{86.6}$$

Come è stato già detto l'ultimo termine del secondo membro è piccolo e può essere trascurato, e il primo termine può essere calcolato mediante la formula (86.5). Quindi mediante la formula (86.6) si possono calcolare i valori della dispersione $dn/d\lambda$ del gas per i valori di λ corrispondenti ai vertici dei ganci, cioè ai punti di curvatura delle frange d'interferenza.

Già all'inizio delle sue ricerche Rŏzdestvenskij costatò che lontano dalla riga d'assorbimento la formula di Sellmeier traduce correttamente la variazione dell'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda. Questa formula si deve scrivere nella forma

$$n^2 = 1 + 4\pi\frac{Nfe^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 + \frac{Nf\lambda_0^2\lambda^2e^2/m}{\pi c^2(\lambda^2 - \lambda_0^2)}, \tag{86.7}$$

dove f è la forza d'oscillatore. Indichiamo con $\Delta\lambda$ la distanza tra il vertice

di uno dei ganci e la riga d'assorbimento λ_0 (la distanza tra i vertici di due ganci è allora uguale a $2\Delta\lambda$). Calcoliamo mediante la formula (86.7) la derivata $dn/d\lambda$, tenendo qui conto del fatto che $|\Delta\lambda| \ll \lambda_0$ e che $n - 1 \ll 1$. Applicando la formula (86.6) e trascurando l'ultimo termine, troviamo

$$f = \frac{4\pi c^2 k}{Nl\lambda_0^3 e^2/m} = \frac{4\pi c^2 (n_v - 1) l_v}{Nl\lambda_0^4 le^2/m} (\Delta\lambda)^2. \tag{86.8}$$

Dunque, la forza d'oscillatore può essere determinata misurando la distanza tra i vertici dei ganci.

§ 87. *Dispersione in un plasma*

1. Il plasma è un gas ionizzato in cui gli elettroni e gli ioni possono essere considerati come particelle libere con frequenze proprie uguali a zero (cfr. il vol. III, § 121). La permettività dielettrica del plasma è determinata essenzialmente dagli *elettroni liberi.* L'influenza degli ioni può essere trascurata, poiché le loro masse sono praticamente infinitamente grandi rispetto alle masse degli elettroni. Ponendo nella formula (84.5) $\omega_0 = 0$ e trascurando lo smorzamento, otteniamo per il plasma

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \tag{87.1}$$

dove è stata introdotta la notazione

$$\omega_p^2 = 4\pi N e^2/m \tag{87.2}$$

e N indica la concentrazione di elettroni liberi. La grandezza ω_p si dice *frequenza di plasma* o *di Langmuir.* La frequenza ω_p gioca per il plasma il ruolo di *frequenza propria*, ma essa caratterizza non le particelle prese isolatamente, ma *tutto l'insieme di particelle cariche* che costituiscono il plasma.

Per spiegare le cause della comparsa di una « frequenza propria » in un insieme di particelle, ciascuna delle quali presa isolatamente non possiede frequenza propria, consideriamo il seguente esempio. Supponiamo che un plasma neutro occupi lo spazio compreso tra due piani infiniti perpendicolari all'asse X. Il campo elettrico medio in questo plasma neutro è uguale a zero. Spostiamo tutti gli elettroni del plasma d'una piccola distanza x parallelamente all'asse X (fig. 305) senza spostare gli ioni. In queste condizioni alle frontiere del plasma appariranno cariche elettriche con una densità superficiale $\sigma = Nex$ e nel plasma apparirà un campo elettrico $E = 4\pi\sigma = 4\pi Nex$. Ogni elettrone è sottoposto all'azione della forza quasi-elastica $F = 4\pi Ne^2 x$. Se abbandoniamo il plasma a se stesso, appariranno oscilla-

zioni armoniche libere degli elettroni di frequenza propria uguale a $\sqrt{4\pi Ne^2/m}$. Quest'è precisamente la frequenza di plasma.

2. Alla frequenza di plasma $\omega = \omega_p$ la permettività dielettrica ε diventa nulla. Per $\omega > \omega_p$, ε è positiva (come anche l'indice di rifrazione $n = \sqrt{\varepsilon}$) ma inferiore all'unità. Per $\omega < \omega_p$, ε è negativa e l'indice di rifrazione è puramente immaginario, cioè $n = -i\varkappa$. Perciò le onde elettromagnetiche lunghe (la cui frequenza è $\omega < \omega_p$) non possono propagarsi nel plasma. Le onde lunghe possono penetrare soltanto in uno strato superficiale sottile, subendo una riflessione totale su questo strato. Infatti, supponiamo che l'onda incidente sia polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza. (Il caso di un'altra polarizzazione è trattato nello stesso modo.) Secondo la
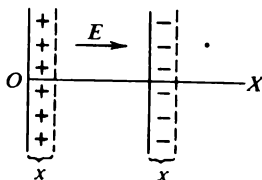
Fig. 305

formula di Fresnel si ha allora

$$\frac{R}{\mathscr{E}} = \frac{\cos\varphi - \sqrt{\varepsilon}\cos\psi}{\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon}\cos\psi} = \frac{\cos\varphi + i\varkappa\cos\psi}{\cos\varphi - i\varkappa\cos\psi},$$

ed inoltre $\sin\varphi/\sin\psi = \sqrt{\varepsilon} = -i\varkappa$. Di conseguenza, $\cos\psi = \sqrt{1 - \sin^2\psi} = \sqrt{1 + \sin^2\varphi/\varkappa^2}$. Quindi $\cos\psi$ è una quantità reale e perciò $|R/\mathscr{E}| = 1$, il che dimostra la nostra proposizione.

Queste considerazioni giocano un ruolo estremamente importante nei *ponti radio a grande distanza* sulla Terra. L'atmosfera terrestre ha una regione ionizzata detta *ionosfera* che incomincia all'incirca all'altezza di 60 km e si estende probabilmente fino ad altezze di ~20 000 km. Le principali sorgenti d'ionizzazione della ionosfera sono la radiazione solare ultravioletta ed i raggi X molli (lunghezza d'onda da 0,8 a 30 nm) emessi dalla corona solare. Un'altra sorgente di ionizzazione è l'emissione corpuscolare del Sole. La concentrazione N degli elettroni varia con l'altitudine in modo irregolare. Esistono alcuni massimi relativi di ionizzazione situati a diverse altezze. La regione dell'atmosfera contenente uno di questi massimi è detta convenzionalmente *strato ionosferico*. Gli strati disposti nell'ordine di altezza crescente sono indicati con D, E_1, E_2, F_1, F_2. I massimi della concentrazione elettronica in questi strati variano all'incirca nei limiti da 10^4 a 10^6 elettroni per cm^3. La concentrazione elettronica dipende dalla latitudine geografica del luogo e subisce variazioni diurne ed annuali. Essa è più grande d'estate che d'inverno, e di giorno è più grande che di notte. Inoltre

si osservano variazioni *sporadiche* della concentrazione elettronica dovute a eruzioni solari, ecc.

Vediamo ora come le onde radio emesse da una stazione terrestre A arrivano al ricevitore B che si trova anch'esso sulla superficie terrestre a distanza di alcune migliaia di chilometri da A. Il tragitto diretto attraverso la terra è da escludere, poiché essendo conduttore il suolo assorbe fortemente le onde radio. L'indice di rifrazione dell'aria non ionizzata è poco diverso dall'unità, cosicché la rifrazione delle onde radio non gioca praticamente alcun ruolo. Se non ci fosse la ionosfera, le onde emesse da A potrebbero raggiungere B solo per diffrazione. Ma il recevitore B è situato nella regione dell'ombra geometrica a una distanza di molte migliaia o di decine di migliaia di lunghezze d'onda dalla frontiera dell'ombra. In queste condizioni l'intensità dell'onda diffratta nel punto in cui si trova il ricevitore B sarà infinitamente piccola e nessun ricevitore potrà praticamente rivelare quest'onda. La situazione cambia se esiste la ionosfera, poiché l'onda radio può *riflettersi sulla ionosfera* e giungere in tal modo al ricevitore. Soltanto grazie a questa riflessione è possibile la trasmissione dei segnali radio sulla superficie terrestre a distanze di molte migliaia di chilometri.

3. Stabiliamo una relazione tra la velocità di fase v e la velocità di gruppo u delle onde elettromagnetiche nel plasma per $\omega > \omega_p$. Utilizzando la formula (87.1), otteniamo per il numero d'onda k

$$c^2 k^2 = \omega^2 \varepsilon = \omega^2 - \omega_p^2.$$

La derivazione di questa relazione ci dà $c^2 k\, dk = \omega\, d\omega$, cioè $(\omega/k)(d\omega/dk) = c^2$, o

$$vu = c^2. \tag{87.3}$$

La velocità di fase nel plasma è sempre superiore alla velocità della luce nel vuoto

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}. \tag{87.4}$$

Per la velocità di gruppo la relazione (87.3) dà

$$u = c^2/v = c\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}. \tag{87.5}$$

Essa è sempre inferiore a c, come dev'essere.

Notiamo una curiosa applicazione astrofisica della formula (87.5). Dopo la scoperta delle *pulsar*, fatta da Hewish nel 1967, è stato subito osservato che i *segnali di grande lunghezza d'onda emessi da pulsar pervenivano alla Terra più lentamente dei segnali di lunghezza d'onda minore.* (Si può convincersene ricevendo uno stesso segnale per mezzo di due ricevitori accordati a differenti frequenze.) Ciò è stato spiegato con l'influenza esercitata dal *plasma interstellare* attraversato dal segnale. Un segnale quasi-monocromatico si propaga nel plasma interstellare con la velocità di grup-

po (87.5). Il tempo di propagazione del segnale dalle pulsar fino alla Terra è dato dall'integrale $t = \int dx/u$ esteso a tutto il tragitto. La concentrazione N di elettroni liberi e con essa anche la frequenza di plasma ω_p hanno valori differenti nei diversi punti del tragitto. Ma dappertutto si ha $\omega_p \ll \omega$, cosicché ci si può limitare al primo termine nello sviluppo dell'espressione integranda in serie di potenze del rapporto ω_p^2/ω^2. Ciò dà

$$t = \frac{1}{c}\int dx(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{-1/2} = \frac{1}{c}\int dx\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right).$$

Rispetto al vuoto il tempo di propagazione di un segnale aumenta di

$$\Delta t = \frac{1}{2c\omega^2}\int \omega_p^2\,dx = \frac{\lambda^2 e^2}{2\pi cmc^2}\int N\,dx = \frac{\lambda^2 r}{2\pi c}\int N\,dx,$$

dove $r = e^2/(mc^2) \approx 2{,}8\cdot 10^{-13}$ cm, che è il *valore classico del raggio dell'elettrone.*

L'integrale $\int N\,dx$ rappresenta il numero totale di elettroni in un canale cilindrico la cui sezione trasversale è uguale a 1 cm^2 e la lunghezza è uguale al tragitto percorso dal segnale per arrivare dalle pulsar alla Terra. Questa è una delle caratteristiche integrali del plasma interstellare sul tragitto del segnale. Malgrado la concentrazione trascurabile di questo plasma, a causa dell'enorme distanza tra la Terra e le pulsar, il valore di questo integrale è sufficiente per permettere di rivelare il ritardo dei segnali di grande lunghezza d'onda rispetto a quelli di lunghezza d'onda corta (nella gamma delle onde centimetriche). Questo procedimento ha per la prima volta permesso di stimare le distanze Terra-pulsar. Supponendo che sul tragitto dalle pulsar alla Terra siano ionizzati all'incirca il 10% degli atomi d'idrogeno, è stato scoperto che le distanze dalle pulsar conosciute sono comprese tra 200 e 7000 anni-luce.

§ 88. *Densità media di energia elettromagnetica nei mezzi dispersivi*

1. L'espressione d'energia elettromagnetica $w = (\varepsilon E^2 + \mu H^2)/(8\pi)$ era stata ottenuta supponendo che ε e μ siano *costanti*, cioè non dipendano dalla frequenza ω (cfr. il vol. III, § 84). *Nel caso di mezzi dispersivi quest'espressione non può essere utilizzata.* Senza trattare questa questione nella forma generale, stabiliamo l'espressione della densità media d'energia elettromagnetica in un mezzo dispersivo non assorbente, considerando un caso particolare suggerito da M.L. Levin.

Supponiamo che una sostanza di permettività dielettrica $\varepsilon(\omega)$ e di permeabilità magnetica $\mu(\omega)$ riempia lo spazio compreso tra le armature di un condensatore piano di capacità $C = \varepsilon(\omega)C_0$ ed un solenoide sottile d'in-

duttanza $L = \mu(\omega)L_0$ che formano un circuito oscillante (fig. 306). C_0 e L_0 sono qui i valori della capacità e dell'induttanza per il caso in cui la sostanza venga sostituita dal vuoto. In assenza di resistenza elettrica nel circuito oscillante avranno luogo oscillazioni armoniche libere di pulsazione $\omega = 1/\sqrt{L(\omega)C(\omega)}$. Se ad un certo istante introduciamo nel circuito una piccola resistenza R, le oscillazioni diventano smorzate e l'energia elettromagnetica accumulata nel circuito, sarà dissipata per effetto Joule nella resistenza R. La quantità totale di calore liberatasi in R quando le oscillazioni cessano deve essere uguale all'energia elettromagnetica accumulata nel circuito prima dell'introduzione della resistenza R. Il problema si riduce quindi al calcolo del calore liberatosi per effetto Joule.
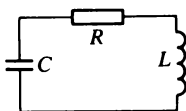
Fig. 306

Supponiamo che per $t < 0$ nel circuito abbiano luogo oscillazioni libere

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \qquad V = V_0 e^{i\omega t},$$

dove I è l'intensità di corrente nel circuito e V la tensione applicata alle armature del condensatore, quantità collegate dalla relazione $L\dot{I} + V = 0$, o $i\omega LI + V = 0$. Se all'istante $t = 0$ nel circuito viene introdotta una resistenza R, a partire da questo momento le oscillazioni sono descritte dall'equazione

$$L(\tilde{\omega})\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C(\tilde{\omega})} = 0,$$

da cui

$$I = I_0 e^{i\tilde{\omega} t}, \qquad t > 0,$$

dove $\tilde{\omega}$ è la frequenza complessa definita dall'equazione

$$\tilde{\omega} L(\tilde{\omega}) - \frac{1}{\tilde{\omega} C(\tilde{\omega})} = iR.$$

Se R è infinitamente piccola, la differenza tra $\tilde{\omega}$ e ω sarà anch'essa infinitamente piccola. Ma ω deve verificare l'equazione

$$\omega L(\omega) - \frac{1}{\omega C(\omega)} = 0.$$

Sottraendo quest'equazione dalla relazione precedente e sostituendo tutte

le differenze con differenziali, si ottiene

$$\left[\frac{d}{d\omega}(\omega L) + \frac{1}{\omega^2 C^2}\frac{d}{d\omega}(\omega C)\right](\tilde{\omega} - \omega) = iR,$$

da cui $\tilde{\omega} = \omega + i\delta$, ed inoltre

$$\frac{R}{\delta} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{1}{\omega^2 C^2}\frac{d(\omega C)}{d\omega} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{L}{C}\frac{d(\omega C)}{d\omega}.$$

Per trovare il calore liberatosi per effetto Joule si deve integrare l'espressione RI^2 rispetto al tempo. Visto che l'elevazione al quadrato è un'operazione non lineare, è necessario passare alla forma reale, cioè realizzare la sostituzione

$$I \rightarrow \mathrm{Re}(I) = (I + I^*)/2.$$

L'energia inizialmente accumulata nel circuito oscillante è uguale a

$$W = \int_0^\infty R\left(\frac{I + I^*}{2}\right)^2 dt = \frac{R\,|I_0|^2}{4}\left\{\frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} + \frac{1}{\delta}\right\}$$

o al limite per $\delta \rightarrow 0$

$$W = \frac{|I_0|^2}{4}\frac{R}{\delta}.$$

Sostituendo qui il valore di R/δ ed utilizzando la relazione $\omega L\,|I_0| = |V_0|$, si ottiene

$$W = \frac{L_0\,|I_0|^2}{4}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega} + \frac{C_0\,|V_0|^2}{4}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}.$$

Se tra le armature del condensatore ed all'interno del solenoide esistesse il vuoto, i valori medi rispetto al tempo dell'energia elettrica e dell'energia magnetica sarebbero uguali a

$$\frac{L_0\,|I_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi}\overline{H^2}\tau_m, \quad \frac{C_0\,|V_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi}\overline{E^2}\tau_e,$$

dove τ_m e τ_e sono volumi del solenoide e del condensatore, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ le intensità del campo elettrico e del campo magnetico quando la tensione applicata al condensatore è V_0 e la corrente nel solenoide è I_0. Ma per V_0 ed I_0 date, i campi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ non dipendono dal mezzo che riempie il condensatore ed il solenoide. Perciò le relazioni precedenti restano valide anche nel caso in cui il condensatore ed il solenoide siano riempiti da una sostanza. Utilizzandole, otteniamo le seguenti espressioni per i valori medi rispetto al tempo delle

densità delle energie elettrica e magnetica:

$$\bar{w}_e = \frac{\bar{W}_e}{\tau_e} = \frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\bar{E^2}, \quad \bar{w}_m = \frac{\bar{W}_m}{\tau_m} = \frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\bar{H^2}. \qquad (88.1)$$

Il difetto di principio di questa dimostrazione sta nel fatto che in essa la derivazione delle funzioni ωL e ωC è realizzata lungo un *asse immaginario* (visto che la differenza delle frequenze $\tilde{\omega} - \omega = iR$ è una quantità puramente immaginaria) e nell'espressione finale (88.1) la derivazione è realizzata rispetto alla *variabile reale* ω. Si può procedere in questo modo solo quando le funzioni ωL e ωC sono *analitiche*. Perciò per ottenere una dimostrazione rigorosa si dovrebbe dimostrare l'analiticità di queste funzioni, il che manca nella dimostrazione di Levin. Questo può essere fatto nella teoria generale della dispersione, esaminando le proprietà analitiche delle funzioni $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$, ma la considerazione di questa questione è fuori dai limiti del nostro libro.

2. Per mettere in evidenza il significato della formula (88.1), consideriamo un gas di oscillatori armonici classici sottoposto ad un campo elettrico monocromatico di frequenza ω. Se questa frequenza è molto differente dalla frequenza propria ω_0 dell'oscillatore, si può trascurare lo smorzamento e rappresentare il suo spostamento rispetto alla sua posizione d'equilibrio con la formula

$$r = \frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

In questo caso l'energia è composta dall'*energia del campo elettromagnetico stesso* (cioè del campo nel vuoto) e *dall'energia delle particelle* sottoposte all'azione del campo. Quest'ultima energia è a sua volta composta dalle *energie cinetica* e *potenziale* degli oscillatori. Nei campi statici non c'è energia cinetica e di conseguenza $w = \varepsilon E^2/(8\pi)$. Nei campi alternati si deve tener conto dell'energia cinetica e lo faremo in seguito.

La densità d'energia propriamente detta del campo elettrico è uguale a

$$w_1 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{E + E^*}{2}\right)^2 = \frac{E^2}{32\pi} + \frac{EE^*}{32\pi} + \text{complessa coniugata}.$$

La densità di energia potenziale è

$$w_2 = \frac{Nm\omega_0^2}{2}\left(\frac{r + r^*}{2}\right)^2 = \frac{Nm\omega_0^2}{8}(r^2 + rr^*) + \text{complessa coniugata}.$$

La densità di energia cinetica è

$$w_3 = \frac{Nm}{2}\left(\frac{\dot{r} + \dot{r}^*}{2}\right)^2 = -\frac{Nm\omega^2}{8}(r^2 - rr^*) + \text{complessa coniugata}.$$

Sostituendo qui l'espressione di r e notando che la formula di Sellmeier implica che

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} = 1 + \frac{(\varepsilon - 1)(\omega_0^2 + \omega^2)}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

otteniamo per la densità di energia elettrica

$$w_e = \frac{\varepsilon E^2}{32\pi} + \frac{1}{32\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}(EE^*) + \text{complessa coniugata.}$$

Mediando rispetto al tempo, si ottiene la prima formula (88.1). Per la densità di energia magnetica la formula è uguale a quella di un mezzo non dispersivo.

Problemi

1. Rayleigh propose di determinare la *velocità media di spostamento dell'energia* u in un'onda progressiva piana come rapporto della densità media di flusso dell'energia alla densità media dell'energia stessa. Utilizzando l'espressione del vettore di Poynting, dimostrare che per un'onda elettromagnetica monocromatica la velocità così calcolata coincide con la velocità di gruppo.

Soluzione. Per le densità medie dell'energia e del suo flusso è facile ottenere

$$\overline{w} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{dk}{d\omega}(EE^*), \quad \overline{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(EE^*),$$

da cui segue il risultato cercato.

2. Dimostrare che se $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ sono positive, le velocità di fase e di gruppo di un'onda elettromagnetica sono dirette nello stesso senso.

Soluzione. La densità media di energia elettromagnetica

$$\overline{w} = \frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}(EE^*) + \frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}(HH^*)$$

è una quantità essenzialmente positiva. In un'onda piana $\varepsilon(EE^*) = \mu(HH^*)$ e di conseguenza

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\mu}{\varepsilon}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0.$$

Questa disuguaglianza dev'essere verificata per qualsiasi mezzo in cui i segni di ε e di μ coincidono, poiché essa è dedotta, supponendo che nel mezzo possa propagarsi un'onda monocromatica omogenea verificante la relazione $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2/c^2 > 0$. Si ammette che la stessa ipotesi resti valida per la velocità di gruppo. Trasformando la disuguaglianza precedente nella forma

$$\mu\frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} = \mu v u > 0,$$

è facile ottenere il risultato cercato.

§ 89. *Assorbimento della luce ed allargamento delle righe spettrali*

1. Nella teoria classica della dispersione l'assorbimento (l'estinzione) della radiazione è tenuto presente in un modo formale, introducendo nell'equazione (84.1) la forza frenante $-g\dot{\mathbf{r}} = -2m\gamma\mathbf{v}$. Sotto l'azione di questa forza l'ampiezza delle vibrazioni diminuisce con il tempo secondo la legge esponenziale $\exp(-\gamma t)$ e l'energia delle vibrazioni secondo la legge

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-2\gamma t} = \mathscr{E}_0 e^{-t/\tau}. \tag{89.1}$$

La natura fisica della forza frenante $-g\mathbf{v}$ resta indeterminata.

Planck sviluppò una teoria della dispersione e dell'assorbimento della luce supponendo che l'oscillatore eccitato (elettrone) in moto accelerato perda continuamente energia per radiazione. L'energia persa in radiazione è data dalla formula

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{v}}^2 \tag{89.2}$$

(cfr. il vol. III, § 141). Applichiamo questa formula all'oscillatore. Se la quantità d'energia persa per periodo dall'oscillatore è relativamente piccola, le oscillazioni saranno poco differenti da quelle di un oscillatore armonico e si potrà allora porre che per periodo i valori medi delle energie cinetica e potenziale dell'oscillatore sono uguali; di conseguenza il valore medio della sua energia totale è uguale al doppio dell'energia cinetica. Ma l'energia totale $\mathscr{E}$ di un oscillatore debolmente smorzato durante un periodo resta quasi costante, di modo che $\bar{\mathscr{E}} \approx \mathscr{E}$. Se le oscillazioni sono debolmente smorzate, $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$, $\dot{\mathbf{v}} = \omega_0 \mathbf{v}_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$. Elevando quest'ultima espressione al quadrato e mediando su un periodo, si ottiene

$$\langle \dot{v}^2 \rangle = \omega_0^2 \langle v^2 \rangle = \omega_0^2\, \mathscr{E}/m.$$

Mediando ora la formula (89.2) sul tempo, troviamo

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}\,\mathscr{E}.$$

Ne risulta di nuovo una formula del tipo (89.1). Dunque la radiazione si manifesta come se la carica oscillante fosse sottoposta all'azione della forza frenante $-2m\gamma\mathbf{v}$, ed inoltre

$$\gamma = \frac{1}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}. \tag{89.3}$$

Lo smorzamento dovuto alla radiazione si dice *smorzamento naturale*. Il tempo di smorzamento naturale τ_{rad} durante il quale l'energia diminuisce

di e volte, è uguale a

$$\tau_{rad} = \frac{1}{2\gamma} = \frac{3mc^3}{2e^2\omega_0^2} = \frac{3mc}{8\pi^2 e^2}\lambda^2 = \frac{3}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda}{r}\right)\left(\frac{\lambda}{c}\right), \tag{89.4}$$

dove $r = e^2/(mc^2) = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm è il *raggio classico dell'elettrone.* Per la lunghezza d'onda $\lambda = 600$ nm questa formula fornisce $\tau_{rad} = 1{,}63 \cdot 10^{-8}$ s.

2. Lo smorzamento rende le vibrazioni non monocromatiche il che porta ad un *allargamento delle righe spettrali.* La larghezza di una riga spettrale dovuta allo smorzamento causato dalla radiazione è detta *larghezza naturale della riga spettrale.* Per calcolarla si deve sviluppare in integrale di Fourier il campo di radiazione $E = E_0 \exp(-\gamma t) \sin \omega_0 t$. I quadrati dei coefficienti di questo sviluppo caratterizzano le *densità spettrali relative di radiazione* $I(\omega)$, cioè la ripartizione dell'energia in una riga spettrale in funzione della frequenza. Il risultato si esprime con la formula (29.10), che
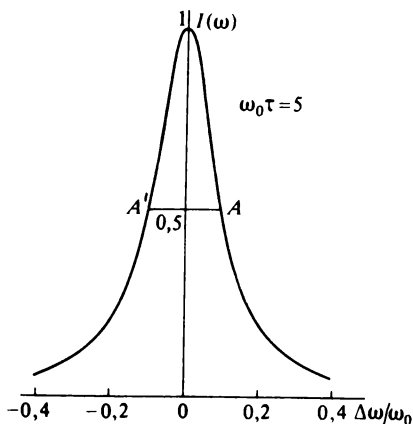
Fig. 307

scriviamo qui nella forma

$$I(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + 1/(2\tau_{rad})^2}, \tag{89.5}$$

sostituendo τ che figura nella (29.10) con $2\tau_{rad}$. (τ caratterizzava lo *smorzamento dell'ampiezza*, mentre qui τ_{rad} indica il *tempo di smorzamento dell'energia.*) La forma di una riga spettrale è riportata in figura 307 per il valore del parametro $\omega_0\tau_{rad} = 5$, valore che è certamente troppo piccolo. (Nell'esempio numerico riportato sopra $\omega_0\tau_{rad} = 2\pi c\tau_{rad}/\lambda \approx 5 \cdot 10^5$.) Il tempo di smorzamento delle righe spettrali emesse dai gas è in realtà molto più grande e le righe spettrali stesse sono molto più strette di quella riportata in figura 307.

Si è soliti caratterizzare la larghezza di una riga spettrale con la distanza tra i punti A ed A' che si trovano da lati opposti rispetto al centro della riga, punti nei quali l'intensità luminosa è la metà di quella al centro della riga. Questa distanza si dice *semilarghezza della riga spettrale*. La semilarghezza naturale di una riga spettrale, come si deduce dalla formula (89.5), è uguale a

$$\Delta\omega = 1/\tau_{\rm rad} = 2\gamma. \tag{89.6}$$

Nella fisica quantistica in cui la radiazione è associata al passaggio dell'atomo da un livello energetico più alto ad un livello energetico più basso (cioè al ritorno dallo stato eccitato a quello normale), la quantità $\tau_{\rm rad}$ rappresenta la *durata di vita dello stato eccitato*. Qui, come anche nella fisica classica, la formula (89.6) è un corollario della relazione generale (29.8) secondo la quale $\Delta\omega\cdot\tau_{\rm rad} \sim 1$.

Lo smorzamento naturale delle radiazioni emesse da atomi isolati come anche l'allargamento corrispondente delle righe spettrali è stato sperimentalmente studiato da W. Wien negli anni 1919-1927. Nei suoi esperimenti i raggi canale costituiti da atomi luminosi venivano iniettati attraverso una stretta fenditura ($0{,}1\times 3$ mm^2) in uno spazio dove regnava un alto vuoto ($<0{,}001$ mm Hg). In questo spazio gli atomi si muovevano senza urti, ma la loro luminosità diminuiva a misura che essi si allontanavano dall'orifizio d'entrata. Misurando l'indebolimento della luminosità, si poteva stimare il tempo di smorzamento naturale. Per far questa stima si doveva conoscere la velocità di moto media degli atomi nei raggi canale. Questa velocità era determinata misurando lo spostamento Doppler delle righe spettrali lungo la direzione dei raggi canale ed era dell'ordine di $5\cdot 10^7$ cm/s (per atomi d'idrogeno). Wien trovò che il tempo di smorzamento τ era all'incirca 10^{-8} s. Questo valore variava un po' con la sostanza utilizzata e con la riga osservata. I risultati ottenuti coincidevano con le previsioni della teoria soltanto per l'ordine di grandezza, mentre la relazione semplice (89.4) tra il tempo di smorzamento e la lunghezza d'onda ($\tau \sim \lambda^2$) non fu confermata. Del resto, non ci si poteva aspettare un accordo quantitativo tra l'esperimento ed una teoria classica semplice basata sul modello dell'oscillatore armonico.

3. Quanto esposto sopra concerne la radiazione dell'*atomo isolato*. Nel caso di un *mezzo* composto di atomi si deve tener conto non soltanto dell'energia persa da un atomo per emissione di radiazione, ma anche del fatto che l'atomo capta l'energia emessa dagli altri atomi. L.I. Mandelštam mostrò che se il mezzo è *otticamente omogeneo*, questi due processi si compensano reciprocamente, e che, in assenza di altre cause di smorzamento, le oscillazioni degli atomi non sono smorzate. In queste condizioni un'onda progressiva piana si propaga nel mezzo senza attenuazione.

La situazione cambia completamente se il mezzo non è più omogeneo. L'omogeneità può essere distrutta per *inclusione di particelle estranee* (pol-

vere o goccette di nebbia in sospensione nell'aria) o per *fluttuazioni termiche* nel mezzo. In queste condizioni la perdita di energia per radiazione da parte degli atomi, quando l'onda si propaga, provocherà il suo indebolimento. Ma in questo caso non si tratta di un vero assorbimento della luce con trasformazione dell'energia elettromagnetica in altre forme d'energia (in calore), ma di una *diffusione della luce* che non è accompagnata da una trasformazione d'energia. L'*assorbimento vero* della luce quando l'energia di un'onda si trasforma in altre forme d'energia (calore) è dovuto ad altre cause. Inoltre l'indebolimento dell'onda causato dalla radiazione è troppo piccolo rispetto all'indebolimento che si osserva realmente.

4. Una delle cause dell'assorbimento della luce consiste nel fatto che gli atomi, all'interno dei quali hanno luogo vibrazioni, *subiscono degli urti gli uni contro gli altri* nel corso dei loro moti d'agitazione termica. Ogni urto modifica fortemente ed in modo irregolare le ampiezze e le fasi delle oscillazioni armoniche e l'energia delle oscillazioni regolari è convertita in calore, cioè si produce un *assorbimento della luce.* Partendo da queste concezioni, H.A. Lorentz sviluppò una teoria dell'allargamento delle righe spettrali dovuto agli urti tra gli atomi (o le molecole) di gas. Quest'allargamento si dice *allargamento per urto.* Lorentz dimostrò che nei gas gli urti tra le molecole, animate di moto d'agitazione termica, conducono statisticamente ad una legge esponenziale di smorzamento delle onde e ad una forma delle righe spettrali dello stesso tipo che si ha per uno smorzamento naturale.

Non riportiamo qui i calcoli dettagliati svolti da Lorentz. Nel fare questi calcoli si dovrebbero introdurre ipotesi speciali sul carattere delle irregolarità delle ampiezze e delle fasi delle vibrazioni dovute agli urti, cosicché il risultato sarebbe comunque approssimato a meno di un fattore numerico. Ma nei limiti di questa precisione un tale risultato si può ottenere senza alcun calcolo per mezzo di considerazioni generali basate sulla formula generale (29.8).

Indichiamo con τ_{urto} il tempo di cammino libero medio di un atomo tra due urti successivi. Si può ammettere che tra gli urti successivi le oscillazioni all'interno dell'atomo siano armoniche e che s'arrestino all'istante dell'urto. Dopo un urto le oscillazioni si rinnovano, ma con nuovi valori delle ampiezze e delle fasi che non sono in alcun modo legati ai valori prima dell'urto. Le oscillazioni che sono discontinue nel tempo, in uno sviluppo spettrale, occuperanno un intervallo di frequenze $\Delta\omega$ che verifica la relazione $\Delta\omega \cdot \tau_{\text{urto}} \approx 1$. Ne segue che l'allargamento per urto delle righe spettrali è dato dalla formula

$$\Delta\omega \sim 1/\tau_{\text{urto}}. \tag{89.7}$$

Il numero di urti che subisce un atomo per unità di tempo è determinato dalla formula della teoria cinetica dei gas $z = N\sigma v$, dove N è il numero di atomi contenuti nell'unità di volume, σ la sezione cinetica trasversale

dell'atomo, $v \approx \sqrt{kT/m}$ la velocità media del moto termico dell'atomo (cfr. il vol. II, § 86). Quindi,

$$\tau_{\text{urto}} \approx \frac{1}{N\sigma v}. \tag{89.8}$$

Lo smorzamento e l'allargamento per urto delle righe spettrali sono particolarmente importanti *nei gas densi* e *ad alte temperature*. Per ridurre l'effetto degli urti è necessario abbassare la densità del gas. Ecco perché negli esperimenti di Wien sullo smorzamento naturale i raggi canale venivano inviati in un alto vuoto. Nelle condizioni usuali gli urti esercitano un'influenza molto più grande sullo smorzamento dell'onda di quanto non faccia la radiazione degli atomi. La formula (89.8) fornisce però dei tempi di smorzamento più grandi e quindi dei valori più piccoli dell'allargamento delle righe, in confronto con i dati sperimentali. Quindi, debbono esistere altre cause di assorbimento della luce e d'allargamento delle righe spettrali.

Tra queste cause possiamo pensare alle azioni esercitate sull'atomo radiante da diversi *campi di forza*, in primo luogo i campi elettrici creati dagli atomi circostanti. Nei campi elettrici costanti le righe spettrali subiscono una suddivisione (effetto Stark). Nei campi alternati le modificazioni che subiscono le righe spettrali sono più complicate. Questa è una delle principali cause d'allargamento delle righe spettrali.

5. Un'altra causa d'allargamento delle righe spettrali è la variazione della frequenza della luce emessa per *effetto Doppler*. Sia ω_0 la frequenza dell'onda emessa da una molecola (o un atomo) fissa. Se la molecola è animata di un moto uniforme, la frequenza dell'onda che essa emette nella direzione dell'asse X varia nel sistema di riferimento di laboratorio e nell'approssimazione non relativistica è data dalla formula

$$\omega = \omega_0(1 + v_x/c), \tag{89.9}$$

dove v_x è la velocità della molecola nella direzione dell'asse X.

Conformemente alla legge di ripartizione delle velocità di Maxwell, la probabilità che la componente x della velocità sia compresa nell'intervallo $(v_x, v_x + dv_x)$, è uguale a

$$dw = A_1 \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)dv_x,$$

dove m è la massa della molecola ed A_1 una costante di normalizzazione (cfr. il vol. II, § 72). Sostituendo in quest'espressione la variabile v_x con ω mediante la formula (89.9), otteniamo

$$dw = A_1 \frac{c}{\omega_0} \exp\left[-\frac{mc^2}{2kT}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2\right]d\omega.$$

Visto che le radiazioni emesse da differenti molecole del gas *non sono coe-*

renti, la quantità dw determina la probabilità di radiazione nell'intervallo spettrale $(\omega, \omega + d\omega)$. L'intensità luminosa $I(\omega)d\omega$ corrispondente a questo intervallo è proporzionale a dw. Si ottiene dunque

$$I(\omega) = I_0 \exp\left[-\frac{mc^2}{2kT}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2\right], \qquad (89.10)$$

dove I_0 è una nuova costante. È evidente che $I_0 = I(\omega_0)$, cioè I_0 è l'intensità spettrale che corrisponde al centro della riga. Da entrambi i lati del centro della riga l'intensità spettrale decresce esponenzialmente secondo la legge (89.10). La semilarghezza della riga spettrale, come è facile calcolare, è data dalla formula

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\frac{2kT}{mc^2}\ln 2}\,\omega_0 = 2\sqrt{\ln 2}\,\frac{v_m}{c}\,\omega_0 = 1{,}67\,\frac{v_m}{c}\,\omega_0, \qquad (89.11)$$

dove $v_m = \sqrt{2kT/m}$ è la velocità più probabile della molecola.

L'effetto Doppler è la principale causa d'allargamento delle righe spettrali dei gas rarefatti ad alte temperature.

6. L'esposizione della teoria dell'assorbimento e della dispersione della luce qui data è fondata su *equazioni lineari* e per questa ragione gli indici di rifrazione n e d'estinzione $\varkappa$ sono *costanti*, cioè *non dipendono dall'intensità della luce.* L'ampiezza di un'onda monocromatica diminuisce durante la sua propagazione secondo la legge $A = A_0 \exp(-2\pi\varkappa x/\lambda)$ e l'intensità secondo la legge

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \qquad (89.12)$$

dove $\alpha = 4\pi\varkappa/\lambda$ è il *coefficiente d'estinzione* (*d'assorbimento*) che generalmente dipende dalla lunghezza d'onda. La formula (89.12) esprime la cosiddetta *legge di Bouguer* (1698-1758) che la postulò nel 1729. Secondo questa legge il coefficiente d'estinzione (d'assorbimento) α non dipende dall'intensità della luce se quest'ultima è monocromatica. S.I. Vavilov, studiando sperimentalmente l'assorbimento della luce in alcune soluzioni, stabilì che il coefficiente d'estinzione α è costante, cioè varia meno del 5% in un intervallo molto vasto di intensità della luce: da 20 a $2{,}5 \cdot 10^{-19}$ W/cm^2, cioè dall'intensità luminosa dei raggi solari diretti concentrati nel fuoco di una lente, fino alle intensità infinitesimali corrispondenti alla soglia di percezione visiva dell'occhio.

Interpretiamo questi risultati dal punto di vista delle *concezioni quantistiche* sull'assorbimento della luce. Quando un'onda luminosa è assorbita da una molecola, quest'ultima passa dal livello energetico fondamentale W_0 al livello eccitato W_n e questo accresce la sua riserva d'energia. Una molecola eccitata presenta un'attitudine all'assorbimento *diversa* da quella che essa possiede quando si trova su un livello fondamentale. Poiché negli esperimenti di Vavilov il coefficiente d'assorbimento resta lo stesso per tut-

te le intensità, ne segue che in questi esperimenti il numero di molecole eccitate è trascurabilmente piccolo rispetto a quello di molecole non eccitate, cioè è relativamente piccolo il tempo di vita media della molecola eccitata. In effetti, per le sostanze utilizzate da Vavilov nei suoi esperimenti, questo tempo non è superiore a 10^{-8} s. Si potrebbe pensare che, per vite medie molto più lunghe e per grandi intensità luminose il numero di molecole allo stato fondamentale (che sono praticamente le sole capaci d'assorbire la luce) sia più piccolo e la legge di Bouguer non sia più verificata. Vavilov scelse sostanze che allo stato eccitato avevano grandi durate di vita, ed osservò una diminuzione del coefficiente d'assorbimento con l'aumento dell'intensità luminosa. Questo fu il primo caso in cui venne osservata *la violazione del principio di sovrapposizione in ottica.*

Dopo la scoperta dei laser, che resero possibile l'ottenimento di onde luminose con intensità dei campi elettrici comparabili ai campi intermolecolari ed interatomici, la classe dei fenomeni ottici « non lineari » si sta estendendo rapidamente. Questi fenomeni sono studiati dall'*ottica non lineare*, una branca ormai vasta ed in rapido sviluppo. Una breve idea di questi fenomeni sarà data nell'ultimo capitolo (capitolo XI) di questo volume.

§ 90. *Birifrangenza nei campi elettrico e magnetico*

1. La natura elettromagnetica della luce e delle sostanze implica che le proprietà ottiche delle sostanze debbano modificarsi quando vengano sottoposte all'azione di campi elettrici e magnetici. Infatti, questi cambiamenti furono rivelati sperimentalmente. Dapprima Faraday scoprì nel 1846 la *polarizzazione rotatoria magnetica.* Poi Kerr (1824-1907) nel 1875 scoprì un « fenomeno elettroottico » che più tardi fu chiamato fenomeno di Kerr. Nel 1877 lo stesso Kerr scoprì che uno specchio di ferro magnetizzato rifletteva la luce polarizzata in modo differente rispetto a quando non era magnetizzato. In seguito furono scoperti altri fenomeni *elettroottici* e *magnetoottici.*

L'effetto elettroottico di Kerr consiste nel fatto che molti corpi isotropi diventano otticamente anisotropi quando sono sottoposti all'azione di un campo elettrico continuo. Essi si comportano allora come cristalli uniassici birifrangenti il cui asse ottico è parallelo al campo elettrico applicato.

Kerr stesso osservò questo fenomeno prima con il vetro messo in un campo elettrico. In questo caso, come nel caso di tutti i corpi solidi, l'anisotropia ottica può rappresentare un fenomeno secondario, e cioè può apparire in conseguenza delle deformazioni meccaniche prodotte dal campo elettrico. Ma le ricerche successive di Kerr stesso e di altri scienziati mostrarono che questo fenomeno si manifestava anche nei liquidi e persino nei gas dove l'anisotropia meccanica era da escludere. Inoltre, l'effetto di Kerr

« puro » può essere separato dall'effetto provocato dalle deformazioni meccaniche, studiando il fenomeno in campi alternati: se viene applicato o soppresso bruscamente un campo elettrico, le deformazioni meccaniche non compaiono o non spariscono subito, ma con un certo ritardo, mentre il fenomeno di Kerr propriamente detto si manifesta nei liquidi e nei gas *praticamente senza ritardo* (si veda il punto 5).

Come ogni birifrangenza, l'effetto Kerr può essere rivelato, mettendo tra due nicol incrociati N_1 e N_2 un condensatore piano riempito dalla sostanza da studiare (fig. 308, cfr. con la fig. 278). In assenza di campo elettrico esterno la luce non passa attraverso il sistema, ma se si applica un campo elettrico compare la *birifrangenza* ed in conseguenza di ciò la luce,
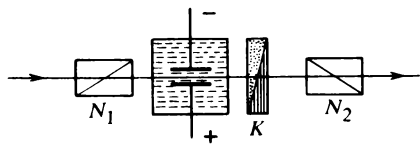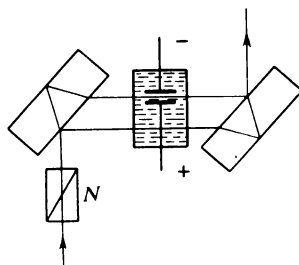
Fig. 308 Fig. 309

che ha attraversato il condensatore, è polarizzata ellitticamente e passa parzialmente attraverso il nicol N_2; il campo visivo diventa chiaro. Introducendo un compensatore K, possiamo misurare la differenza di fase tra i raggi apparsi per birifrangenza, e determinare in tal modo la differenza $n_e - n_o$ tra gli indici di rifrazione ordinario n_o e straordinario n_e della sostanza studiata soggetta all'azione di un campo elettrico esterno. Essendo questa differenza molto piccola, si può misurarla soltanto per mezzo di metodi intérferenziali analoghi a quello descritto sopra.

Modificando un po' l'esperimento descritto, si può determinare, per le sostanze liquide, entrambe le differenze, $n_e - n$ e $n_o - n$. Secondo un suggerimento di L.I. Mandelštam, si può utilizzare, per esempio, l'interferometro di Jamin. Il liquido studiato è versato in una catinella nella quale il condensatore viene immerso per intero (fig. 309). Uno dei raggi che interferiscono passa attraverso il condensatore e l'altro passa all'esterno di esso. Il nicol polarizzatore N è disposto in modo che la luce sia polarizzata nel piano della figura o nel piano perpendicolare. Quando è applicato un campo elettrico, l'indice di rifrazione n del raggio esterno non cambia, mentre il raggio che attraversa il condensatore si trasforma in un raggio straordinario o ordinario a seconda della posizione del nicol. Misurando lo spostamento delle frange d'interferenza si può calcolare $n_e - n$ e $n_o - n$.

2. Supponiamo che il campo elettrico esterno sia *uniforme* e che il rag-

Tavola 9

Sostanza	Temperatura, °C	Costante di Kerr B, in un. CGSE	Sostanza	Temperatura, °C	Costante di Kerr B, in un. CGSE
Liquidi			*Gas*		
Nitrobenzene	20	$2{,}2\cdot 10^{-5}$	Alcool etilico	18	$9{,}2\cdot 10^{-10}$
Nitrotoluene	20	$1{,}2\cdot 10^{-5}$	Acetone	83	$5{,}4\cdot 10^{-10}$
Clorobenzene	20	$1\cdot 10^{-6}$	Solfuro di carbonio	57	$3{,}6\cdot 10^{-10}$
Acqua	20	$4{,}7\cdot 10^{-7}$	Etere etilico	63	$-0{,}66\cdot 10^{-10}$
Solfuro di carbonio	20	$3{,}2\cdot 10^{-7}$	Alcool etilenico	20	$-1{,}7\cdot 10^{-10}$
Benzene	20	$6\cdot 10^{-8}$			
Cloroformio	20	$-3{,}5\cdot 10^{-8}$			

gio si propaghi perpendicolarmente a questo campo. Il campo esterno è indicato con E_0, a differenza del campo E dell'onda stessa. È evidente che la differenza $n_e - n_o$ è funzione delle componenti del campo E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}. Se il mezzo è *isotropo* (in assenza di qualsiasi campo esterno), questa funzione non può dipendere dalla direzione del vettore E_0. In particolare, essa non deve cambiare per inversione dei segni dei suoi argomenti, cioè dev'essere *pari* rispetto a ciascun argomento. Perciò il suo sviluppo in serie di potenze deve contenere soltanto termini di *potenza pari*. Nei campi elettrici deboli, quali sono tutti i campi utilizzati nell'esperimento, si possono conservare soltanto i primi termini di questo sviluppo (cioè i termini *quadratici*). In virtù dell'anisotropia del mezzo, i termini compaiono soltanto sotto forma di quadrati E_{0x}^2, E_{0y}^2, E_{0z}^2 ed inoltre con uno stesso coefficiente, il che permette di riunirli e di scrivere

$$n_e - n_o = qE_0^2, \tag{90.1}$$

dove il coefficiente q dipende soltanto dalla sostanza e dal suo stato, nonché dalla lunghezza d'onda λ. L'esperienza confermò la formula (90.1). La differenza di fase tra i raggi straordinario ed ordinario, dopo che questi raggi hanno attraversato il condensatore, è

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)l = 2\pi BlE^2, \tag{90.2}$$

dove l è lo spessore dello strato di sostanza attraversato dalla luce, e $B \equiv q/\lambda$ la cosiddetta *costante di Kerr*. La costante di Kerr cresce quando la lunghezza d'onda diminuisce (dispersione) e diminuisce fortemente con il crescere della temperatura.

Nella tavola 9 sono riportati i valori della costante di Kerr per alcuni liquidi e gas (λ = 589 nm, pressione gassosa uguale a 760 mm Hg). Per la

maggior parte delle sostanze $n_e > n_o$, cioè la costante di Kerr è positiva. Questo corrisponde all'anisotropia di un *cristallo positivo*. S'incontrano molto più raramente i casi in cui $B < 0$ (etere etilico, molti oli ed alcool). Di tutte le sostanze studiate il nitrobenzene possiede il valore massimo di B.

Per dare un'idea dell'ordine di grandezza dell'effetto Kerr, consideriamo il seguente esempio. La distanza tra le armature di un « condensatore di Kerr » sia uguale a 1 mm e la tensione applicata a 1500 V, di modo che $E_0 = 15000$ V/cm $= 50$ un. CGSE. Se il condensatore contiene il nitrobenzene liquido, per $l = 5$ cm la differenza di fase è uguale a $\varphi = \pi/2$. Questo condensatore può essere considerato come una lamina quarto d'onda. È facile rivelare anche differenze di fase molto più piccole, e perciò l'effetto Kerr con il nitrobenzene trova numerose applicazioni tecniche.

3. L'effetto Kerr è un fenomeno più semplice dell'anisotropia artificiale per deformazioni meccaniche e la sua teoria è più sviluppata. Nel caso dell'anisotropia per deformazione si manifesta l'azione di campi molecolari complicati sulle molecole di un corpo che ha subìto deformazioni. Quest'azione è poco studiata ed è molto più complicata della corrispondente azione relativamente semplice di un campo elettrico continuo e uniforme. Inoltre, si è riusciti ad osservare l'effetto Kerr nei gas, per i quali la teoria è ben sviluppata. Lo studio dell'effetto Kerr nei gas, della rifrazione e della depolarizzazione della luce diffusa permette di determinare il tensore di polarizzabilità delle molecole.

L'effetto Kerr è spiegato dall'anisotropia delle molecole. La teoria quantitativa per i gas fu concepita da Langevin (1872-1946) nel 1910. In questa teoria l'anisotropia delle molecole fu caratterizzata unicamente dal *tensore di polarizzabilità*. In assenza di campo elettrico esterno l'orientamento spaziale delle molecole anisotrope è caotico, di modo che il mezzo è in totale macroscopicamente isotropo. Quando si applica un campo elettrico esterno, le molecole si orientano preferibilmente lungo la direzione del campo in modo che i loro assi di polarizzabilità massima siano paralleli; il mezzo diventa anisotropo. Nel caso generale di un tensore di polarizzabilità arbitrario i calcoli sono molto laboriosi. Ma la teoria ed i suoi risultati si possono spiegare, almeno qualitativamente, supponendo che le molecole siano *totalmente anisotrope*, il che rende i calcoli molto semplici. Qui sotto esponiamo i calcoli semplificati. Una molecola si dice *totalmente anisotropa*, se le cariche elettriche che essa contiene possono spostarsi soltanto lungo una direzione determinata detta *asse della molecola*. Un modello di una tale molecola può essere dato da un bastoncino lungo il quale si spostano le cariche [1].

---

[1] Non esistono certo molecole totalmente anisotrope. La polarizzabilità di una molecola reale può essere caratterizzata mediante i *valori principali* β_x, β_y, β_z del tensore di polarizzabilità. Se uno di questi valori principali è molto grande rispetto ad altri due, questa molecola può essere considerata un'approssimazione soddisfacente della molecola perfettamente anisotropa.

Effettuando i calcoli (sottolineiamolo ancora una volta), si deve essere prudenti per non confondere il campo esterno E_0 ed il campo dell'onda elettromagnetica E che è supposto monocromatico. Il campo continuo E_0 ha la funzione di creare nel mezzo una determinata ripartizione spaziale delle direzioni delle molecole. Quanto al campo alternato E, esso crea nel mezzo una polarizzazione elettrica alternata P che caratterizza gli indici di rifrazione dell'onda elettromagnetica.

Il momento dipolare alternato p di una molecola totalmente anisotropa è prodotto soltanto dalla componente del campo E parallela all'asse della molecola. Questo momento è uguale a $p = \beta E_s s = \beta(Es)s$, dove s è il vettore unitario diretto lungo l'asse della molecola e β la sua polarizzabilità lungo la stessa direzione. È evidente che p può essere rappresentato nella forma $p = \beta E s_E s$. La direzione del campo esterno E_0 coincida con l'asse X e quella di propagazione dell'onda con l'asse Z. Supponiamo che il vettore elettrico E dell'onda sia diretto lungo l'asse X. Si ha allora $s_E = s_x$ e quindi

$$p_x = \beta E s_x^2, \quad p_y = \beta E s_x s_y, \quad p_z = \beta E s_x s_z.$$

Tutte le direzioni perpendicolari all'asse X sono equiprobabili per la ripartizione delle molecole. Calcolando la media su tutte queste direzioni, troviamo $\overline{s_x s_y} = \overline{s_x s_z} = 0$. I valori medi delle proiezioni del momento dipolare sono quindi

$$\bar{p}_x = \beta E \overline{s_x^2}, \quad \bar{p}_y = \bar{p}_z = 0,$$

ed il vettore polarizzazione è

$$P_x = N\beta E \overline{s_x^2}, \quad P_y = P_z = 0.$$

Il vettore polarizzazione del mezzo è dunque diretto lungo E ed ha per valore

$$P = N\beta E \overline{s_x^2}.$$

La corrispondente polarizzabilità del mezzo è

$$\alpha_x = N\beta \overline{s_x^2}.$$

L'indice di rifrazione è *straordinario*. I valori di questo indice e della suscettività dielettrica sono

$$\varepsilon_x = n_e^2 = 1 + 4\pi N\beta \overline{s_x^2}.$$

Essendo l'indice di rifrazione del gas vicino all'unità, si ha

$$n_e \approx 1 + 2\pi N\beta \overline{s_x^2} = 1 + 2\pi N\beta \overline{\cos^2 \vartheta}, \tag{90.3}$$

dove ϑ è l'angolo tra l'asse della molecola e la direzione del campo esterno E_0 (cioè l'asse X). Se la ripartizione delle molecole è isotropa (cioè il campo esterno non esiste), si ha $\overline{s_x^2} = \overline{s_y^2} = \overline{s_z^2}$. Ma $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$ e quindi $\overline{s_x^2} =$

$= 1/3$. Il mezzo è dunque otticamente isotropo ed inoltre

$$n = 1 + \frac{2\pi}{3} N\beta. \tag{90.4}$$

Se il campo E è diretto lungo l'asse Y, si ha $s_E = s_y$. In questo caso l'indice di rifrazione è *ordinario*. Un calcolo analogo a quello precedente dà per quest'indice

$$n_o = 1 + 2\pi N\beta \overline{s_y^2}.$$

Per calcolare $\overline{s_y^2}$ rappresentiamo le proiezioni del vettore unitario s nel sistema di coordinate polari il cui asse polare è diretto lungo il campo E:

$$s_x = \cos\vartheta, \quad s_y = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad s_z = \sin\vartheta\sin\varphi,$$

dove φ è il corrispondente azimut che può assumere con la stessa probabilità tutti i valori compresi tra 0 e 2π. Ne segue che

$$\overline{s_y^2} = \overline{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi} = \overline{\sin^2\vartheta}\;\overline{\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}\overline{\sin^2\vartheta}.$$

Di conseguenza,

$$n_o = 1 + \pi N\beta \overline{\sin^2\vartheta}. \tag{90.5}$$

Prima di proseguire i calcoli, notiamo un risultato che si può dedurre dalla teoria. Sottraendo la relazione (90.4) dalle relazioni (90.3) e (90.5), otteniamo

$$n_e - n = 2\left(\overline{\cos^2\vartheta} - \frac{1}{3}\right)\pi N\beta,$$

$$n_o - n = \left(\overline{\sin^2\vartheta} - \frac{2}{3}\right)\pi N\beta = \left(\frac{1}{3} - \overline{\cos^2\vartheta}\right)\pi N\beta.$$

Ne segue che

$$\frac{n_e - n}{n_o - n} = -2. \tag{90.6}$$

Questa relazione, come hanno dimostrato misure minuziose, è ben verificata per la maggior parte delle sostanze.

Calcoliamo ora la costante di Kerr B. Dalle (90.3) e (90.5) si ottiene

$$n_e - n_o = 2\pi N\beta\left(\overline{\cos^2\vartheta} - \frac{1}{2}\overline{\sin^2\vartheta}\right) = 3\pi N\beta\left(\overline{\cos^2\vartheta} - \frac{1}{3}\right),$$

o, in base alla (90.4),

$$n_e - n_o = 9\frac{n-1}{2}\left(\overline{\cos^2\vartheta} - \frac{1}{3}\right). \tag{90.7}$$

Per i calcoli ulteriori utilizziamo la formula di Boltzmann

$$dw = \text{costante} \cdot e^{-U/kt}\, d\Omega, \tag{90.8}$$

che determina la probabilità dw che l'asse della molecola si trovi all'interno dell'angolo solido $d\Omega$. L'energia potenziale della molecola posta nel campo elettrico E_0 è uguale ad $U = p^2/(2\beta) - pE_0 \cos \vartheta$. Il primo termine rappresenta l'energia fornita per creare un dipolo di momento dipolare $p = \beta E_0 \cos \vartheta$, il secondo è l'energia potenziale di questo dipolo nel campo elettrico E_0. La somma di questi due termini è $U = -\frac{1}{2}\beta E_0^2 \cos^2 \vartheta$. Visto che questa somma dipende soltanto dall'angolo ϑ, come angolo solido $d\Omega$ è comodo prendere $2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ e riscrivere la formula di Boltzmann nella seguente forma:

$$dw = Ce^{-U/kT} \sin \vartheta\, d\vartheta, \tag{90.9}$$

dove C è la costante di normalizzazione. Supponendo che la condizione $|U/kT| \ll 1$ sia verificata, si può sviluppare la funzione esponenziale in serie arrestando lo sviluppo al termine lineare

$$e^{-U/kT} = 1 - \frac{U}{kT} = 1 + \frac{1}{2kT}\beta E_0^2 \cos^2 \vartheta.$$

Determiniamo la costante C dalla condizione di normalizzazione

$$C\int_0^{\pi}\left(1 + \frac{1}{2kT}\beta E_0^2 \cos^2 \vartheta\right)\sin \vartheta\, d\vartheta = 2C\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\beta E_0^2}{2kT}\right) = 1.$$

Ne segue che

$$dw = \frac{1}{2}\frac{1 + \beta E_0^2 \cos^2\vartheta/(2kT)}{1 + \beta E_0^2/(6kT)}\sin\vartheta\, d\vartheta = \left[\frac{1}{2} + \frac{\beta E_0^2}{4kT}\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)\right]\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\overline{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{3} = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}(\cos^2 \vartheta - 1)\, dw = \frac{2}{45}\frac{\beta E_0^2}{kT}.$$

Dopo la sostituzione nella (90.7) otteniamo

$$n_e - n_o = \frac{n-1}{5}\frac{\beta E_0^2}{kT}, \tag{90.10}$$

e la costante di Kerr è

$$B = \frac{n-1}{5\lambda kT}\beta. \tag{90.11}$$

4. Dunque, la differenza $n_e - n_o$ è proporzionale al *quadrato del campo esterno* E_0, come ci si doveva aspettare da considerazioni di simmetria. Ma nella teoria di Langevin la costante di Kerr è sempre positiva sia per le molecole totalmente anisotrope, che per le molecole a tensore di polarizzabilità arbitrario. Born (1882-1970) eliminò nel 1916 questa difficoltà della teoria di Langevin applicandola alle *molecole polari* con grande momento dipolare permanente p_0 le cui direzioni possono non coincidere con quella di maggior polarizzabilità delle molecole. Se p_0 è grande rispetto al momento dipolare della molecola indotto dal campo esterno E_0, l'orientamento delle molecole in questo campo sarà determinato soprattutto dai momenti dipolari permanenti p_0. Questi ultimi tendono ad orientarsi lungo il campo esterno E_0 che determina nel mezzo la direzione dell'asse ottico. Invece la direzione di maggior polarizzabilità del mezzo può formare con l'asse ottico un angolo apprezzabile. Se queste due direzioni coincidono, la costante di Kerr B è positiva. Se invece queste direzioni sono reciprocamente perpendicolari, si ha $B < 0$. Nei casi intermedi B può essere positiva o negativa.

È evidente che l'esistenza di un momento dipolare permanente complica notevolmente i calcoli, persino se le molecole sono totalmente anisotrope. Consideriamo il caso semplice in cui le direzioni del vettore p_0 e della maggior polarizzabilità delle molecole totalmente anisotrope coincidono. Questo caso si distingue da quello considerato sopra per il fatto che ora l'energia potenziale della molecola, che si trova nel campo elettrico E_0, è $U = -(p_0E_0) = -p_0E_0 \cos\vartheta$ e nello sviluppo del corrispondente fattore esponenziale apparirà un termine lineare in E_0

$$e^{-U/kT} = 1 + \frac{p_0E_0\cos\vartheta}{kT} + \frac{p_0^2E_0^2\cos^2\vartheta}{2k^2T^2}.$$

Ma questo termine lineare in E_0 non modifica il calcolo di $\overline{\cos^2\vartheta}$, poiché gli integrali di $\cos\vartheta\sin\vartheta$ e $\cos^3\vartheta\sin\vartheta$ sono nulli. Per ottenere il risultato finale è sufficiente sostituire nella (90.11) la polarizzabilità β con p_0^2/kT:

$$B = \frac{n-1}{5\lambda}\left(\frac{p_0}{kT}\right)^2. \tag{90.12}$$

La formula (90.12) mostra che anche nel caso di molecole polari la differenza $n_e - n_o$ è proporzionale al quadrato del campo E_0.

5. Visto che i processi di polarizzazione e di orientazione delle molecole nel campo elettrico avvengono in un tempo molto corto, si deve pensare che anche il tempo d'apparizione e di sparizione dell'effetto Kerr durante l'applicazione o la soppressione del campo esterno dev'essere dello stesso ordine di grandezza. Infatti gli esperimenti di Abraham e Lemoine, cominciati nel 1899 e ripresi molte volte da altri ricercatori, hanno mostrato che questo tempo è inferiore a 10^{-8} s ed in certi casi inferiore a 10^{-9} s. La pre-

cisione di tutti questi esperimenti era ancora insufficiente per indicare valori più concreti. Si è riusciti a precisare questi valori soltanto usando la tecnica laser che ha permesso di produrre impulsi di radiazione laser molto brevi (dell'ordine di 10^{-12} s) e di grande potenza (con un'intensità media del campo elettrico di alcune decine di kV/cm).

Questi campi luminosi, benché non siano statici, sono in grado di produrre la birifrangenza nelle cellule di Kerr. Lo schema di principio di quest'esperimento è riportato in figura 310. Da destra a sinistra attraverso
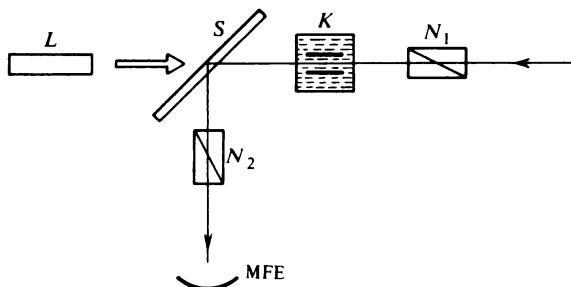
Fig. 310

la cellula di Kerr K passa il raggio 1 di luce blu, che è poi riflesso da una lamina semitrasparente S e penetra in un fotomoltiplicatore MFE. Se i nicol N_1 e N_2 sono incrociati, la luce non penetra nel fotomoltiplicatore. Ma se attraverso la cellula di Kerr viene fatto passare da sinistra a destra un potente impulso di luce fornito da un laser L, esso provocherà la birifrangenza del raggio 1 e la luce comincerà a penetrare nel fotomoltiplicatore. Se alla stessa cellula viene applicato un campo elettrico statico di intensità tale
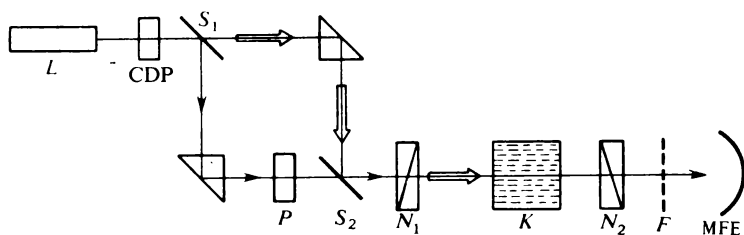
Fig. 311

che la differenza di fase tra i raggi straordinario ed ordinario sia la stessa, si potranno confrontare le costanti di Kerr nei regimi dinamico e statico. Risultò che per i liquidi non dipolari le costanti di Kerr sono le stesse per i due regimi. Nei liquidi dipolari nel passaggio dal campo statico a quello alter-

nato della radiazione laser la costante di Kerr diminuisce. Questa costante diminuisce di un fattore 100 per il nitrobenzene.

L'esperimento già descritto permette di stimare la durata dell'effetto Kerr, tuttavia risultati più precisi sono forniti da misure effettuate con un apparato il cui schema è riportato in figura 311. Un potente impulso infrarosso di una durata dell'ordine di 10^{-12} s e di lunghezza d'onda $\lambda = 1060$ nm, fornito da un laser, attraversa un cristallo CDP (diidrofosfato di potassio). A causa dell'effetto non lineare di raddoppiamento della frequenza (si veda il § 124) una piccola parte della luce si trasforma in luce verde di lunghezza d'onda $\lambda = 530$ nm. Lo specchio S_1 lascia passare i raggi infrarossi e riflette quelli verdi. Al contrario, lo specchio S_2 lascia passare i raggi verdi e riflette quelli infrarossi. Entrambi i raggi attraversano la cellula di Kerr K riempita con il liquido in esame, posta tra due nicol incrociati N_1 e N_2. Dietro il nicol N_2 è sistemato un filtro F che arresta la radiazione infrarossa e lascia passare la radiazione verde che arriva così al fotomoltiplicatore MFE. È evidente che se, dopo lo specchio S_2, l'impulso verde precede il potente impulso infrarosso, senza reciproca sovrapposizione, i raggi verdi non potranno raggiungere il fotomoltiplicatore. Mettendo sul tragitto dei raggi verdi una lamina P, si può far ritardare l'impulso verde rispetto a quello infrarosso e misurare così il tempo di ritardo τ conoscendo lo spessore della lamina P. Disponendo di un insieme di lamine di differente spessore, si può far variare il tempo τ. Gli esperimenti hanno dimostrato che nel caso più semplice l'intensità della luce trasmessa, registrata dal fotomoltiplicatore, varia esponenzialmente secondo la legge $I = I_0 \exp(-\tau/\tau_0)$. La costante τ_0 rappresenta il tempo di rilassamento dell'anisotropia indotta nel liquido dall'impulso infrarosso. Essa è appunto la misura della durata dell'effetto Kerr. I dati sperimentali fornirono per il solfuro di carbonio $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-12}$ s e per il nitrobenzene $\tau_0 = 5 \cdot 10^{-11}$ s.

6. Consideriamo ora il meccanismo d'apparizione della birifrangenza nei campi alternati. Se le molecole sono polari, durante un semiperiodo i loro momenti dipolari permanenti tendono ad orientarsi nella direzione del campo elettrico esterno. Durante il semiperiodo successivo il campo esterno inverte la sua direzione ed anche le molecole assumono lo stesso orientamento, cambiando direzione. Gli effetti d'orientamento provocati da questi campi, si distruggono l'un l'altro. Nei campi a basse frequenze (gamma di onde radio) ad ogni istante si stabilisce un orientamento corrispondente al valore istantaneo del campo elettrico. In questo caso l'evoluzione del fenomeno è la stessa che nei campi statici.

Ma nei campi ad alta frequenza (lunghezze d'onda inferiori all'incirca a 1 cm) l'orientamento dei momenti dipolari permanenti praticamente cessa. In questi campi i momenti dipolari permanenti p_0 non contribuiscono all'anisotropia e quindi alla birifrangenza del mezzo. L'orientamento delle molecole è dovuto ai soli *momenti dipolari indotti.* Durante un semiperiodo, quando il campo elettrico è orientato in un senso dato, i momenti dipo-

lari indotti creano momenti di forza che tendono ad avvicinare gli assi di maggior polarizzabilità delle molecole nella direzione del campo elettrico. Durante il semiperiodo successivo tutti i momenti invertono i loro sensi, ma cercheranno ancora di orientare gli assi di maggior polarizzabilità delle molecole nella direzione del campo esterno che è rimasta la stessa. Infatti, a differenza del vettore, l'asse di maggior polarizzabilità non è un vettore e non possiede quindi un senso unico, *entrambi i suoi sensi sono assolutamente equivalenti.* Non ha alcun'importanza con quale estremità quest'asse s'avvicina alla direzione del vettore E_0. Quindi gli effetti d'orientamento degli assi di maggior polarizzabilità si addizionano durante i semiperiodi successivi, malgrado i sensi opposti dei vettori E_0 in questi semiperiodi. Benché durante ogni semiperiodo l'orientamento delle molecole sia trascurabile, grazie a quest'addizione l'orientamento creato durante il periodo di rilassamento τ_0 dell'anisotropia è sufficiente per produrre una birifrangenza.

Dunque il meccanismo d'apparizione della birifrangenza nei campi alternati ad alta frequenza è lo stesso che viene ipotizzato nella teoria di Langevin.

7. Grazie ad una straordinaria velocità d'apparizione e di sparizione, l'effetto Kerr trovò numerose applicazioni scientifiche e tecniche per realizzare *otturatori e modulatori di luce rapidi.* Il modulatore di luce di Kerr è costituito da una cellula di Kerr il cui condensatore è alimentato da un campo elettrico di alta frequenza. Esso permette di realizzare un enorme numero di otturazioni per secondo (fino a 10^9) irrealizzabile per altri procedimenti. La cellula di Kerr, alla quale venga applicato un breve impulso di campo elettrico, si comporta come un *otturatore fotografico* ultrarapido la cui durata di funzionamento è uguale alla durata dell'impulso. Se in qualità di impulso elettrico si utilizza il potente impulso luminoso fornito da un laser, il tempo d'esposizione può essere ridotto fino a 10^{-12} s. Gli otturatori ed i modulatori di luce di Kerr sono utilizzati nella tecnica laser per il controllo del regime di lavoro dei laser.

8. Un effetto analogo all'effetto di Kerr, l'*effetto Cotton-Mouton*, fu scoperto nel 1910. Se le molecole del mezzo sono anisotrope e possiedono momenti magnetici permanenti, esse sono orientate da un campo magnetico costante. Nei campi magnetici sufficientemente forti, il mezzo diventa anisotropo e, legata a questo fatto, compare la birifrangenza. Questo è appunto l'effetto di Cotton-Mouton. Il mezzo si comporta come un cristallo uniassico il cui asse ottico è parallelo al campo magnetico $\boldsymbol{B}$.

La birifrangenza può essere rivelata e misurata nello stesso modo utilizzato nello studio dell'effetto Kerr. Sono analoghe anche le leggi a cui obbediscono entrambi questi effetti. La differenza tra gli indici straordinario ed ordinario è $n_e - n_o = DB^2$, e la corrispondente differenza di fase è

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)l = 2\pi ClB^2, \tag{90.13}$$

dove D e $C = D/\lambda$ sono costanti dipendenti dalle proprietà del mezzo e dal suo stato fisico. Per il nitrobenzene il valore misurato della costante Cotton-Mouton è $C = 2{,}23 \cdot 10^{-12}$ CGSM. In un campo magnetico $B =$ $= 20\,000$ G, su un percorso di lunghezza $l = 10$ cm si ha una differenza di fase $\varphi = 0{,}056$ rad, cioè soltanto di 3,2 gradi.

§ 91. *Effetto elettroottico lineare di Pockels*

1. Le oscillazioni libere di un oscillatore armonico sono descritte dall'equazione $\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = 0$. Esso oscilla attorno alla posizione d'equilibrio $r = 0$. Supponiamo ora che l'oscillatore si trovi in un campo elettrico continuo E_0. In assenza di altre forze esterne si avrà allora

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m} E_0.$$

La posizione d'equilibrio si sposta ora dall'origine delle coordinate di una distanza $r_0 = -eE_0/(m\omega_0^2)$. Indichiamo con q la distanza massima della particella oscillante dalla nuova posizione d'equilibrio. Si ha allora $r =$ $= r_0 + q$ e dopo la sostituzione nell'equazione precedente si ottiene

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Questo risultato mostra che in un campo elettrico continuo esterno le oscillazioni dell'oscillatore restano armoniche *con la stessa frequenza* ω_0, ma si effettuano attorno ad una nuova posizione d'equilibrio. Dunque, un campo elettrico continuo non modifica la frequenza propria di un oscillatore armonico e sposta soltanto la posizione d'equilibrio attorno alla quale vengono effettuate le oscillazioni libere.

Se l'ampiezza delle oscillazioni è grande, il modello dell'oscillatore armonico può diventare inadeguato. Nel caso più semplice si deve aggiungere alla forza quasi-elastica $m\omega_0^2 r$ un termine proporzionale al quadrato dello spostamento della particella dalla posizione d'equilibrio (origine delle coordinate). Le oscillazioni libere di questo *oscillatore anarmonico* sono descritte dall'equazione $\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r + \beta r^2 = 0$, dove β è una costante. In presenza di un campo elettrico continuo esterno E_0 l'equazione delle oscillazioni diventa

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r + \beta r^2 = -\frac{e}{m} E_0.$$

La posizione d'equilibrio $r = r_0$ è ora definita dall'equazione

$$\omega_0^2 r_0 + \beta r_0^2 = -eE_0/m.$$

Tra le due radici di quest'equazione quadratica si deve prendere quella che è poco differente dal valore precedentemente trovato $r_0 = -eE_0/(m\omega_0^2)$,

senza tener conto dell'anarmonicità (poiché quest'ultima è supposta piccola). Supponiamo che, come prima, q indichi l'elongazione della particella oscillante rispetto alla nuova posizione d'equilibrio, di modo che $r = r_0 + q$. Supponendo piccole le oscillazioni, trascuriamo i quadrati di q. Si ottiene allora

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + (\omega_0^2 + 2\beta r_0)q = 0.$$

Questo risultato mostra che in un campo elettrico continuo esterno le piccole oscillazioni di un oscillatore anarmonico saranno di nuovo armoniche nell'approssimazione considerata. Tuttavia *nel caso di un oscillatore anarmonico il campo esterno E_0 non soltanto sposta la posizione d'equilibrio, ma modifica anche la frequenza propria dell'oscillatore.* La variazione del quadrato della frequenza propria dell'oscillatore è approssimativamente uguale a $\Delta\omega_0^2 = 2\beta r_0$, o nella stessa approssimazione

$$\Delta\omega_0^2 = -\frac{2e\beta}{m\omega_0^2} E_0. \tag{91.1}$$

2. Lo spostamento delle frequenze proprie modifica la curva di dispersione, cioè l'indice di rifrazione n del mezzo. Nel semplice caso in cui la frequenza propria ω_0 è una sola, il valore di n lontano dalla riga d'assorbimento, dipende soltanto dalla differenza $\omega^2 - \omega_0^2$, come è evidente dalla formula (84.9). La variazione dell'indice di rifrazione n in un campo elettrico statico è allora definita dall'espressione

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \omega_0^2} \Delta\omega_0^2 = -\frac{\partial n}{\partial \omega_0^2} \frac{2e\beta}{m\omega_0^2} E_0.$$

Quest'espressione può essere trasformata notando che $\partial f/\partial\omega_0^2 = -\partial f/\partial\omega^2$. Si ha allora

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \omega^2} \frac{2e\beta}{m\omega_0^2} E_0 = \frac{\partial n}{\partial \omega} \frac{e\beta}{m\omega\omega_0^2} E_0. \tag{91.2}$$

Per una direzione fissa del campo esterno E_0, il valore di Δn dipende dalla direzione di propagazione della luce, il che si fa sentire sulla birifrangenza del mezzo. *La variazione della birifrangenza di una sostanza, causata dallo spostamento della frequenza propria sotto l'azione di un campo elettrico esterno, si dice effetto elettroottico di Pockels.* In quest'effetto le variazioni degli indici di rifrazione sono proporzionali alla *prima potenza* del campo esterno E_0, a differenza dell'effetto Kerr in cui esse sono proporzionali al quadrato del campo.

L'effetto Pockels può manifestarsi soltanto nei cristalli privi di centro di simmetria. Quest'effetto è *lineare* rispetto al campo esterno E_0, quindi, quando si inverte la direzione del campo E_0, deve cambiare il segno della variazione di Δn dell'indice di rifrazione. Ma nei cristalli aventi un centro

di simmetria ciò è impossibile, poiché entrambe le direzioni reciprocamente opposte di un campo esterno sono fisicamente equivalenti.

Dal meccanismo di questo fenomeno è evidente che l'effetto Pockels è *rapido* almeno quanto l'effetto Kerr. Perciò esso trovò le stesse applicazioni dell'effetto Kerr: *otturatori* e *modulatori ultrarapidi.* Il corrispondente dispositivo si dice *cellula di Pockels.* Questo è un cristallo posto tra due nicol incrociati. Il dispositivo funziona nello stesso modo di una cellula di Kerr. I nicol non lasciano passare la luce se non è applicato un campo elettrico esterno, ma se il campo è applicato, i nicol trasmettono la luce. È necessario che il cristallo, prima dell'applicazione del campo elettrico esterno, non presenti birifrangenza. Quest'effetto può essere ottenuto prendendo un cristallo otticamente uniassico tagliato perpendicolarmente all'asse ottico e dirigendo la luce lungo quest'asse. Il campo esterno $\boldsymbol{E}_0$ può essere diretto o perpendicolarmente alla propagazione della luce (*modulatore trasversale della luce*) o parallelamente a questa direzione (*modulatore longitudinale* della luce).

§ 92. *Effetto Zeeman*

1. Nel 1896 Zeeman (1865-1943) scoprì che le righe spettrali si scindevano in un modo determinato quando la sorgente di luce veniva messa in un campo magnetico. Nell'esperimento di Zeeman veniva studiata la riga del cadmio verde-blu, che è molto stretta e venivano applicati campi magnetici
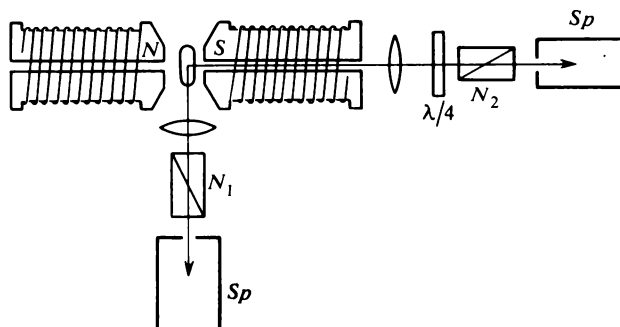
Fig. 312

ad intensità di 10 000-15 000 G. H.A. Lorentz, che in questo tempo sviluppava la teoria elettronica, spiegò subito l'*effetto Zeeman*, il che contribuì ad orientare le ricerche ulteriori.

Lo schema del dispositivo utilizzato per lo studio dell'effetto Zeeman è riportato in figura 312. La sorgente di luce, che presenta uno spettro a ri-

ghe (per esempio un tubo a scarica nel gas o un arco nel vuoto) viene posta tra i poli di un elettromagnete che crea un campo magnetico sufficientemente uniforme. La luce da esaminare cade sulla fenditura di uno spettroscopio o di uno spettrografo *Sp* avente un potere risolutivo uguale o superiore a 100 000 (reticolo di diffrazione o apparecchio spettrale interferenziale). I nicol N_1, N_2 e la lamina quarto d'onda servono a determinare la polarizzazione della luce esaminata. Per fotografare gli spettri osservati sono a volte necessarie molte ore d'esposizione. Durante tutto questo tempo dev'essere assicurata con precisione sufficiente la costanza del campo magnetico e della temperatura della sorgente luminosa, affinché lo spettro sia costante nel tempo e si possa utilizzare un apparecchio spettrale di grande potere risolutivo.

Nei primi esperimenti Zeeman scoprì che *osservando la luce che attraversa un campo magnetico in direzione perpendicolare al campo, la riga spettrale si scinde in tre componenti linearmente polarizzate.* La componente centrale non è spostata, mentre quelle laterali sono spostate da lati opposti a distanze uguali (nella scala delle frequenze). Lo spostamento è proporzionale all'intensità del campo magnetico esterno $\boldsymbol{B}$. Il vettore elettrico della componente centrale è diretto *parallelamente al campo magnetico* (queste componenti sono chiamate *componenti* π), ed i vettori elettrici delle componenti laterali (o *componenti* σ) sono *perpendicolari al campo* $\boldsymbol{B}$. L'intensità della componente π è la metà e quella di ogni componente σ è uguale ad un quarto dell'intensità della riga iniziale.

Osservando *nella direzione del campo magnetico*, si ottiene che lo spostamento delle componenti laterali (per una stessa intensità del campo magnetico) è *lo stesso* che nel caso precedente, ma *la componente centrale non c'è.* L'intensità di ogni componente è uguale alla metà dell'intensità della riga iniziale. Entrambe le componenti sono *polarizzate circolarmente* in sensi inversi (si è anche soliti chiamarle componenti σ). Se la luce si propaga nella direzione del campo magnetico, la componente σ di frequenza più piccola è polarizzata *a destra* e quella di frequenza più grande è polarizzata *a sinistra.* Se il senso del campo magnetico si inverte, si invertono anche i sensi delle polarizzazioni circolari di entrambe le componenti σ.

Le figure osservate perpendicolarmente e parallelamente al campo magnetico sono schematicamente rappresentate in figura 313. Si suppone che nel caso dell'effetto longitudinale la luce si propaghi lungo il campo magnetico diretto verso il lettore. Le intensità relative delle righe sono rappresentate dal loro spessore, la polarizzazione della componente π è rappresentata dai tratti paralleli al campo magnetico e le polarizzazioni delle componenti σ sono rappresentate da piccoli cerchi.

2. La figura di decomposizione delle righe spettrali viene interpretata dalla *teoria classica di Lorentz.* Come la teoria classica della dispersione, la teoria di Lorentz si basa su un modello del sistema studiato. Il modello più semplice assimila i centri che emettono luce ad *oscillatori armonici*, essen-

do questi ultimi *elettroni legati in modo quasi-elastico*. In assenza di campo magnetico esterno, l'equazione di moto di questi elettroni ha la forma $\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = 0$, dove ω_0 è la frequenza propria dell'elettrone. In presenza di un campo magnetico permanente l'elettrone è sottoposto anche all'azione della forza di Lorentz $-\frac{e}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{B}]$ (la carica dell'elettrone è indicata con $-e$).
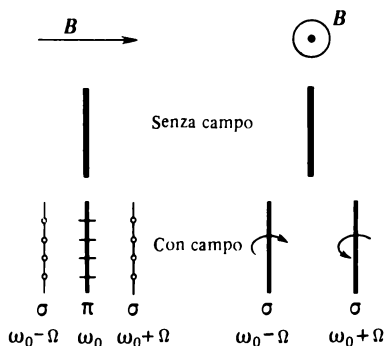
Fig. 313

L'equazione di moto dell'elettrone assume la forma

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = -\frac{e}{mc}[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{B}],$$

dove m è massa dell'elettrone. Introducendo la frequenza di Larmor

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2mc}\boldsymbol{B}, \tag{92.1}$$

riduciamo l'equazione alla forma

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + 2[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\Omega}] + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = 0 \tag{92.2}$$

(cfr. il vol. III, § 86). La teoria classica si riduce alla risoluzione di quest'equazione. Per risolvere l'equazione (92.2) scriviamola in funzione delle coordinate. Orientiamo l'asse Z lungo il campo magnetico $\boldsymbol{B}$. L'equazione precedente si trasforma allora in un sistema di tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\Omega\dot{y} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} + \omega_0^2 y &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= 0. \end{aligned} \tag{92.3}$$

L'ultima equazione mostra che il campo magnetico non modifica il moto dell'elettrone lungo la direzione del campo. Questo risultato è evidente poiché il campo non esercita alcuna forza sull'elettrone. L'integrazione delle

prime due equazioni (92.3) può essere eseguita più facilmente nella *forma complessa*. Uniamo x ed y in una coordinata complessa $\zeta = x + iy$. Questa coordinata determina la posizione dell'elettrone nel piano coordinato (X, Y) nello stesso modo di un vettore bidimensionale ζ di componenti x ed y. Notando che $-i\dot{\zeta} = \dot{y} - i\dot{x}$, moltiplichiamo la seconda equazione (92.3) per i ed addizioniamo il risultato alla prima equazione. Si ha allora

$$\ddot{\zeta} - i2\Omega\dot{\zeta} + \omega_0^2\zeta = 0.$$

Cerchiamo una soluzione di quest'equazione della forma $\zeta = e^{i\omega t}$. La costante ω è determinata dall'equazione quadratica

$$-\omega^2 + 2\Omega\omega + \omega_0^2 = 0,$$

la quale dà

$$\omega = \Omega \pm \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}.$$

Persino in campi magnetici molto forti si può trascurare il quadrato della frequenza di Larmor rispetto a ω_0^2. Per esempio, se $B = 10^4$ G, la formula (92.1) ci dà $\Omega \approx 10^{11}$ s^{-1}, mentre per la luce visibile ($\lambda = 500$ nm) $\omega \sim$ $\sim 4 \cdot 10^{15}$ s^{-1}, e quindi $(\Omega/\omega)^2 \sim 10^{-9}$. Il campo magnetico massimo usato
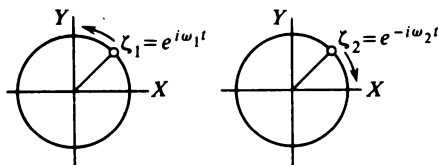
Fig. 314

per la misura dell'effetto Zeeman fu ottenuto nel 1938 da P.L. Kapitsa (1894-1984) ed ebbe un'intensità di $3{,}2 \cdot 10^5$ G. Persino in questo caso $\Omega/\omega_0 \sim 1{,}4 \cdot 10^{-3}$, $(\Omega/\omega_0)^2 \sim 2 \cdot 10^{-6}$. Quindi con sufficiente precisione si ha $\omega = \pm\omega_0 + \Omega$. Per non aver a che fare con frequenze negative poniamo $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$, $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$. Le due soluzioni ottenute si scrivono allora nella forma

$$\zeta_1 = e^{i\omega_1 t}, \quad \zeta_2 = e^{-i\omega_2 t}.$$

La prima soluzione rappresenta un *moto circolare* dove l'elettrone ruota in senso *antiorario* con frequenza angolare ω_1, la seconda un *moto circolare* in senso *orario* con frequenza ω_2 (fig. 314). La soluzione generale corrisponde alla sovrapposizione di questi due moti circolari e si presenta nella forma $\zeta = C_1\zeta_1 + C_2\zeta_2$, dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie.

3. Per rendere più tangibili i risultati ottenuti, sviluppiamo il moto iniziale dell'elettrone (cioè il suo moto in assenza di campo magnetico) in due moti: un'oscillazione armonica nella direzione dell'asse Z ed un moto nel piano XY. Sviluppiamo a sua volta il secondo moto in due moti circolari di

ugual frequenza angolare ω_0, ma di senso opposto. In un campo magnetico permanente l'oscillazione lungo l'asse Z resta allora costante, mentre le frequenze di entrambi i moti circolari cambiano di una stessa quantità Ω: la frequenza di moto antiorario aumenta e quella di moto orario diminuisce.

È facile spiegare il cambiamento della frequenza angolare. La forza centripeta agente sull'elettrone rotante in assenza di campo magnetico è uguale a $m\omega_0^2 r$. In presenza di un campo magnetico a questa forza viene aggiunta la forza $\pm \frac{e}{c} vB = \pm \frac{e}{c} \omega r B$, di modo che la nuova forza centripeta diventa uguale a

$$\left(m\omega_0^2 \pm \frac{eB}{c}\,\omega\right)r = m(\omega_0^2 \pm 2\Omega\omega)r.$$

La determinazione del segno dipende dal senso di rotazione. Uguagliando quest'espressione a $m\omega^2 r$, si ottiene l'equazione $\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\Omega\omega$, le cui radici positive sono $\omega \approx \omega_0 \pm \Omega$. Questo risultato coincide con quello ottenuto sopra.

Quando viene applicato il campo magnetico, l'energia cinetica di un elettrone in rotazione varia. Ci si può domandare perché essa varia se la forza agente da parte del campo magnetico è perpendicolare alla velocità $\boldsymbol{v}$ dell'elettrone e quindi non produce alcun lavoro. La ragione è che quest'ultima asserzione vale per i soli *campi magnetici permanenti* che sono i soli dei quali tiene conto l'equazione (92.2). Ma quando viene applicato, il campo magnetico *cresce nel tempo* da zero fino al valore massimo ed in seguito, prima della soppressione, resta costante. Durante la crescita del campo, secondo la legge d'induzione di Faraday, si ha un *campo elettrico rotazionale* che fornisce un lavoro all'elettrone e modifica la sua energia cinetica. Quando il campo magnetico diventa permanente, il campo elettrico sparisce e l'energia cinetica di rotazione dell'elettrone non varia più finché non sarà soppresso il campo magnetico. A queste variazioni di rotazione si riferiscono i moti trovati sopra. Un esame dettagliato del meccanismo di variazione dell'energia cinetica di rotazione dell'elettrone è stato riportato nel vol. III, § 88.

4. Passiamo ora alla spiegazione della scissione delle righe spettrali in un campo magnetico. Un elettrone oscillante emette onde elettromagnetiche. L'emissione è massima nella direzione perpendicolare all'accelerazione dell'elettrone ed è nulla nella direzione della sua accelerazione. Secondo la teoria classica, la frequenza della luce emessa coincide con quella delle vibrazioni dell'elettrone. Ma quest'ultima varia quando viene applicato il campo magnetico e quindi deve variare anche la frequenza della luce emessa. Quando l'osservazione è effettuata nel senso del campo magnetico, la vibrazione in questa direzione non produce alcuna radiazione. La radiazione è prodotta *soltanto dalle rotazioni circolari dell'elettrone.* In conseguen-

za di ciò si osservano due componenti σ *polarizzate circolarmente* di frequenze $\omega_0 + \Omega$ e $\omega_0 - \Omega$. Se la luce si propaga nel senso del vettore $\boldsymbol{B}$, la polarizzazione della prima riga sarà *sinistra* e quella della seconda riga *destra*. Quando il senso del campo magnetico applicato si inverte, cambia anche il senso della polarizzazione circolare delle righe. Quando si osserva in una direzione perpendicolare a quella del campo magnetico $\boldsymbol{B}$, le vibrazioni dell'elettrone parallele a $\boldsymbol{B}$ creano la radiazione massima. A queste vibrazioni corrisponde la *componente π non spostata* il cui vettore elettrico è *parallelo* a $\boldsymbol{B}$. Entrambi i moti circolari sono effettuati in un piano perpendicolare a $\boldsymbol{B}$. Sviluppiamo ciascuno di questi moti in un moto armonico lungo la direzione d'osservazione ed in un moto armonico perpendicolare alla linea d'osservazione. Soltanto le vibrazioni perpendicolari alla linea d'osservazione sono accompagnate da una radiazione e producono due *componenti σ* di frequenze $\omega + \Omega$ e $\omega - \Omega$ i cui vettori elettrici sono *perpendicolari* a $\boldsymbol{B}$.

Tale è la spiegazione della scissione delle righe spettrali osservata nei primi esperimenti di Zeeman. Se teniamo conto del fatto che, in assenza di campo magnetico, tutte le direzioni di moto dell'elettrone sono equiprobabili, è anche facile spiegare le intensità relative delle righe spettrali in questi esperimenti.

Come mostra l'esempio numerico citato sopra ($B = 10^4$ G), $\Omega/\omega_0 \approx \approx 2 \cdot 10^{-5}$. Per risolvere queste componenti sono necessari apparecchi spettrali a potere risolutivo ω_0/Ω non inferiore a $5 \cdot 10^4$, cioè reticoli di diffrazione o spettroscopi interferenziali. Ma negli esperimenti di P.L. Kapitsa ($B = 3{,}2 \cdot 10^5$ G) furono già sufficienti spettroscopi a prisma.

Esaminando il carattere della polarizzazione circolare delle righe nell'effetto Zeeman longitudinale, si può determinare il *segno delle cariche* responsabili dell'effetto. Risultò che esso era *negativo*. La misura della distanza tra le componenti permette di determinare la carica specifica *e/m*. Risultò che essa era uguale a quella fornita dalle misure di deviazione dei raggi catodici per applicazione di campi elettrici e magnetici ($e/m = = 1{,}759 \cdot 10^7$ CGSM). Ne segue che le particelle cariche che determinano il comportamento ottico degli atomi sono *elettroni*.

5. Ulteriori esperimenti hanno mostrato che l'effetto Zeeman nella forma osservata da Zeeman e interpretato dalla teoria di Lorentz (tripletto di Lorentz composto di una componente π e di due componenti σ, e doppietto di due componenti σ polarizzate circolarmente) è molto raro. Tale scissione si dice *effetto Zeeman semplice* o *normale*. L'effetto Zeeman semplice è prodotto solamente da righe spettrali dette *singoletti*, cioè righe *isolate* praticamente monocromatiche. La maggior parte delle righe spettrali sono invece dei *multipletti* (*doppietti*, *tripletti*, *quadrupletti* ecc.), cioè sono costituite da alcune linee spettrali molto avvicinate.

Il più semplice esempio di multipletto (doppietto) è la doppia riga D del sodio, formata di due righe semplici ravvicinate di lunghezze d'onda $\lambda_{D_1} =$

$= 589{,}5930$ nm e $\lambda_{D_2} = 588{,}96963$ nm, ed inoltre l'intensità della riga D_2 è doppia di quella della linea D_1.

I multipletti, nei campi magnetici, presentano una figura di scissione molto più complicata che nell'effetto Zeeman semplice. Per esempio, la riga D_1 del sodio si scinde in *quattro righe*: due righe centrali che sono le componenti π e due righe laterali che sono le componenti σ. La riga D_2 si scinde in *sei componenti*: due righe centrali sono le componenti π e quattro righe laterali che sono le componenti σ. Dunque, tutto il doppietto si scinde in 10 righe. Si osservano figure di scissione dei multipletti molto più complicate. Queste scissioni sono dette *effetto Zeeman delle righe di multipletto* o *effetto Zeeman anomalo*. Il termine « effetto Zeeman delle righe di multipletto » sarebbe preferibile, poiché appunto l'effetto anomalo (a differenza di quello normale) è la regola, e non l'eccezione.

La spiegazione dell'effetto Zeeman anomalo è stata ottenuta solo con la *teoria quantistica*, dopo la scoperta dello *spin* (momento proprio di quantità di moto) e del *momento magnetico proprio dell'elettrone*. Nel caso delle righe spettrali di singoletto la teoria quantistica conduce agli stessi risultati ottenuti con la teoria semplice di Lorentz. Ritorneremo a tutte queste questioni nel volume V del nostro Corso.

§ 93. *Effetto Stark*

Come è stato dimostrato nel § 91, un campo elettrico uniforme non modifica la frequenza propria ω_0 di un oscillatore armonico. Ma, quando si tiene conto dell'anarmonicità, questa modifica deve aver luogo. Se ci limitiamo ai termini lineari rispetto al campo esterno E_0, questa variazione è espressa dalla formula (91.1) dalla quale segue che $\Delta\omega_0 = -\beta e E_0/(m\omega_0^3)$. In quest'approssimazione il campo esterno E_0 non provoca la scissione delle linee spettrali, provocando soltanto un loro *piccolo spostamento laterale* di una distanza proporzionale all'intensità di campo E_0. Se teniamo conto dei termini di potenza superiore, ci si può aspettare una scissione delle linee spettrali con distanze tra le componenti proporzionali al *quadrato del campo* E_0, e cioè

$$\delta\omega_0 \sim [e/(m\omega_0^3)]E_0^2.$$

L'eventualità di una tale scissione delle righe spettrali fu prevista da Voigt (1850-1919), che non riuscì ad osservarla per difficoltà sperimentali. La difficoltà stava nel fatto che per osservare l'effetto erano necessari campi elettrici E_0 dell'ordine di 100 000 V/cm. Nei tubi a scarica ordinari, che emettono righe spettrali strette (per esempio le righe della serie di Balmer per l'idrogeno) non si può creare e mantenere un campo di quest'intensità a causa della *forte ionizzazione del gas contenuto nei tubi*.

Nel 1913 Stark (1874-1957) sormontò questa difficoltà creando un forte campo elettrico dietro il catodo in uno stretto spazio (~ 1 mm) tra il catodo

K ed una placca F parallela a K (fig. 315), dove per pompaggio continuo si mantiene un alto vuoto; così, in questo spazio, non si ha ionizzazione delle particelle per urti reciproci. L'eccitazione degli atomi di gas con emissione di luce avviene nell'altra parte del tubo, esattamente come nei tubi a gas ordinari. Gli atomi luminosi (raggi canale) passano attraverso buchi praticati nel catodo (canali) ed arrivano nello spazio tra F e K dove sono sottoposti all'azione di un campo elettrico esterno.

Per mezzo di quest'installazione Stark riuscì ad osservare la scissione delle righe spettrali nel campo elettrico. Questo fenomeno ha ricevuto il suo nome. L'effetto osservato fu assolutamente *diverso* dalle previsioni di Voigt. Stark esaminò la decomposizione delle righe spettrali della serie di
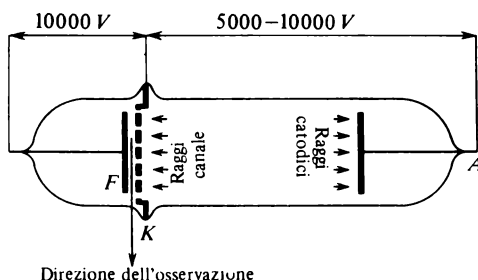
Fig. 315

Balmer dell'idrogeno. Nella regione visibile dello spettro questa serie contiene quattro righe: H_α (λ = 656,285 nm), H_β (λ = 486,132 nm), H_γ (λ = = 434,046 nm), H_δ (λ = 410,173 nm). La decomposizione delle righe dell'*idrogeno*, così come di tutti gli *ioni monoelettronici*, è tale che gli spostamenti delle diverse componenti sono proporzionali all'*intensità del campo e non al suo quadrato.* In altre parole, la decomposizione delle righe è molto più forte di quanto sarebbe se fosse proporzionale al quadrato del campo. Per questa ragione tale decomposizione ha ricevuto il nome *effetto Stark lineare.*

Le figure ottenute sono abbastanza complicate e diverse per diverse righe spettrali. Ogni riga spettrale dell'idrogeno si suddivide in numerose componenti. Per la riga H_α sono state trovate 15 componenti, 20 per H_β, 27 per H_γ e 32 per H_δ. In un campo E_0 = 104 000 V/cm, Stark trovò che gli spostamenti delle componenti estreme sono di 2,3; 3,88; 5,88 e 7,5 nm per le righe H_α, H_β, H_γ, H_δ rispettivamente. Queste distanze sono relativamente grandi rispetto agli spostamenti delle componenti estreme del semplice tripletto di Zeeman. (Nel campo B = 104 000 G per le righe menzionate l'effetto Zeeman darebbe spostamenti rispettivamente di 0,42; 0,23; 0,18 e 0,16 nm.)

Nell'osservazione trasversale al campo E_0, le componenti ottenute sono *polarizzate linearmente*; alcune sono componenti π (il cui campo elettrico è

parallelo al campo esterno E_0) e le altre sono componenti σ (il cui campo elettrico è perpendicolare al campo esterno E_0). Nell'osservazione lungo il campo E_0 le componenti π non ci sono, mentre le componenti σ *non sono polarizzate.* Le più intense componenti π si trovano all'esterno e le più intense componenti σ si trovano all'interno. Per l'idrogeno la suddivisione e la polarizzazione sono simmetriche rispetto alla riga iniziale; per gli altri atomi s'incontra spesso una disposizione asimmetrica. Le distanze tra le componenti e la riga iniziale (nella scala delle frequenze) sono uguali ad un multiplo intero del più piccolo intervallo tra le componenti; gli esperimenti hanno dimostrato che quest'ultimo è lo stesso per tutte le righe della serie di Balmer dell'idrogeno. Nei campi forti (superiori all'incirca a 100 000 V/cm) si osservano scarti alla relazione lineare tra gli spostamenti delle componenti e l'intensità del campo esterno E_0. Per gli atomi e gli ioni contenenti *più di un elettrone, l'effetto Stark non è lineare, ma quadratico*, cioè gli spostamenti sono proporzionali al *quadrato del campo elettrico* E_0.

La teoria classica non fornisce nessuna spiegazione dell'effetto Stark, come pure di ogni fenomeno legato alla radiazione ed all'assorbimento delle righe spettrali. La teoria dell'effetto Stark è essenzialmente quantistica e non può essere esposta in questo volume.

§ 94. *Rotazione del piano di polarizzazione*

1. Se una luce polarizzata linearmente attraversa uno strato pianoparallelo di materia, in alcuni casi il piano di polarizzazione della luce risulta ruotato rispetto alla sua posizione iniziale. Quest'effetto si dice *rotazione del piano di polarizzazione* o *effetto d'attività ottica.* Se la sostanza non è sottoposta all'azione di un campo magnetico esterno, si ha a che fare con una polarizzazione rotatoria *naturale.* Nel caso contrario si ha a che fare con una *polarizzazione rotatoria magnetica* o *effetto Faraday.*

La polarizzazione rotatoria naturale fu scoperta nel 1811 da Arago in lamine di quarzo tagliate perpendicolarmente all'asse ottico. Nel 1815 Biot esaminò dettagliatamente quest'effetto, e scoprì che la polarizzazione rotatoria si manifesta anche nelle soluzioni di zucchero. In seguito fu scoperta la polarizzazione rotatoria naturale in molti altri corpi. Verso la fine del secolo scorso il numero di sostanze naturalmente attive era superiore a 700; attualmente è noto un numero molto più grande di queste sostanze, benché quest'effetto sia molto debole per la maggior parte delle sostanze.

Per osservare l'effetto si dispongono su un banco ottico due nicol incrociati. Questo sistema non lascia passare la luce. Ma, se introduciamo tra i nicol una lamina di quarzo, tagliata perpendicolarmente all'asse ottico, o uno strato di un'altra sostanza otticamente attiva, il sistema trasmette la luce. Ma per rotazione di uno dei nicol si può provocare la sua estinzione. Ne segue che dopo aver attraversato una sostanza attiva, la luce resta polarizzata linearmente, ma il suo piano di polarizzazione risulta essere ruotato.

Perché l'esperimento riesca con una luce bianca, quest'ultima deve essere resa monocromatica per mezzo di un filtro, poiché *l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione dipende dalla lunghezza d'onda.* Il quarzo è un cristallo uniassico. Nell'esperimento descritto la luce si propaga lungo l'asse ottico ed il quarzo si comporta come un corpo isotropo e non manifesta alcun fenomeno di birifrangenza ordinaria (lineare).

A seconda della sostanza considerata, la rotazione naturale del piano di polarizzazione può essere destra o sinistra, dove si è convenuto di riferire queste due direzioni all'osservatore verso il quale si propaga la luce. Conformemente a questo fatto si distinguono le sostanze *destro-* e *levogire.* La rotazione nel senso orario è considerata *positiva* e quella antioraria *negativa.*

2. Il fenomeno di polarizzazione rotatoria mostra che i mezzi otticamente attivi possiedono una certa *dissimmetria*; questa dissimmetria si manifesta nel fatto che in questi mezzi le direzioni orarie ed antiorarie sono fisicamente non equivalenti. Perciò nel mezzo non può esistere un piano di simmetria che passa per la direzione della normale al fronte d'onda. Come segue da considerazioni di simmetria generali, il piano di polarizzazione della luce non potrebbe ruotare, se essa coincidesse con ogni piano di simmetria. D'altra parte i mezzi liquidi otticamente attivi sono *perfettamente isotropi*, cioè tutte le loro direzioni sono assolutamente equivalenti. Ciò si manifesta, in particolare, nel fatto che un liquido otticamente attivo fa ruotare il piano di polarizzazione *nello stesso senso, quale che sia il senso di propagazione della luce.* Un liquido naturalmente attivo potrebbe essere definito come un mezzo *dissimmetricamente isotropo.* Nei cristalli non esiste l'isotropia, ma nei cristalli uniassici le due direzioni opposte dell'asse ottico sono equivalenti, almeno dal punto di vista ottico.

La dissimmetria menzionata ricorda la dissimmetria di un'elica. Osserviamo una faccia dell'elica e supponiamo che su di essa lungo l'elica si sposti un punto, ruotando in senso orario. Se il punto s'allontana dall'osservatore, l'elica è detta destra (nel caso contrario essa è detta sinistra). Se si osserva la faccia opposta dell'elica, la rotazione dello stesso punto avverrà in senso antiorario, ma in questo caso il punto s'avvicina all'osservatore. Affinché questo punto s'allontani, si deve invertire la direzione di rotazione. Dunque, la proprietà dell'elica di essere destra o sinistra non dipende da quale faccia venga osservata. Analogamente *la proprietà di un mezzo naturalmente attivo d'essere destro- o levogiro non dipende dal senso in cui si propaga la luce.*

Dunque, *se il piano di polarizzazione in un mezzo naturalmente attivo ruota, per esempio a destra, con l'inversione del senso di propagazione della luce questo piano ruoterà, come prima, a destra. Ma i sensi di rotazione « a destra » ed « a sinistra » si riferiscono a due osservatori differenti e la luce deve avvicinarsi a ciascuno di loro. Obiettivamente, indipendentemente dalla scelta dell'osservatore, le rotazioni del piano di polarizzazione si effettuano in sensi inversi se i raggi luminosi si propagano l'uno incontro*

all'altro. Se facciamo fare alla luce un tragitto di andata e ritorno attraverso una sostanza naturalmente attiva, riflettendola con uno specchio, il piano di polarizzazione ritornerà alla sua posizione iniziale.

3. Il quarzo s'incontra in natura in due forme cristalline, *destrogiro* e *levogiro* (o *destro* e *sinistro*). Questo fenomeno si dice *enantiomorfismo* ed è proprio dei cristalli che non possiedono né centri né piani di simmetria. Le varietà enantiomorfe differiscono l'una dall'altra per la forma esterna e per la struttura cristallina interna. Per quanto concerne la simmetria queste due varietà differiscono l'una dall'altra all'incirca nello stesso modo in cui l'elica destra differisce da quella sinistra o la mano destra dalla mano sinistra. Le due varietà *non sono congruenti*, cioè la varietà destra non può essere sovrapposta su quella sinistra e viceversa, ma l'immagine speculare di una si può far coincidere con un'altra. È probabile che tutti i cristalli naturalmente attivi esistano in due varietà enantiomorfe, benché non siano sempre conosciute entrambe le varietà. Alcuni liquidi, per esempio l'acido tartarico, possono esistere anche nella forma di due varietà ruotanti il piano di polarizzazione in sensi inversi.

4. Biot trovò sperimentalmente che l'angolo di rotazione χ del piano di polarizzazione è proporzionale allo spessore l della sostanza otticamente attiva: $\chi = \alpha l$, dove il coefficiente α è detto *rotazione per unità di lunghezza.* Esso dipende dalla lunghezza d'onda, dalla natura della sostanza e dalla temperatura. Per il quarzo a 20 °C e per la luce gialla di sodio ($\lambda = 589{,}3$ nm) $\alpha = \pm 21{,}728$; per il clorato di sodio ($NaClO_3$) $\alpha = 3{,}170$ gradi d'angolo per millimetro. Per alcuni cristalli liquidi α può raggiungere 40 000 gradi per millimetro. Per il quarzo e per tutti gli altri cirstalli che esistono in forma destrogira e levogira i valori di α sono *uguali in valore assoluto, ma di segno opposto.* La rotazione α aumenta con la diminuzione della lunghezza d'onda. Biot trovò che il valore di α è inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda λ^2. Ma questa relazione è approssimata piuttosto grossolanamente. Nella regione di trasparenza e di piccolo assorbimento è in buon accordo con i risultati sperimentali la formula di Drude

$$\alpha = \sum_i \frac{B_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2},$$

dove B_i sono costanti e λ_i le lunghezze d'onda corrispondenti alle frequenze proprie della sostanza studiata.

Si è soliti caratterizzare l'attività ottica dei liquidi con il *potere rotatorio specifico* $[\alpha]$. Nel caso di liquidi chimicamente puri questo è il rapporto della rotazione osservata α alla densità ρ del liquido, cioè $[\alpha] = \alpha/\rho$. Nel caso di soluzioni si tratta di solito delle soluzioni di una *sostanza otticamente attiva in un solvente che non lo è.* In questo caso nella determinazione del potere rotatorio specifico $[\alpha]$ con ρ s'intende la *densità della sostan-*

za attiva, cioè la sua massa nell'unità di volume della soluzione. Si dice *potere rotatorio molare* di un liquido o di una sostanza il prodotto $[M] = M[\alpha]$ del potere rotatorio specifico $[\alpha]$ per la massa molecolare della sostanza attiva. La dipendenza della rotazione del piano di polarizzazione dalla concentrazione della sostanza attiva è utilizzata nella *saccarimetria* per determinare il tenore di zucchero nelle soluzioni.

La rotazione del piano di polarizzazione nei cristalli uniassici ha luogo anche nei casi in cui la luce si propaghi *sotto un certo angolo con l'asse ottico*. Ma in questi casi il fenomeno è complicato dalla birifrangenza ordinaria. La complicazione è ancor più grande nei cristalli otticamente biassici, poiché la rotazione del piano di polarizzazione può essere diversa lungo i diversi assi ottici. Infine, esistono cristalli cubici naturalmente attivi che non manifestano birifrangenza ordinaria ($NaClO_3$, $NaBrO_3$) per i quali la rotazione α non dipende dall'orientamento del cristallo.

5. Secondo Fresnel, la rotazione del piano di polarizzazione, quale che sia la sua natura, è una manifestazione di una birifrangenza speciale, la cosiddetta *birifrangenza circolare*. Ma le due onde che possono propagarsi in un mezzo otticamente attivo con velocità determinate ma differenti sono polarizzate non linearmente, come nel caso di una birifrangenza ordinaria, ma *circolarmente*: *l'una a destra, l'altra a sinistra*.

Per dimostrare che quest'ipotesi è sufficiente, supponiamo che un'onda piana, a piano di polarizzazione rotante, si propaghi nel senso positivo dell'asse Z. Essendo l'onda trasversale, il suo vettore elettrico $\boldsymbol{E}$ possiede solo due componenti E_x ed E_y. Se A è l'ampiezza delle vibrazioni, $E_x = A \cos \chi \cos (\omega t - kz)$, $E_y = A \sin \chi \cos (\omega t - kz)$, dove χ è l'angolo tra la direzione del vettore elettrico $\boldsymbol{E}$ e l'asse X. Quest'angolo può dipendere dalla coordinata z, di modo che si può porre $\chi = -\alpha z$, dove α è il coefficiente, precedentemente introdotto, che caratterizza la rotazione del piano di polarizzazione. Se il coefficiente α è positivo, nella propagazione dell'onda l'angolo χ diminuisce, cioè la rotazione si effettua *nel senso orario* (a destra). Se α è negativo, il piano di polarizzazione ruota *nel senso antiorario* (a sinistra). Sostituendo il valore $\chi = -\alpha z$ nelle espressioni di E_x ed E_y ed utilizzando le note formule di trigonometria, si ottiene

$$E_x = \frac{A}{2} \cos (\omega t - kz + \alpha z) + \frac{A}{2} \cos (\omega t - kz - \alpha z),$$

$$E_y = \frac{A}{2} \cos \left(\omega t - kz + \alpha z + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{2} \cos \left(\omega t - kz - \alpha z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Scomponiamo l'onda così definita in due onde: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{d}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}$, dove le componenti dei vettori $\boldsymbol{E}^{\mathrm{d}}$ ed $\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}$ sono definite dalle espressioni

$$E_x^{\mathrm{d}} = \frac{A}{2} \cos (\omega t - k^{\mathrm{d}} z), \quad E_y^{\mathrm{d}} = \frac{A}{2} \cos \left(\omega t - k^{\mathrm{d}} z + \frac{\pi}{2}\right), \tag{94.1}$$

$$E_x^{\mathrm{s}} = \frac{A}{2} \cos (\omega t - k^{\mathrm{s}} z), \quad E_y^{\mathrm{s}} = \frac{A}{2} \cos \left(\omega t - k^{\mathrm{s}} z - \frac{\pi}{2}\right) \tag{94.2}$$

e sono introdotte le notazioni

$$k^{\mathrm{d}} = k - \alpha, \quad k^{\mathrm{s}} = k + \alpha. \tag{94.3}$$

Nell'onda (94.1) la componente E_y anticipa in fase la componente E_x di $\pi/2$, e nell'onda (94.2) è in ritardo di $\pi/2$ rispetto a E_x. Entrambe le onde sono polarizzate circolarmente: nell'onda (94.1) il vettore elettrico ruota nel senso che va dall'estremità positiva dell'asse Y verso l'estremità positiva dell'asse X, nell'onda (94.2) la rotazione si effettua nella direzione inversa (fig. 314). In altre parole, l'onda (94.1) è polarizzata circolarmente destra e la (94.2) circolarmente sinistra. Dunque, *dal punto di vista cinematico un'onda a piano di polarizzazione rotante può essere considerata come la sovrapposizione di due onde polarizzate circolarmente, l'una a destra e l'altra a sinistra.* Le velocità di queste onde sono date dalle espressioni

$$v^{\mathrm{d}} = \frac{\omega}{k - \alpha}, \quad v^{\mathrm{s}} = \frac{\omega}{k + \alpha}, \tag{94.4}$$

e gli indici di rifrazione dalle espressioni

$$n^{\mathrm{d}} = \frac{c}{v^{\mathrm{d}}} = \frac{c}{\omega}(k - \alpha), \quad n^{\mathrm{s}} = \frac{c}{v^{\mathrm{s}}} = \frac{c}{\omega}(k + \alpha). \tag{94.5}$$

Ne segue che

$$n^{\mathrm{s}} - n^{\mathrm{d}} = \frac{2c}{\omega}\alpha, \quad \alpha = \frac{\omega}{2c}(n^{\mathrm{s}} - n^{\mathrm{d}}). \tag{94.6}$$

Se $n^{\mathrm{s}} - n^{\mathrm{d}} > 0$, si ha $\alpha > 0$, cioè il piano di polarizzazione ruota *a destra.* Se, invece, $n^{\mathrm{s}} - n^{\mathrm{d}} < 0$, il piano di polarizzazione ruota *a sinistra.* In altre parole, *il piano di polarizzazione ruota nello stesso senso del vettore elettrico dell'onda polarizzata circolarmente avente il più piccolo indice di rifrazione, cioè avente la più grande velocità.*

6. Questa considerazione non dimostra assolutamente che ciascuna delle onde polarizzate circolarmente (94.1) e (94.2) possa esistere isolatamente nel mezzo. Ci siamo basati sul fatto sperimentale che in un mezzo otticamente attivo può realmente esistere un'onda a piano di polarizzazione rotante. Tale onda deve evidentemente essere una *soluzione del sistema di equazioni fondamentali di Maxwell* completato dalle equazioni materiali che caratterizzano un mezzo otticamente attivo. Questo sistema di equazioni deve essere soddisfatto dalla sovrapposizione delle onde polarizzate circolarmente (94.1) e (94.2), poiché abbiamo dimostrato che questa sovrapposizione fornisce un'onda a piano di polarizzazione rotante. Ma ogni soluzione di un sistema di equazioni può essere rappresentata (con un numero infinito di procedimenti) sotto forma di una somma di alcuni termini che *non debbono essere necessariamente soluzioni dello stesso sistema di equazioni.* Perciò dal fatto che in un mezzo otticamente attivo è possibile l'esistenza di un'onda a piano di polarizzazione rotante non segue necessaria-

mente che in questo mezzo è anche possibile l'esistenza di singole onde a polarizzazione circolare. Ciononostante *Fresnel suppose che onde polarizzate circolarmente con le velocità (94.4) potessero propagarsi in un mezzo otticamente attivo.* Queste onde possono essere dette *normali*, cioè onde che si propagano nel mezzo senza alterazione della loro forma e della loro polarizzazione. Questa supposizione è un'*ipotesi* che Fresnel non poteva dimostrare teoricamente, perché per farlo era necessario disporre del sistema completo di equazioni della teoria ondulatoria della luce nei mezzi otticamente attivi. Ma Fresnel giustificò la sua ipotesi *sperimentalmente.*

Fresnel fabbricò un prisma complesso composto da tre prismi di quarzo: due prismi *ABM* e *DCM* di quarzo destrogiro ed un prisma *AMD* di quarzo levogiro d'angolo ottuso $M = 152°$ (fig. 316). Gli assi ottici di tutti
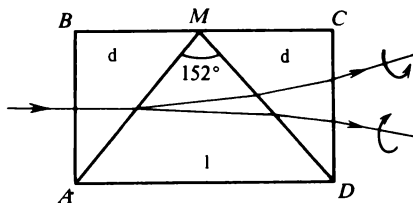
Fig. 316

e tre i prismi erano paralleli alla base *AD.* Il raggio luminoso incidente parallelo all'asse ottico non subiva rifrazione sulla faccia *AB*, ma si scomponeva all'interno del prisma *ABM* in due raggi polarizzati circolarmente. Il raggio polarizzato a destra, come mostrano le formule (94.5), possedeva indice di rifrazione più piccolo e quello polarizzato a sinistra indice di rifrazione più grande ($n^d < n^s$). Nel prisma levogiro *AMD* la relazione tra questi indici di rifrazione era inversa ($n^d > n^s$). Perciò sulla faccia *AM* i raggi subivano una rifrazione differente; il raggio destro s'avvicinava alla base *AD*, mentre quello sinistro s'allontanava. L'angolo di divergenza tra i raggi aumentava ancor più a causa della rifrazione sulle facce *DM* e *CD.* In conseguenza di ciò dal prisma uscivano due raggi: uno deviato verso il basso e l'altro verso l'alto; l'angolo di divergenza tra questi raggi era all'incirca 4′ (si veda il problema alla fine di questo paragrafo). Lo studio per mezzo di un parallelepipedo di Fresnel o di una lamina quarto d'onda ha dimostrato che il raggio deviato in basso era polarizzato circolarmente a destra e quello deviato in alto a sinistra.

Fresnel propose di verificare la sua ipotesi anche per i liquidi mediante una combinazione di un grande numero di prismi alternativamente riempiti di liquidi destro- e levogiri. In seguito questo esperimento è stato realizzato ed ha dimostrato che nei liquidi otticamente attivi potevano anche coesistere due onde a polarizzazione circolare destro- e levogira.

L'esistenza della birifrangenza circolare nel quarzo può essere rivelata anche per mezzo di un solo prisma, tagliato in modo che il suo asse ottico sia perpendicolare al piano che divide a metà l'angolo diedro rifrangente. Se un raggio luminoso attraversa il prisma al minimo di deviazione, esso si propaga parallelamente all'asse ottico e non subisce la birifrangenza. Se la luce incidente è naturale o polarizzata linearmente corrispondente ad una sola riga spettrale, al minimo di deviazione, il raggio incidente si scinde nel punto d'uscita dal prisma in due raggi, uno polarizzato circolarmente a destra e l'altro a sinistra.

Fresnel dimostrò quindi sperimentalmente che *quando un raggio luminoso penetra in un mezzo otticamente attivo, esso subisce una birifrangenza circolare*: *i raggi polarizzati circolarmente a destra ed a sinistra si propagano nel mezzo otticamente attivo con velocità di fase differenti. Se la luce incidente è polarizzata linearmente, nel punto d'uscita dal mezzo queste onde si ricombinano in un'onda linearmente polarizzata, ma con il piano di polarizzazione ruotato*. Con ciò il problema di spiegare il fenomeno di polarizzazione rotatoria è stato ricondotto alla spiegazione della *birifrangenza circolare.*

In prossimità delle righe o delle bande d'assorbimento, le onde polarizzate circolarmente in sensi inversi si distinguono non soltanto per le velocità di propagazione, ma anche per i loro coefficienti d'assorbimento. In questo caso esse escono con ampiezze differenti. Se la luce incidente è polarizzata linearmente, la luce emergente sarà polarizzata *ellitticamente*. Questo fenomeno si dice *dicroismo circolare* e fu scoperto per la prima volta nel 1847 da Haidinger (1795-1871) nell'ametista e fu dettagliatamente studiato nel 1895 da Cotton (1869-1951) sulle soluzioni d'acido tartarico.

Problema

Utilizzando i dati riportati nel testo, calcolare l'angolo di divergenza $\delta\varphi$ dei raggi polarizzati circolarmente a destra ed a sinistra che emergono dal prisma *ABCD* (esperimento di Fresnel, fig. 316). Conoscendo l'indice di rifrazione ordinario del quarzo ($n_o = 1{,}544$ per $\lambda = 589{,}3$ nm), calcolare la divergenza angolare $\delta_1\varphi$ tra gli stessi raggi dopo la rifrazione sul piano *AM* e $\delta_2\varphi$ dopo la seconda rifrazione sul piano *MD*.

Risposta. $\delta\varphi = \dfrac{4\lambda\alpha}{\pi}\,\mathrm{tg}\dfrac{M}{2} = 3{,}92'$; $\delta_1\varphi = \dfrac{\delta\varphi}{2n_o} = 1{,}27'$; $\delta_2\varphi = \dfrac{\delta\varphi}{n_o} = 2{,}54'$.

§ 95. *Polarizzazione rotatoria magnetica*

1. Nel 1846 Faraday scoprì che una sostanza, priva d'attività ottica, sottoposta all'azione di un intenso campo magnetico permanente, produce una rotazione del piano di polarizzazione di un fascio luminoso che l'attraversa parallelamente alla direzione del campo magnetico. Per osservare il

fenomeno si può utilizzare un elettromagnete le cui espansioni polari sono perforate da un canale cilindrico, come illustrato in figura 312. L'elettromagnete è messo tra nicol incrociati e la sostanza studiata è introdotta nel traferro. Se l'osservatore guarda nella direzione del campo magnetico e riceve la luce, la rotazione a destra è considerata *positiva* e quella a sinistra *negativa.* Nel primo caso la rotazione del piano di polarizzazione avviene nel senso di circolazione della corrente elettrica nelle spire dell'elettromagnete, e nel secondo caso questi sensi sono opposti. Faraday osservò soltanto la rotazione destra, poiché questo è il caso più frequente. L'unica eccezione tra le sostanze diamagnetiche è il cloruro di titanio. Tra le sostanze paramagnetiche s'incontra un gran numero di sostanze levogire, per esempio i sali di ferro e delle terre rare, $K_2Cr_2O_7$, $KCrO_4$, ecc.

Gli esperimenti di Faraday stesso e gli esperimenti più precisi di Verdet (1824-1866) hanno mostrato che *l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione è proporzionale alla lunghezza di percorso l della luce nella sostanza ed all'intensità del campo magnetico esterno, cioè all'induzione magnetica B nella sostanza*:

$$\chi = RlB, \tag{95.1}$$

dove il coefficiente R si dice *costante di Verdet* o *potere rotatorio magnetico.* Questo coefficiente dipende dalla natura della sostanza, dal suo stato fisico e dalla lunghezza d'onda. Nella tavola 10 sono riportate le caratteristiche della rotazione magnetica di alcune sostanze.

Tavola 10

Sostanza	χ			
	λ = 656 nm	λ = 589 nm	λ = 486 nm	
Acqua (25 °C)	0,0102′	0,0130′	0,0197′	Per 1 cm di lunghezza di raggio in un campo di 1 G
Solfuro di carbonio (25 °C)	0,0319′	0,0415′	0,0667′	
Quarzo	0,0136′	0,0166′	0,0250′	
Ossigeno	0,484′	0,559′	0,721′	Alla pressione atmosferica per 1 cm di lunghezza di raggio in un campo di 10^5 G
Idrogeno	0,430′	0,537′	0,805′	
Biossido di carbonio	0,691′	0,862′	0,286′	
Ferro	217°	195°	145°	Per 10^{-3} cm in un campo di 15 000 G
Nichel	92°	75°	64°	

Per i metalli ferromagnetici l'angolo di rotazione χ non è proporzionale a B, ma nei campi magnetici forti esso cresce lentamente con B, avvicinandosi asintoticamente ad un valore limite. Secondo Kundt, l'angolo χ è proporzionale alla magnetizzazione $I = (\mu - 1) B/(4\pi\mu)$, dove μ è la permeabilità magnetica. Quest'angolo è definito dall'espressione

$$\chi = KlI \tag{95.2}$$

dove K è la cosiddetta *costante di Kundt.* Per $B = 15\,000$ G si può porre che la sostanza ferromagnetica sia magnetizzata a saturazione.

2. La natura fisica della polarizzazione rotatoria magnetica potè essere spiegata solo dopo la scoperta dell'effetto Zeeman e la sua spiegazione data da Lorentz. Supponiamo per semplicità che in assenza di un campo magnetico la sostanza emetta *una sola riga spettrale*, cioè possieda *una sola frequenza propria* (*di risonanza*) ω_0. L'applicazione di un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ fa apparire due nuove frequenze di risonanza $\omega_0 + \Omega$ e $\omega_0 - \Omega$ (Ω è la frequenza di Larmor) corrispondenti ai moti circolari dell'elettrone (si veda il § 92). Queste frequenze proprie si manifestano non solo nell'*emissione* (*effetto Zeeman diretto*), ma anche nell'*assorbimento della luce* (*effetto Zeeman inverso*). La frequenza di risonanza iniziale ω_0 si manifesta nella propagazione della luce perpendicolarmente al campo magnetico o in una direzione non parallela a questo campo. Le onde normali che possono propagarsi lungo il campo magnetico sono polarizzate circolarmente. Quando le direzioni di propagazione della luce e del campo magnetico coincidono, alla frequenza propria più alta $\omega_+ = \omega_0 + \Omega$ corrisponde una rotazione oraria ed alla frequenza minore $\omega_- = \omega_0 - \Omega$ corrisponde una rotazione antioraria se si guarda nella direzione del campo magnetico (fig. 313).

Visto che le frequenze proprie ω_+ e ω_- sono differenti, sono differenti anche le velocità di propagazione di entrambe le onde polarizzate circolarmente. Ciò dà una spiegazione di principio della polarizzazione rotatoria magnetica poiché, secondo Fresnel, l'addizione di queste due onde circolari fornisce un'onda con il piano di polarizzazione rotante. L'angolo di rotazione del piano di polarizzazione è dato dalla formula (94.6)

$$\chi = \frac{\omega l}{2c}(n_- - n_+) = \frac{\pi l}{\lambda}(n_- - n_+), \tag{95.3}$$

dove con n_+ e n_- sono indicati gli indici di rifrazione rispettivamente per le onde di frequenze proprie ω_+ e ω_-. La determinazione dei segni tiene conto del fatto che i sensi positivi della rotazione naturale e della rotazione magnetica sono per convenzione inversi.

È comodo discutere la formula (95.3) in forma grafica. In figura 317 le linee tratteggiate rappresentano gli indici di rifrazione n_- e n_+ in funzione della frequenza della luce ω. La loro differenza è data dalla curva a tratto continuo. Come si vede dalla figura, all'esterno dell'intervallo (ω_-, ω_+) la

differenza $n_- - n_+$ e con essa anche la rotazione del piano di polarizzazione sono *positive*, ed all'interno di quest'intervallo sono *negative*.

In tutti i casi i sensi della rotazione di Larmor Ω e quindi anche le rotazioni del piano di polarizzazione dipendono dal *senso del campo magnetico* $\boldsymbol{B}$ e *non dipendono dal senso di propagazione della luce*. Se il senso di propagazione della luce viene invertito, il senso di rotazione del piano di polarizzazione *non cambia*, contrariamente a quanto avviene nel caso di una polarizzazione rotatoria naturale. Faraday utilizzò questo fatto per far crescere la rotazione magnetica del piano di rotazione. Aumentò la distanza l percorsa dalla luce nella sostanza, facendo riflettere il raggio parecchie volte sulle facce del campione studiato (fig. 318). Per ottenere quest'effetto le facce venivano argentate (eccetto i punti d'entrata e d'uscita del raggio luminoso).
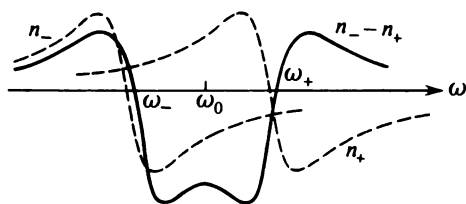
Fig. 317
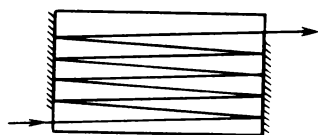
Fig. 318

3. Fuori dell'intervallo (ω_-, ω_+) e lontano dalle frequenze di risonanza ω_- e ω_+ si può trascurare l'assorbimento ed utilizzare, per gli indici di rifrazione n_- e n_+, la formula di Sellmeier (84.9), sostituendo in essa ω_0 con ω_- e ω_+ rispettivamente. Secondo questa formula n_- e n_+ sono *una stessa funzione* degli argomenti $(\omega^2 - \omega_-^2)$ e $(\omega^2 - \omega_+^2)$. Con la stessa funzione, ma di argomento $(\omega^2 - \omega_0^2)$ è anche espresso l'indice di rifrazione n della sostanza in assenza di campo magnetico. Di conseguenza,

$$n_- - n_+ = n(\omega^2 - \omega_-^2) - n(\omega^2 - \omega_+^2) =$$

$$= (\omega_+^2 - \omega_-^2)\frac{dn}{d\omega^2} = \frac{(\omega_+ + \omega_-)(\omega_+ - \omega_-)}{2\omega}\frac{dn}{d\omega}.$$

La rotazione del piano di polarizzazione ha un valore notevole solo vicino alla banda d'assorbimento, e quindi si può porre $\omega_+ + \omega_- = 2\omega$. Inoltre, $\omega_+ - \omega_- = 2\Omega = eB/(mc)$. Quindi,

$$n_- - n_+ = \frac{eB}{mc}\frac{dn}{d\omega} = -\frac{eB}{2\pi mc^2}\lambda^2\frac{dn}{d\lambda}.$$

Sostituendo quest'espressione nella (95.3), otteniamo la formula (95.1), ed

inoltre per la costante di Verdet si ottiene l'espressione

$$R = - \frac{e}{2mc^2} \lambda \frac{dn}{d\lambda} . \tag{95.4}$$

Ricordiamo che e indica qui il *valore assoluto* della carica dell'elettrone. La formula (95.4) è di solito detta *formula di Becquerel* (1852-1908).

4. Esaminiamo ora la rotazione magnetica del piano di polarizzazione nella *banda d'assorbimento della sostanza*, dove l'indice di rifrazione ed il coefficiente d'assorbimento variano *rapidamente* ed *in modo anomalo* con la frequenza. Perciò la polarizzazione magnetica rotatoria è grande e presenta un *carattere anomalo*. Inoltre, all'interno della banda d'assorbimento stessa tra le frequenze di risonanza ω_- e ω_+ la rotazione è *negativa* (fig. 317). Questo comportamento anomalo del piano di polarizzazione si dice *effetto Macaluso e Corbino*; questi fisici italiani scoprirono l'effetto sperimentalmente nel 1898, mentre la teoria del fenomeno fu elaborata più tardi da Voigt.

Macaluso e Corbino mostrarono che i vapori di sodio sottoposti all'azione di un campo magnetico producevano una forte rotazione del piano di polarizzazione nelle immediate vicinanze delle righe gialle D_1 e D_2. La rotazione era dello stesso segno da entrambi i lati di questa riga doppia. Tra i poli di un elettromagnete era disposta una fiamma di sodio che era attraversata, parallelamente al campo, da un fascio di luce bianca polarizzata linearmente. Sul tragitto dei raggi veniva messo un nicol-analizzatore che provocava la loro estinzione completa in assenza del campo. Quando nell'avvolgimento dell'elettromagnete era fornita una corrente, il campo visivo diventava illuminato da una viva luce gialla: nello spettroscopio si vedevano due righe gialle disposte simmetricamente da entrambi i lati della riga D. La luce di queste lunghezze d'onda subiva nel campo magnetico una rotazione del piano di polarizzazione uguale a 90° ed attraversava i nicol polarizzatore ed analizzatore incrociati. Ruotando l'analizzatore prima in un senso e poi nell'altro, si poteva constatare che da entrambi i lati della banda d'assorbimento la rotazione presentava lo stesso segno.

Wood perfezionò l'installazione di Macaluso e Corbino, realizzando gli esperimenti con vapori di sodio contenuti in un tubo d'acciaio. Nei suoi esperimenti la densità dei vapori di sodio si poteva variare entro grandi limiti. Quando la densità era relativamente piccola, i risultati erano simili a quelli ottenuti negli esperimenti di Macaluso e Corbino. La differenza consisteva nel fatto che negli esperimenti di Macaluso e Corbino la riga del sodio D doppia non era risolta, mentre in quelli di Wood si separava. Le righe gialle apparivano da entrambi i lati sia della componente D_1, sia della componente D_2. Con l'aumento della densità dei vapori di sodio aumentava la distanza tra le righe gialle esterne e tra esse apparivano nuove righe corrispondenti alle rotazioni del piano di polarizzazione uguali a 270°, 450°, 630°, ecc. La regione centrale tra le righe D_1 e D_2 diventava alternati-

vamente chiara e scura. In alcuni casi Wood osservava fino ad otto alterazioni il che corrisponde ad una rotazione di 1440°.

5. Le considerazioni esposte sopra sono basate sulla *teoria classica*, cioè *sull'effetto Zeeman semplice.* La teoria completa deve tener conto dell'*effetto Zeeman complesso*, cioè deve essere una *teoria quantistica.* Inoltre, per spiegare l'esistenza di una rotazione negativa del piano di polarizzazione, è necessario tener conto del *paramagnetismo degli atomi.* Queste questioni non possono essere trattate nel nostro Corso.

Problemi

1. Tra due nicol N_1 e N_2 (fig. 319), le cui sezioni principali sono ruotate l'una rispetto all'altra di 45°, in un campo magnetico longitudinale viene messo uno strato di una sostanza otticamente attiva. Di quale angolo questo strato deve far ruotare il piano di polarizzazione affinché il sistema funzioni come una *valvola ottica*, cioè perché la luce possa attraversarlo solo in un senso (per esempio, dal corpo A verso il corpo B)?

Risposta. La rotazione dev'essere uguale a 45° + 180° m (m è un numero intero).

2. Come si comporterà la valvola ottica descritta nel problema precedente, se il senso del campo magnetico è invertito, lasciando immutata la disposizione relativa dei nicol e l'intensità del campo magnetico?

Risposta. Il senso di passaggio della luce sarà inverso.

3. Dire se l'installazione descritta nel problema 1 può funzionare da valvola ottica se tra i nicol viene messo uno strato di sostanza *otticamente attiva senza il campo magnetico.*

Risposta. No, essa non funzionerà come una valvola ottica.

4. Spiegare il paradosso di Wien. In un involucro adiabatico sono contenuti due corpi A e B ugualmente riscaldati (fig. 319), e tra questi corpi si trova una valvola ottica. La luce emessa
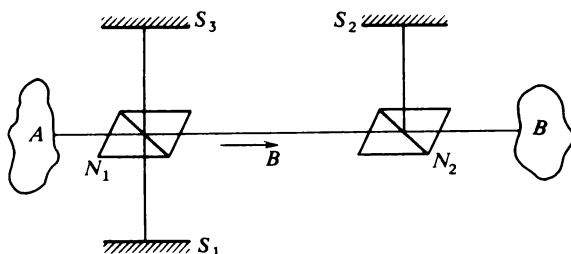
Fig. 319

dal corpo A cade sul nicol N_1. La metà dell'energia incidente I, cioè $I/2$, attraversa il nicol, mentre l'altra metà, dopo aver subito una riflessione totale, è rinviata dallo specchio S_1 verso il corpo A (l'utilizzazione dello specchio permette di non tener conto del riscaldamento del nicol). Dopo aver attraversato il nicol N_1, l'altra metà dell'energia $I/2$, attraverserà totalmente il nicol N_2 e sarà assorbita dal corpo B. La luce emessa dal corpo B è arrestata dalla valvola ottica. La metà $I/2$ dell'energia I emessa da B subisce una riflessione totale sul nicol N_2 e, dopo la riflessione dallo specchio S_2, ritorna sul corpo B. L'altra metà dell'energia, dopo aver attraversato il nicol N_2 ed il mezzo che fa ruotare il piano di polarizzazione della luce di 45°, non potrà attraversare il nicol N_1 e subirà in esso una riflessione totale. Per mezzo di uno specchio ausiliare S_3 questa parte dell'energia sarà riflessa indietro e dopo una riflessione totale nel ni-

col N_1 ritornerà al corpo *B*. Dunque, il corpo *A* riceve l'energia $I/2$; il corpo *B* che riceve l'energia $3I/2$ dovrà quindi riscaldarsi in contrasto con il secondo principio della termodinamica.

Soluzione. La luce emessa dal corpo *B* (fig. 319) e ritornante ad esso dopo la riflessione dal nicol N_1 nell'attraversare la sostanza subirà una rotazione supplementare del piano di polarizzazione di 45° e non attraverserà quindi il nicol N_2. Dopo aver subìto una riflessione totale nel nicol N_2, questa luce ritornerà al corpo *A* (se mettiamo uno specchio supplementare di fronte a S_2). Questa soluzione del paradosso di Wien è stata data da Rayleigh.

§ 96. *Dispersione temporale e spaziale. Teoria dell'attività ottica naturale*

1. Molti fenomeni ottici si possono interpretare in modo soddisfacente ammettendo che la relazione tra i vettori $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$ (nonché tra $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{H}$) sia *locale nel tempo e nello spazio.* Ciò significa che il vettore $\boldsymbol{D}$ in ogni punto dello spazio $\boldsymbol{r}$ ed in ogni istante t è determinato dal valore del vettore $\boldsymbol{E}$ *nello stesso punto e nello stesso istante.* (Lo stesso vale per i vettori $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{H}$. Per brevità queste considerazioni sono sottintese e tutta l'esposizione concerne i vettori $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$.) Ma per interpretare alcuni fenomeni l'ipotesi di relazione locale è *insufficiente.* Una relazione, che non è locale né nel tempo né nello spazio, può essere decomposta in una relazione *puramente spaziale* ed in una relazione *puramente temporale.* Consideriamo dapprima una non-località soltanto temporale. In quanto segue il mezzo è supposto sempre *omogeneo.*

2. La non-località temporale si manifesta nella presenza di una *dispersione ottica del mezzo.* Infatti, per interpretare la dispersione si deve tener conto delle proprietà d'*inerzia* degli elettroni, dei nuclei atomici e degli ioni della sostanza. Quest'inerzia conduce necessariamente ad una relazione tra $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$ che non è locale nel tempo. Trascurando la non-località spaziale, ragioniamo come se in tutto lo spazio il campo elettromagnetico fosse *omogeneo* e variasse *solo nel tempo.* Trascuriamo anche l'azione del campo magnetico. Consideriamo per il momento che il mezzo sia soggetto ad *azioni in forma di impulsi.* A partire dall'istante $t = 0$ e per un tempo dt il mezzo sia sottoposto all'azione del campo elettrico $\boldsymbol{E}$, che subito dopo viene soppresso. Quest'azione può essere considerata come una *spinta elettrica* che eccita vibrazioni regolari degli elettroni, dei nuclei atomici e degli ioni del mezzo. Queste vibrazioni non cessano subito dopo la soppressione del campo, ma continuano in virtù del fatto che le masse delle particelle sono *finite.* Proprio questo determina il carattere non locale nel tempo dei legami esistenti tra le deviazioni delle particelle rispetto alle loro posizioni d'equilibrio ed il campo elettrico, e quindi tra la polarizzazione $\boldsymbol{P}$ o l'induzione $\boldsymbol{D}$ del mezzo ed il campo $\boldsymbol{E}$.

Nel quadro dell'*elettrodinamica lineare*, la polarizzazione $d\boldsymbol{P}$ del mezzo, dovuta alla spinta elettrica, è proporzionale ad $\boldsymbol{E}\,dt$. Supponendo che il

mezzo sia *omogeneo* ed *isotropo*, il vettore dP all'istante t si può scrivere

$$dP(t) = f(t)E(0)\,dt, \tag{96.1}$$

dove la funzione $f(t)$ dipende soltanto dalle proprietà del mezzo e dal tempo t che è passato tra l'inizio della spinta elettrica e l'istante dell'osservazione. La funzione $f(t)$ deve annullarsi per $t = 0$, poiché per la loro inerzia gli elettroni, i nuclei atomici e gli ioni non possono acquistare istantaneamente spostamenti finiti. Questa funzione deve annullarsi anche per $t = \infty$, poiché tutti i mezzi reali sono *dissipativi*, cosicché ogni vibrazione libera dopo un certo tempo deve cessare.

Se il campo E agisce per un lungo intervallo di tempo, questo intervallo può essere diviso in intervalli infinitamente corti e ricondurre così l'azione del campo elettrico sul mezzo a una serie di spinte successive. Il contributo alla polarizzazione del mezzo all'istante t portato da una spinta elettrica anteriore $E(t')dt'$ sarà uguale a $dP(t) = f(t - t')E(t')dt'$. Nell'elettrodinamica lineare è valido il *principio di sovrapposizione*, e perciò il vettore di polarizzazione totale all'istante t è dato da

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t - t')E(t')\,dt', \tag{96.2}$$

o, introducendo una nuova variabile d'integrazione $\vartheta = t - t'$,

$$P(t) = \int_{0}^{\infty} f(\vartheta)E(t - \vartheta)\,d\vartheta. \tag{96.3}$$

Di conseguenza,

$$D(t) = E(t) + 4\pi \int_{0}^{\infty} f(\vartheta)E(t - \vartheta)\,d\vartheta. \tag{96.4}$$

L'integrazione è effettuata sul tempo *anteriore* all'istante t, in virtù del *principio di causalità*. Nella forma non relativistica questo principio implica che *ogni evento sia determinato solo dagli eventi anteriori e non può dipendere dagli eventi posteriori.*

Se $E = E_0 \exp(i\omega t)$, dopo la sostituzione di quest'espressione nella (96.4) si ottiene

$$D(t) = \varepsilon(\omega)E(t), \tag{96.5}$$

dove

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_{0}^{\infty} f(\vartheta)e^{-i\omega\vartheta}\,d\vartheta. \tag{96.6}$$

Quindi per un campo monocromatico, la relazione tra $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$ può essere formalmente scritta in una forma locale ponendo che la permettività dielettrica sia funzione della frequenza ω. La dispersione ottica, cioè la dipendenza di ε da ω, è equivalente ad una *relazione temporale non locale tra $\boldsymbol{D}(t)$ ed $\boldsymbol{E}(t)$*. Perciò questa dispersione è detta *dispersione temporale* o *dispersione in frequenza*, a differenza della *dispersione spaziale* della quale parleremo in seguito.

3. Consideriamo ora la *non-località spaziale*. Se il campo elettrico *non è omogeneo*, per poter determinare il momento dipolare indotto di una molecola, è insufficiente la conoscenza del vettore $\boldsymbol{E}$ in un punto dello spazio, ma è necessario conoscere la *funzione $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ in tutto il volume occupato dalla molecola*. Ciò equivale a richiedere la conoscenza del valore di $\boldsymbol{E}$ e delle sue derivate spaziali di tutti gli ordini in un solo punto all'interno della molecola (che si può convenzionalmente chiamare *centro della molecola*), poiché la funzione $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ può essere rappresentata allora da una *serie di Taylor* secondo le coordinate x_1, x_2, x_3 del vettore $\boldsymbol{r}$.

É facile stimare l'ordine di grandezza dei termini successivi di questa serie nel campo monocromatico di un'onda luminosa. La derivata $\partial E_l/\partial x_m$ sarà dell'ordine di E/λ, e la coordinata x_m dell'ordine della dimensione a della molecola, di modo che il termine $x_m \cdot \partial E_l/\partial x_m$ sarà dell'ordine di $(a/\lambda)E$. Allo stesso modo sono stimati gli ordini di grandezza degli altri termini contenenti derivate di ordine superiore. Se il termine di ordine zero si prende come unità, i termini contenenti le derivate prima, seconda e successive saranno dell'ordine di a/λ, $(a/\lambda)^2$, $(a/\lambda)^3$, ecc.

Come si vede, in un campo non omogeneo il legame tra il momento dipolare indotto di una molecola ed il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ è *spazialmente non locale*. Ciò implica la *non-località spaziale della relazione tra $\boldsymbol{P}$ ed $\boldsymbol{E}$ e tra $\boldsymbol{D}$ ed $\boldsymbol{E}$*. Nei campi elettrici deboli, con i quali hanno a che fare l'elettrodinamica lineare e l'ottica, si può trascurare l'influenza dei quadrati e delle potenze superiori del campo $\boldsymbol{E}$ e delle sue derivate spaziali. In quest'« approssimazione lineare » nel campo monocromatico di un'onda luminosa si può scrivere

$$D_j = \varepsilon_{jl} E_l + \gamma_{jlm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m} + \alpha_{jlmn} \frac{\partial^2 E_l}{\partial x_m \partial x_n} + \dots \qquad (96.7)$$

Quest'espressione concerne un mezzo *anisotropo* le cui proprietà ottiche sono caratterizzate dai tensori ε_{jl}, γ_{jlm}, ..., che sono funzioni della frequenza ω. Conformemente alle notazioni tensoriali, la ripetizione di un indice delle coordinate corrisponde ad una sommatoria. Come detto sopra, se il termine nullo della serie (96.7) si prende come untià, i termini successivi saranno dell'ordine di a/λ, $(a/\lambda)^2$, ecc.

Per un'onda monocromatica piana

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp i\,(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})$$

la derivazione rispetto a x_m si riduce alla moltiplicazione per $-ik_m$. Perciò la relazione (96.7) si può scrivere nella forma

$$D_j(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_{jl}(\omega, \boldsymbol{k}) E_l(\boldsymbol{r}, t), \tag{96.8}$$

dove è introdotta la notazione

$$\varepsilon_{jl}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_{jl}(\omega) - ik_m \gamma_{jlm} + (-ik_m)(-ik_n)\alpha_{jlmn} + \ldots \tag{96.9}$$

Dunque ***nel campo di un'onda monocromatica piana il legame tra D ed E assume di nuovo un carattere locale formale***, il tensore della permettività dielettrica $\varepsilon_{jl}(\omega, \boldsymbol{k})$ dipende ora non soltanto da ω, ma anche da $\boldsymbol{k}$. La dipendenza di questo tensore dal vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ si dice ***dispersione spaziale***.

4. Visto che il parametro a/λ è piccolo, gli effetti della dispersione spaziale nell'ottica sono piccoli e di difficile osservazione. A lungo l'unico effetto conosciuto era la ***polarizzazione rotatoria naturale***. Essa si osserva nei mezzi il cui tensore γ_{jlm} è diverso da zero.

Stabiliamo la forma del tensore γ_{jlm} per i mezzi isotropi asimmetrici (liquidi e cristalli cubici il cui tensore $\varepsilon_{jl}(\omega)$ si riduce ad uno scalare). Omettendo nell'espressione (96.7) tutti i termini contenenti tensori del quarto ordine e di ordine superiore, scriviamo

$$D_j(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon E_j(\boldsymbol{r}, t) + \gamma_{jlm}\frac{\partial E_l}{\partial x_m}. \tag{96.10}$$

Nella forma sviluppata per la componente x del vettore $\boldsymbol{D}$, quest'espressione diventa

$$D_x = \varepsilon E_x + \gamma_{xxx}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \gamma_{xxy}\frac{\partial E_x}{\partial y} + \gamma_{xxz}\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma_{xyx}\frac{\partial E_y}{\partial x} +$$

$$+ \gamma_{xyy}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \gamma_{xyz}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma_{xzx}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma_{xzy}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_{xzz}\frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{96.11}$$

Ruotiamo ora il sistema di coordinate di 90° attorno all'asse X (fig. 320). Data l'isotropia del mezzo, tutti i coefficienti della relazione precedente restano invariati, ma y ed E_y si trasformano in $-z$ e $-E_z$, così come z ed E_z vanno in y ed E_y. Le altre coordinate e componenti dei vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{D}$ restano invariate. Effettuando nella (96.11) le sostituzioni convenienti, si ottiene

$$D_x = \varepsilon E_x + \gamma_{xxx}\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_{xxy}\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma_{xxz}\frac{\partial E_x}{\partial y} - \gamma_{xyx}\frac{\partial E_z}{\partial x} +$$

$$+ \gamma_{xyy}\frac{\partial E_z}{\partial z} - \gamma_{xyz}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_{xzx}\frac{\partial E_y}{\partial x} - \gamma_{xzy}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma_{xzz}\frac{\partial E_y}{\partial y}. \tag{96.11a}$$

Ma in virtù della definizione del tensore γ_{jlm} in un sistema di coordinate

ruotato, la relazione tra D_x e le componenti del vettore $\boldsymbol{E}$ può essere scritta nella forma iniziale (96.11). Il confronto tra le due relazioni fornisce $\gamma_{xxy} = \gamma_{xxz}$, $\gamma_{xxz} = -\gamma_{xxy}$, da cui $\gamma_{xxy} = \gamma_{xxz} = 0$, ecc. Inoltre, $\gamma_{xyz} = -\gamma_{xzy}$, ecc.

Quanto al coefficiente γ_{xxx}, esso è uguale a zero. Infatti, in virtù della simmetria $\gamma_{xxx} = \gamma_{yyy} = \gamma_{zzz}$. Ruotiamo il sistema di coordinate iniziale di 90° attorno all'asse Z, in modo che l'asse Y assuma la direzione negativa del precedente asse X. Nella (96.11), non cambiando i coefficienti, si devono allora fare le seguenti sostituzioni: $x \to -y$, $D_x \to -D_y$, $E_x \to -E_y$,
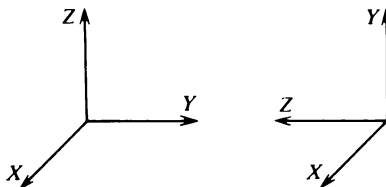
Fig. 320

il che dà

$$-D_y = -\varepsilon E_y + \gamma_{xxx}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \ldots$$

D'altra parte, in base della definizione di tensore γ_{jlm} nel sistema ruotato si può subito scrivere

$$D_y = \varepsilon E_y + \gamma_{yyy}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \ldots$$

Di qui, data l'uguaglianza $\gamma_{xxx} = \gamma_{yyy}$, si ottiene $\gamma_{xxx} = 0$.

Quindi tutte le componenti del tensore γ_{jlm} s'annullano, se due degli indici j, l, m sono identici, indipendentemente dal valore del terzo indice. Sono diverse da zero soltanto le componenti i cui tre indici sono diversi. In questo caso, se si permutano due indici vicini, la componente del tensore γ_{jlm} cambia di segno. Si può dunque scrivere

$$\gamma_{xyz} = -\gamma_{yxz} = \gamma_{yzx} = -\gamma_{zyx} = \gamma_{zxy} = -\gamma_{xzy} = -g. \tag{96.12}$$

L'espressione (96.11) si trasforma allora nella formula

$$D_x = \varepsilon E_x + g\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right),$$

o nella forma vettoriale

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + g \operatorname{rot} \boldsymbol{E}. \tag{96.13}$$

Se ogni punto del mezzo è *centro di simmetria*, per riflessione rispetto a un punto il mezzo si trasforma in sé stesso, e perciò il tensore γ_{jlm} deve restare invariato. Ma in questo caso il sistema di coordinate diretto cede il posto ad un sistema inverso ed i segni delle coordinate x, y, z e delle componenti dei vettori polari $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{D}$ cambiano, di modo che la (96.10) diventa

$$-D_j = -\varepsilon E_j + \gamma_{jlm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m}.$$

Ne segue che $\gamma_{jlm} = 0$, cioè la rotazione del piano di polarizzazione è impossibile. Perché la rotazione diventi possibile, è necessario che le molecole del liquido o dei cristalli cubici *non posseggano centri di simmetria.*

Notiamo anche che nel caso di un mezzo isotropo otticamente attivo la quantità g è uno *pseudoscalare* e non uno scalare vero (cfr. il vol. I, § 7). Passando dal sistema diretto ad un sistema inverso, o viceversa, la quantità g cambia di segno. Ciò si vede direttamente dalla relazione (96.12) la quale mostra che γ_{jlm} è uno *pseudotensore perfettamente antisimmetrico.*

5. Per analogia con la (96.13) si può scrivere

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + g' \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \qquad (96.14)$$

dove g' è un nuovo *pseudoscalare.* Ammettiamo qui che la permeabilità magnetica μ sia uguale all'unità. L'introduzione del termine supplementare $g' \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$ è necessaria per la verifica della legge di conservazione dell'energia. Infatti, utilizzando le equazioni di Maxwell, riduciamo le relazioni (96.13) e (96.14) alla forma

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} - \frac{g}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + \frac{g'}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

Semplifichiamo queste equazioni, portando la seconda espressione nella prima e la prima nella seconda, ed omettiamo qui il prodotto gg' come una *quantità piccola di ordine superiore.* Si ottiene allora

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} - \frac{g}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + \frac{\varepsilon g'}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (96.15)$$

Utilizziamo ora il risultato dell'elettrodinamica secondo il quale la quantità $\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}}$ è uguale alla derivata rispetto al tempo della densità d'energia elettromagnetica (moltiplicata per 8π) (cfr. il vol. III, § 84). Per mezzo della (96.15) trasformiamo quest'espressione in

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}} = (\varepsilon \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{H}}) + \frac{1}{c}(\varepsilon g' \boldsymbol{E}\ddot{\boldsymbol{E}} - g\boldsymbol{H}\ddot{\boldsymbol{H}}).$$

Il primo termine del secondo membro è la derivata di $1/2(\varepsilon E^2 + H^2)$. Ne segue che il secondo termine dev'essere anch'esso la derivata rispetto al tempo di una certa funzione. Sarà così se è verificata la relazione $\varepsilon g' = g$,

poiché in questo caso si avrà

$$\varepsilon g' E\ddot{E} - gH\ddot{H} = g \frac{\partial}{\partial t} (E\dot{E} - H\dot{H}).$$

Abbiamo dunque dimostrato la necessità dell'introduzione del secondo termine nella formula (96.14), mentre le formule (96.15) vengono scritte nella forma definitiva

$$D = \varepsilon E - \frac{g}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad B = H + \frac{g}{c}\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{96.16}$$

6. Disponiamo ora di un sistema completo di equazioni per le onde monocromatiche in un mezzo omogeneo otticamente attivo. Dalle equazioni $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$ e $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ segue che in questo mezzo le onde piane sono *trasversali rispetto ai vettori* ***D*** *e* ***B***. *Esse lo sono anche rispetto ai vettori* ***E*** *e* ***H***, poiché dalle equazioni (96.13) e (96.14) segue che $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$. Sostituendo poi nelle equazioni di Maxwell le espressioni (96.16)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{96.17}$$

Supponiamo che l'onda sia piana e si propaghi nel senso positivo dell'asse Z. Soltanto le componenti E_x ed E_y, H_x e H_y, sono allora diverse da zero e dipendono soltanto dalla coordinata z. Tenendone conto, scriviamo le equazioni (96.17) nella forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{96.18}$$

e in forma analoga si presentano le derivate $\partial H_x/\partial z$ e $\partial H_y/\partial z$. Notiamo che tutte le quantità sono reali. Per semplificare i ragionamenti è comodo introdurre le combinazioni complesse

$$\begin{aligned} E_+ &= E_x + iE_y, \quad E_- = E_x - iE_y, \\ H_+ &= H_x + iH_y, \quad H_- = H_x - iH_y. \end{aligned} \tag{96.19}$$

La parte reale del numero complesso E_+ definisce la componente E_x ed il coefficiente della parte immaginaria definisce la componente E_y, ecc. Nello studio dei fenomeni di polarizzazione rotatoria è più comodo utilizzare direttamente le combinazioni complesse stesse, senza passare alla forma reale. Per esempio, se si producono oscillazioni armoniche $E_x = A \cos \omega t$, $E_y = A \sin \omega t$, si ha $E_+ = Ae^{i\omega t}$. Il punto che rappresenta il numero complesso E_+ si sposta nel piano complesso secondo una traiettoria circolare nella direzione che va dall'asse X verso l'asse Y, cioè rappresenta un'*onda polarizzata circolarmente sinistra*. Analogamente, la combinazione E_- descrive un'*onda polarizzata circolarmente destra*.

Moltiplicando la seconda equazione della (96.18) per i, troviamo per addizione e sottrazione di queste equazioni le derivate $\partial E_+/\partial z$ e $\partial E_-/\partial z$. Procedendo allo stesso modo con il campo magnetico, otteniamo

$$\frac{\partial E_+}{\partial z} = \frac{i}{c}\frac{\partial H_+}{\partial t} + \frac{ig}{c^2}\frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial H_+}{\partial z} = -\frac{i\varepsilon}{c}\frac{\partial E_+}{\partial t} + \frac{ig}{c^2}\frac{\partial^2 H_+}{\partial t^2}. \tag{96.20}$$

$$\frac{\partial E_-}{\partial z} = -\frac{i}{c}\frac{\partial H_-}{\partial t} - \frac{ig}{c^2}\frac{\partial^2 E_-}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial H_-}{\partial z} = \frac{i\varepsilon}{c}\frac{\partial E_-}{\partial t} - \frac{ig}{c^2}\frac{\partial^2 H_-}{\partial t^2}. \tag{96.21}$$

Le equazioni iniziali sono state divise in due gruppi di *equazioni indipendenti*. Il primo gruppo contiene le combinazioni E_+ e H_+ che descrivono le onde con polarizzazione circolare sinistra, ed il secondo gruppo contiene le combinazioni E_- e H_- alle quali corrisponde la polarizzazione circolare destra. Visto che entrambi i gruppi sono dello stesso tipo, è sufficiente studiare uno di essi, per esempio il gruppo (96.20). Eliminiamo da esso con un procedimento usuale la quantità H_+. Trascurando i termini contenenti g^2, otteniamo

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2} + \frac{2ig}{c^2}\frac{\partial^3 E_+}{\partial t^2 \partial z}$$

ed un'equazione analoga per H_+. Per un'onda monocromatica piana $E_+ = C \exp i(\omega t - kz)$, la derivazione rispetto a z è equivalente alla moltiplicazione per $-ik$. Di conseguenza,

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2} + \frac{2gk}{c^2}\frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}.$$

Qui nell'ultimo termine al posto di k si può sostituire il numero d'onda nell'approssimazione di ordine zero, cioè $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$, il che conduce

all'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} = \frac{1}{v_+^2} \frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}, \qquad (96.22)$$

dove

$$v_+ = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{[1 + 2g\omega/c\sqrt{\varepsilon}]^{1/2}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{g\omega}{\varepsilon},$$

o

$$v_+ = \frac{c}{n} - \frac{g\omega}{n^2}, \qquad (96.23)$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo. Analogamente, per l'onda polarizzata circolarmente sinistra si ha

$$v_- = \frac{c}{n} + \frac{g\omega}{n^2}. \qquad (96.24)$$

Le velocità v_+ e v_- sono diverse. Perciò deve esistere una *birifrangenza circolare* e, quindi, anche una *rotazione del piano di polarizzazione*.

Verifichiamo che in ogni onda piana polarizzata circolarmente i vettori elettrico e magnetico siano reciprocamente perpendicolari. Per farlo è sufficiente effettuare la sostituzione $\partial/\partial t \to i\omega$ e $\partial/\partial z \to -ik$ nelle equazioni (96.20). La prima equazione diventa allora

$$\frac{\omega}{c} H_+ = i\left(k - \frac{g\omega^2}{c}\right) E_+ .$$

Si vede di qui che il rapporto E_+/H_+ è *puramente immaginario* e ciò equivale ad affermare che i vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ dell'onda considerata sono reciprocamente perpendicolari.

7. Se il mezzo possiede un *centro di simmetria*, lo sviluppo (96.9) del tensore $\varepsilon_{jl}(\omega, \boldsymbol{k})$ non può contenere termini lineari in $\boldsymbol{k}$. In questo caso la dispersione spaziale può essere dovuta ai termini quadratici. Questo tipo di dispersione determina la debole dipendenza dell'assorbimento dei cristalli cubici di Cu_2O dalla polarizzazione della luce (Gross e Kaplianski, 1960), nonché la debole anisotropia dell'indice di rifrazione dei cristalli cubici di silicio (Pasternak e Védam, 1971). Questi effetti sono molto deboli poiché essi sono determinati dal quadrato $(a/\lambda)^2$, cioè da una quantità dell'ordine di 10^{-6}-10^{-5} (a è la dimensione della molecola o la costante del reticolo cristallino). Esistono anche altri effetti di dispersione spaziale che non considereremo qui.

§ 97. *Fluttuazioni termiche*

In questo paragrafo ausiliario presentiamo brevi nozioni concernenti le fluttuazioni termiche, necessarie per l'esposizione delle questioni della diffusione molecolare della luce.

1. Sia f una grandezza fluttuante arbitraria. Si dice *fluttuazione* della grandezza f lo scarto $\Delta f = f - \bar{f}$ tra il suo valore istantaneo ed il suo valore medio. Generalmente si utilizza il *valore quadratico medio della fluttuazione*, cioè la quantità $\overline{(\Delta f)^2}$. La radice quadrata di questa quantità $\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}$ è la *fluttuazione quadratica media*; il suo rapporto al valore medio $\bar{f}$, cioè $\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}/\bar{f}$ è la *fluttuazione quadratica media relativa*.

Eseguendo la media dell'espressione $(\Delta f)^2 = (f - \bar{f})^2 = f^2 - 2f\bar{f} + (\bar{f})^2$, otteniamo

$$\overline{(\Delta f)^2} = \overline{f^2} - \overline{2f\bar{f}} + (\bar{f})^2.$$

Visto che $\bar{f}$ è una quantità costante, si ha $\overline{f\bar{f}} = \bar{f}\,\bar{f} = (\bar{f})^2$. Di conseguenza,

$$\overline{(\Delta f)^2} = \overline{f^2} - (\bar{f})^2. \tag{97.1}$$

Facciamo ora la media del prodotto di due grandezze fluttuanti:

$$fg = (\bar{f} + \Delta f)(\bar{g} + \Delta g) = \bar{f}\bar{g} + \bar{g}\,\Delta f + \bar{f}\,\Delta g + \Delta f\,\Delta g.$$

Visto che $\bar{f}$ e $\bar{g}$ sono quantità costanti e $\overline{\Delta f} = \overline{\Delta g} = 0$, si ha

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{\Delta f\,\Delta g}. \tag{97.2}$$

Ponendo $f = g$, si ottiene la formula (97.1).

Le grandezze f e g sono dette *statisticamente indipendenti* se $\overline{\Delta f\,\Delta g} = 0$. Per queste grandezze si ha

$$\overline{fg} = \bar{f}\,\bar{g}. \tag{97.3}$$

2. Consideriamo ora un sistema fisico arbitrario composto di N parti indipendenti ed identiche. Un esempio di sistema di questo tipo è dato da un gas perfetto le cui parti costituenti sono le singole molecole. Sia f_i una *grandezza additiva* arbitraria caratterizzante l'i-esimo sottosistema, per esempio l'energia cinetica dell'i-esima molecola. In virtù dell'additività postulata la corrispondente grandezza di tutto il sistema sarà allora $F = \sum f_i$. Esprimiamo il valore quadratico medio delle fluttuazioni della grandezza F in funzione del valore quadratico medio della grandezza f_i. Si ha evidentemente $\bar{F} = \sum \bar{f}_i = N\bar{f}$, dove si è omesso l'indice i, poiché si suppone che tutte le parti componenti il sistema siano identiche. D'altra parte,

$$F^2 = \left(\sum f_i\right)^2 = \sum f_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum f_i f_j.$$

Essendo queste parti indipendenti, si ha $\overline{f_i f_j} = \bar{f}_i \bar{f}_j = (\bar{f})^2$ e di conseguenza

$$\overline{F^2} = N\overline{f^2} + N(N-1)(\bar{f})^2.$$

Sostituendo questi valori nella (97.1), si ottiene

$$\overline{(\Delta F)^2} = \overline{F^2} - (\bar{F})^2 = N(\overline{f^2} - \bar{f}^2). \tag{97.4}$$

Conformemente alla (97.1) ne segue che

$$\frac{\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}}}{\bar{F}} = \frac{\sqrt{N}\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}}{N\bar{f}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}}{\bar{f}}. \tag{97.5}$$

Dunque, la fluttuazione relativa della grandezza F è inversamente proporzionale alla radice quadrata di N. Se N è grande, le fluttuazioni sono trascurabili. Questo risultato è valido anche per grandezze non additive. *Esso determina la validità delle considerazioni termodinamiche per i sistemi macroscopici.*

3. Applichiamo la formula (97.4) al calcolo delle fluttuazioni del numero di molecole contenute in un volume dato V di gas perfetto. Supponiamo che in un grande recipiente chiuso di volume V, in assenza di campi di forza, siano contenute N molecole di gas perfetto. Dividiamo il volume V in $z = V/v$ elementi di volume v_i identici, ciascuno di volume v. Se n_i è il numero di molecole nell'elemento di volume v_i e N nel grande volume V, si ha $N = \sum n_i$. Il numero medio $\overline{n_i}$ di molecole contenute in v_i è $\overline{n_i} = \overline{n} = Nv/V$, cioè lo stesso in tutti gli elementi di volume. Rappresentiamolo nella forma $\overline{n} = Np$, dove $p = v/V$ è la probabilità di presenza di una molecola in un elemento di volume v. Prendiamo ora in qualità di f_i i seguenti valori: $f_i = 1$, se l'i-esima molecola si trova all'interno di un elemento di volume v, e $f_i = 0$ se essa si trova nel volume restante $V - v$. Il numero n di molecole contenute in un elemento di volume v può essere allora rappresentato nella forma $n = \sum f_i$, supponendo che la sommatoria sia estesa a tutte le N molecole del volume V. È evidente che $f_i = f_i^2 = f_i^3 = \ldots$, e di conseguenza $\overline{f_i} = \overline{f_i^2} = \overline{f_i^3} = \ldots = p$. Ne segue che secondo la formula (97.1), si ha

$$\overline{\Delta f_i^2} = \overline{f_i^2} - (\overline{f_i})^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

E siccome per un gas perfetto le quantità $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sono statisticamente indipendenti, la formula (97.4) dà

$$\overline{\Delta n^2} = Np(1 - p) = (1 - p)\overline{n}. \qquad (97.6)$$

Se il volume V è infinitamente grande, si ha $p \to 0$ e

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{n}. \qquad (97.7)$$

Otteniamo di qui la fluttuazione relativa della densità di un gas perfetto

$$\sqrt{\overline{\Delta \rho^2}}/\overline{\rho} = 1/\sqrt{\overline{n}}. \qquad (97.8)$$

4. Un procedimento più generale di calcolo delle fluttuazioni di densità applicabile anche ai liquidi ed ai corpi solidi è basato sul *teorema dell'equipartizione dell'energia cinetica tra i gradi di libertà.* Consideriamo una piccola parte di un liquido o di un gas circondata dallo stesso mezzo liquido o gassoso la cui temperatura T sia mantenuta costante (per mezzo di un termostato). Per semplificare i calcoli e renderli più evidenti supponiamo che questa piccola parte di liquido o di gas sia contenuta in un cilindro munito di un pistone. Le pareti del cilindro conducono perfettamente il calore ed il pistone si sposta in questo cilindro senza attrito. La presenza delle pareti del cilindro e del pistone non ostacolerà allora lo scambio d'energia e lo stabilizzarsi delle pressioni tra la sostanza che si trova nel cilindro ed il termostato. In seguito all'agitazione termica il pistone eseguirà moti browniani. Applichiamo al pistone il teorema dell'equipartizione dell'energia cinetica tra i gradi di libertà.

Il pistone può essere assimilato ad un oscillatore armonico che effettua vibrazioni termiche. Il valore medio della sua energia potenziale quando esso si sposta di x dalla posizione d'equilibrio, $x = 0$, è uguale a $1/2\varkappa\overline{x^2} = 1/2kT$, dove $\varkappa$ è il coefficiente d'elasticità corrispondente a questo spostamento. Se S è l'area del pistone e ΔV la variazione di volume del sistema, si ha $\Delta V = Sx$. Di conseguenza, $\overline{(\Delta V)^2} = S^2\overline{x^2} = S^2kT/\varkappa$. La forza che fa ritornare il pistone nello stato d'equilibrio è $F = S\dfrac{\partial P}{\partial x}x$, dove P è la pressione del gas o del liquido. Ne segue che $\varkappa = -S\partial P/\partial x = -S^2\partial P/\partial V$. Si ottiene infine

$$(\overline{\Delta V^2})_T = -\frac{kT}{(\partial P/\partial V)_T} = -kT(\partial V/\partial P)_T. \qquad (97.9)$$

L'indice T indica che nella dimostrazione la temperatura del mezzo (del termostato) è mantenuta *costante*. Se la sostanza all'interno del volume V fosse adiabaticamente isolata, si dovrebbe sostituire T con S (entropia costante), cioè

$$(\overline{\Delta V^2})_S = -kT(\partial V/\partial P)_S. \tag{97.10}$$

Le formule (97.9) e (97.10) esprimono le fluttuazioni del volume di una *stessa massa di sostanza* che si trova in equilibrio termodinamico con l'ambiente. Per un gas perfetto a temperatura costante PV = costante, di modo che $(\partial V/\partial P)_T = -V/P$. Dato che $PV = nkT$, dove n è il numero di molecole contenute nel volume V, si ottiene dalla formula (97.9) $\overline{(\Delta V)^2} = V^2/n$. Supponiamo ora che il volume V sia dato e che il numero di molecole contenute in esso varii a causa di fluttuazioni termiche. Se il volume V aumenta di ΔV, il numero di molecole contenute nel volume iniziale V diminuisce di $\Delta n = n\Delta V/V$. Ne segue che

$$\overline{(\Delta n)^2} = (n/V)^2\,\overline{(\Delta V)^2} = n = \bar{n},$$

il che coincide con il risultato precedente (97.7). Nel risultato finale si può trascurare la differenza tra n e $\bar{n}$, come abbiamo fatto.

5. Passiamo ora al calcolo delle *fluttuazioni dell'energia*. Per meglio far comprendere il metodo, cominciamo dal calcolo delle fluttuazioni dell'energia cinetica $\mathscr{E}$ di una molecola di un gas perfetto monoatomico. Secondo la legge di ripartizione delle velocità di Maxwell

$$\bar{\mathscr{E}} = \frac{1}{Z}\int \mathscr{E} e^{-\alpha\mathscr{E}}\,d\Gamma, \tag{97.11}$$

dove $\alpha = 1/(kT)$, $d\Gamma$ è l'elemento di volume dello spazio delle velocità e Z è difinito dalla condizione di normalizzazione:

$$Z = \int e^{-\alpha\mathscr{E}}\,d\Gamma. \tag{97.12}$$

Derivando la (97.12) rispetto al parametro α, otteniamo

$$\frac{dZ}{d\alpha} = -\int \mathscr{E} e^{-\alpha\mathscr{E}}\,d\Gamma,$$

e la formula (97.11) si trasforma in

$$\bar{\mathscr{E}} = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\alpha}. \tag{97.13}$$

Ne segue che

$$\frac{d\bar{\mathscr{E}}}{d\alpha} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{d\alpha^2} + \frac{1}{Z^2}\left(\frac{dZ}{d\alpha^2}\right)^2 = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{d\alpha^2} + \bar{\mathscr{E}}^2$$

e analogamente

$$\overline{\mathscr{E}^2} = \frac{1}{Z}\int \mathscr{E}^2 e^{-\alpha\mathscr{E}}\,d\Gamma = \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{d\alpha^2}. \tag{97.14}$$

Confrontando le due ultime formule, otteniamo

$$\overline{(\Delta\mathscr{E})^2} = \overline{\mathscr{E}^2} - (\bar{\mathscr{E}})^2 = -\frac{d\bar{\mathscr{E}}}{d\alpha},$$

o, dopo la sostituzione del valore del parametro $\alpha = 1/(kT)$,

$$\overline{(\Delta\mathscr{E})^2} = kT^2\frac{d\bar{\mathscr{E}}}{dT}. \tag{97.15}$$

Visto che per un gas perfetto monoatomico $\bar{\mathscr{E}} = 3/2kT$, si ha

$$\overline{(\Delta \mathscr{E})^2} = \frac{3}{2}(kT)^2. \tag{97.16}$$

6. Il metodo di calcolo di $\overline{(\Delta \mathscr{E})^2}$ può essere applicato praticamente senza cambiamenti al calcolo di casi più complicati ed importanti. Consideriamo, per esempio, una piccola porzione (sottosistema) di un mezzo isotropo (liquido o gassoso) che è in equilibrio statistico con tutto il mezzo, la cui temperatura T è mantenuta costante. Rispetto a questo sottosistema il mezzo funge da *termostato*. In conseguenza dello scambio d'energia tra il termostato ed il sottosistema, l'energia di quest'ultimo subirà fluttuazioni continue. Le variazioni disordinate dell'energia del sottosistema obbediscono ad una legge statistica analoga alla legge maxwelliana della ripartizione dell'energia cinetica tra le molecole. Anche il valore medio dell'energia del sottosistema sarà espresso dalla formula (97.13), dove α conserva il suo significato, ma l'integrazione della (97.12) è effettuata sullo spazio multidimensionale delle coordinate e degli impulsi del sottosistema. Quest'è l'unica differenza del caso considerato dal precedente, ma essa non esercita alcun'influenza sui calcoli ulteriori, e perciò il risultato finale (97.15) è applicabile senza alcuna modifica al sottosistema considerato.

La formula (97.15) resta valida anche nella statistica quantistica. Per convincersene, è sufficiente sostituire l'integrale (97.12) con la somma

$$Z = \sum g_i \exp(-\alpha \mathscr{E}_i),$$

dove $\mathscr{E}_i$ è l'energia dei livelli quantici del sottosistema e g_i la molteplicità di questi livelli. La sommatoria è estesa a tutti gli stati quantici del sottosistema (cfr. il vol. II, § 85).

Nel caso di un sottosistema macroscopico il cui volume è mantenuto costante, $\bar{\mathscr{E}}$ rappresenta l'*energia interna del sottosistema* e $d\bar{\mathscr{E}}/dT$ è la sua *capacità termica* C_V a volume costante. Dalla formula (97.15) si ottiene allora

$$(\overline{\Delta \mathscr{E}^2})_V = kT^2 C_V. \tag{97.17}$$

L'indice V nel primo membro indica che $(\overline{\Delta \mathscr{E}^2})_V$ è la fluttuazione quadratica media dell'energia del sottosistema quando il suo volume V è mantenuto costante.

7. Consideriamo ora le *fluttuazioni dell'entalpia I* del sottosistema. Per farlo utilizziamo il seguente artificio. Supponiamo che il sottosistema sia chiuso in un involucro a pareti mobili perfettamente conduttrici, di modo che il volume del sottosistema non sia costante. Supponiamo inoltre che l'involucro sia soggetto all'azione delle forze esterne che mantengono costante la pressione esterna P. Queste forze aumentano di PV l'energia potenziale del sottosistema. Se con $\mathscr{E}$ indichiamo la stessa energia del caso precedente, tenendo conto dell'energia potenziale supplementare PV, il valore medio dell'energia totale del sottosistema sarà uguale a $\bar{\mathscr{E}} + P\bar{V}$. Ma quest'è l'entalpia del sottosistema I. Tutte le considerazioni precedenti si possono ripetere senza modifiche, sostituendo $\mathscr{E}$ con $\mathscr{E} + PV$. Al posto della formula (97.15) si ottiene

$$\overline{(\Delta I^2)}_P = kT^2 \frac{dI}{dT}. \tag{97.18}$$

Ma per P = costante la derivata dI/dT è la capacità termica C_P del sottosistema a pressione costante, e quindi

$$\overline{(\Delta I^2)}_P = kT^2 C_P. \tag{97.19}$$

8. Applichiamo ora il metodo termodinamico di calcolo delle fluttuazioni, esposto sopra, ad una *qualsiasi grandezza* caratterizzante le proprietà macroscopiche dei sottosistemi. Consideriamo qui i soli corpi isotropi per i quali qualsiasi grandezza termodinamica, allo stato d'equilibrio termodinamico, è una funzione di due altre grandezze termodinamiche che possono essere considerate *variabili indipendenti*. Benché le grandezze termodinamiche dei sottosi-

stemi macroscopici subiscano fluttuazioni, i loro stati istantanei sono *praticamente in equilibrio* se il sottosistema è piccolo. Visto che queste grandezze dipendono anche da due variabili indipendenti, il problema si riduce al calcolo delle fluttuazioni termiche di queste variabili indipendenti. Nel risultato finale, che dà il valore quadratico medio di una fluttuazione data, si deve indicare quale delle grandezze, scelte per caratterizzare lo stato del sottosistema, è *mantenuta costante*, altrimenti il risultato stesso sarà indeterminato e quindi senza senso.

Alcuni esempi aiuteranno a comprendere il principio di calcolo delle fluttuazioni delle grandezze fisiche.

Cominciamo con il calcolo delle fluttuazioni della temperatura di un sottosistema macroscopico che supponiamo essere in contatto termico con un termostato. Considerando la temperatura del sottosistema come funzione delle variabili indipendenti V ed $\mathscr{E}$, scriviamo

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{\mathscr{E}} \Delta V + \left(\frac{\partial T}{\partial \mathscr{E}}\right)_V \Delta \mathscr{E}.$$

Visto che V ed $\mathscr{E}$ sono indipendenti, si ha $\overline{\Delta V \cdot \Delta \mathscr{E}} = 0$ e di conseguenza

$$\overline{(\Delta T)^2} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{\mathscr{E}}^2 \overline{(\Delta V)^2} + \left(\frac{\partial T}{\partial \mathscr{E}}\right)_V^2 \overline{(\Delta \mathscr{E})^2}.$$

A volume costante la derivata $(\partial \mathscr{E}/\partial T)_V$ è la capacità termica C_V del sottosistema, di modo che la formula (97.17) ci dà

$$(\overline{\Delta T^2})_V = \frac{1}{C_V^2} (\overline{\Delta \mathscr{E}^2})_V = \frac{kT^2}{C_V}. \tag{97.20}$$

Calcoliamo ora le fluttuazioni dell'entropia S del sottosistema. Prendiamo V ed $\mathscr{E}$ come variabili indipendenti. Ragionando come nel caso precedente, scriviamo

$$\overline{\Delta V \cdot \Delta \mathscr{E}} = 0, \quad (\overline{\Delta S^2})_V = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathscr{E}}\right)_V^2 (\overline{\Delta \mathscr{E}^2})_V.$$

Visto che $\partial S/\partial \mathscr{E} = 1/T$, tenendo conto della (97.17), si ha

$$(\overline{\Delta S^2})_V = kC_V. \tag{97.21}$$

Se come variabili indipendenti avessimo scelto P ed I, avremmo ottenuto

$$(\overline{\Delta S^2})_P = kC_P. \tag{97.22}$$

Consideriamo ora le fluttuazioni della pressione P. Siano V e T le variabili indipendenti. Si ha allora

$$\overline{\Delta V \cdot \Delta T} = 0, \quad (\overline{\Delta P^2})_T = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T^2 (\overline{\Delta V^2})_T,$$

o in base alla formula (97.9)

$$(\overline{\Delta P^2})_T = -kT \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T. \tag{97.23}$$

Prendendo P e S come variabili indipendenti, si ottiene

$$(\overline{\Delta P^2})_S = -kT \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = -\gamma kT \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T, \tag{97.24}$$

dove $\gamma = C_P/C_V$. Per ottenere la (97.24) è stata utilizzata la relazione termodinamica $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \Big/ \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \gamma$ (cfr. il vol. II, § 47).

Calcoliamo infine le *fluttuazioni della densità* ρ di una sostanza contenuta in un volume V. Il problema si riduce alla trasformazione della formula (97.9). Osserviamo prima di tutto che la quantità $V\partial P/\partial V$ non dipende da V, il che permette di sostituire V con il volume specifico v. Si ottiene allora

$$(\overline{\Delta V^2})_T = -\frac{VkT}{v(\partial P/\partial v)_T}.$$

Poiché la massa $V\rho$ contenuta nel volume V è costante, si ha $V\Delta\rho + \rho\Delta V = 0$. Di conseguenza $(\Delta\rho)^2 = \left(\frac{\rho}{V}\right)^2(\Delta V)^2$, e

$$V(\overline{\Delta\rho^2})_T = -\frac{\rho^2 kT}{v(\partial P/\partial v)_T}. \tag{97.25}$$

Più piccolo è il volume V, più grandi sono le fluttuazioni relative della densità.

§ 98. *Diffusione della luce*

1. In un mezzo omogeneo e trasparente un'onda piana si propaga solo nel senso diretto senza essere diffusa lateralmente. (Trascuriamo la diffrazione ammettendo che la larghezza del fronte d'onda sia sufficientemente grande e, quindi, l'angolo di divergenza per diffrazione sia piccolo.) Supponiamo ora di perturbare l'omogeneità ottica del mezzo, per esempio con la presenza di una moltitudine di fini particelle di una sostanza estranea, ripartite disordinatamente nel mezzo. Come esempi possiamo citare un'aria polverosa, la nebbia, il fumo, le emulsioni e le sospensioni contenenti in sospensione particelle estranee. L'indice di rifrazione di questi mezzi non omogenei presenterà allora variazioni spaziali molto irregolari, ma il suo valore medio in ogni piccolo volume contenente ancora un numero molto grande di eterogeneità macroscopiche è dappertutto lo stesso nel mezzo. Tale mezzo è detto *otticamente torbido*. In tutti i mezzi otticamente torbidi la luce si propaga non soltanto nel senso diretto, ma viene *diffusa in tutte le direzioni*. La diffusione della luce nei mezzi torbidi sulle particelle di una sostanza estranea fu sperimentalmente esaminata per la prima volta da Tyndall (1820-1893) nel 1869, e perciò questo fenomeno si dice *effetto Tyndall*. La teoria dell'effetto fu elaborata da Rayleigh.

2. In un mezzo isotropo non omogeneo ed immobile la propagazione della luce è descritta dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 0, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \end{aligned} \tag{98.1}$$

dove la permettività dielettrica ε è funzione delle coordinate. Isoliamo da

essa una parte costante ε_0, ponendo $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon$. Nel problema della diffusione della luce è interessante solo il caso in cui $\delta\varepsilon$ è piccolo rispetto a ε_0, ma per il momento non introduciamo questa limitazione. Per di più, si può scegliere arbitrariamente il valore di ε_0, poiché il risultato di un calcolo esatto non può dipendere dal valore di ε_0. Tuttavia è comodo e più conforme alla realtà intendere per ε_0 la permettività dielettrica del mezzo dal quale siano state eliminate le particelle della sostanza estranea.

Rappresentiamo il campo elettromagnetico nella forma $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}'$, dove $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ soddisfano le equazioni di Maxwell in un mezzo omogeneo

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_0 = \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}_0}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}_0}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H}_0 = 0.$$

Nel problema della diffusione della luce questa è l'*onda incidente* che si propagherebbe nel mezzo se quest'ultimo non contenesse inomogeneità ottiche, mentre $\boldsymbol{E}'$ e $\boldsymbol{H}'$ è il campo della *luce diffusa*. Sottraendo le equazioni precedenti dalla (98.1), otteniamo

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{\delta\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}') = -\operatorname{div}(\delta\varepsilon\, \boldsymbol{E}),\\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E}' - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H}' = 0. \end{aligned} \tag{98.2}$$

Dunque, per il campo $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ abbiamo ricavato le stesse equazioni di Maxwell che sono state ottenute per un mezzo omogeneo di permettività dielettrica ε_0. Le prime due di queste equazioni contengono secondi membri che si possono considerare come *sorgenti supplementari di onde elettromagnetiche.* Se introduciamo la notazione

$$\delta \boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}, \tag{98.3}$$

queste due equazioni si trasformano in

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\delta \boldsymbol{P}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}') = -4\pi \operatorname{div}(\delta \boldsymbol{P}). \tag{98.4}$$

Le equazioni (98.4) mostrano che nel mezzo appare una *polarizzazione supplementare* $\delta \boldsymbol{P}$ definita dall'espressione (98.3), di modo che ogni elemento di volume δV del mezzo acquista un *momento dipolare supplementare* $\delta V \cdot \delta \boldsymbol{P}$. Variando nel tempo, questo momento dipolare emette onde elettromagnetiche come un *dipolo oscillante di Hertz.* Questa è la luce diffusa dall'elemento di volume δV.

3. Supponiamo ora che la non omogeneità ottica sia dovuta a piccoli pallini di raggio a, ripartiti in modo disordinato nel volume occupato dal mezzo. Supponiamo che la distanza media tra i pallini sia grande rispetto ad a, e che a sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda. Calcolando il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ all'interno di un pallino si può allora porre che il campo esterno $\boldsymbol{E}_0$ dell'onda luminosa sia omogeneo. Come abbiamo dimostrato nell'elettrostatica (cfr. il vol. III, § 16), è omogeneo anche il campo $\boldsymbol{E}$ ed è definito dall'espressione

$$\boldsymbol{E} = \frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2}\boldsymbol{E}_0 = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0, \tag{98.5}$$

dove ε è la permettività dielettrica dei pallini ed ε_0 quella dell'ambiente. Secondo la formula (98.3), la polarizzazione supplementare è diversa da zero soltanto all'interno dei pallini, dove essa è uguale a

$$\delta\boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi}\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi}\,\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0,$$

ed il momento dipolare supplementare di un pallino è

$$\boldsymbol{p} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}(\varepsilon - \varepsilon_0)a^3\boldsymbol{E}_0. \tag{98.6}$$

Supponiamo che l'onda incidente sia *polarizzata linearmente*. In questo caso i vettori $\boldsymbol{p}$ ed $\boldsymbol{E}$ sono sempre paralleli ad una stessa direzione fissa. Il campo elettrico del dipolo $\boldsymbol{p}$ a grande distanza r da esso (nella zona d'onda) è dato dall'espressione

$$E_1 = \frac{\sin\vartheta}{c^2 r}[\ddot{p}]_{t-r/v} = -\frac{\omega^2\sin\vartheta}{c^2 r}[p]_{t-r/v}, \tag{98.7}$$

dove $v = c/\sqrt{\varepsilon} = c/n$ è la velocità della luce nel mezzo considerato e ϑ l'angolo tra l'asse del dipolo $\boldsymbol{p}$ e la direzione della luce diffusa (cfr. il vol. III, § 141). *La luce diffusa è polarizzata linearmente*, ed inoltre il vettore elettrico appartiene al piano passante per l'asse del dipolo $\boldsymbol{p}$ e la direzione di radiazione. *Per intensità della luce intendiamo qui ed in seguito il valore numerico del vettore di Poynting mediato sul tempo.* Secondo l'elettrodinamica (cfr. il vol. III, § 141), l'intensità della luce diffusa da un pallino è

$$I_1 = \frac{\sin^2\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\overline{\ddot{p}^2} = \frac{\omega^4\sin^2\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\overline{p^2}. \tag{98.8}$$

L'intensità dell'onda diretta è uguale a

$$I_0 = \frac{c}{4\pi}\overline{E_0 H_0} = \frac{v}{4\pi}\varepsilon_0\overline{E_0^2}. \tag{98.9}$$

Utilizzando l'espressione (98.6), si ottiene

$$I_1 = 9\varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\omega^4 a^6 \sin^2 \vartheta}{c^4 r^2} I_0, \tag{98.10}$$

o

$$I_1 = 9\varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\pi^2 V_1^2}{\lambda^4} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} I_0, \tag{98.11}$$

dove λ è la lunghezza d'onda nel vuoto e $V_1 = 4/3\pi a^3$ è il volume del pallino. L'energia $\mathscr{P}_1$ che è diffusa dal pallino nell'unità di tempo in tutte le direzioni si ottiene integrando la (98.11) su una sfera di raggio r. Prendendo come elemento di superficie $2\pi r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta$, si ottiene

$$\mathscr{P}_1 = 24\pi^3 \varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{V_1^2}{\lambda^4} I_0. \tag{98.12}$$

Supponiamo ora che la luce incidente sia *naturale*. La direzione della sua propagazione viene scelta come asse Z. Supponiamo inoltre che la luce diffusa si osservi nella direzione OA che forma un angolo θ con l'asse Z. L'angolo θ si dice *angolo di diffusione* (fig. 321). Orientiamo l'asse X perpendicolarmente ad OA e OZ. Visto che $\boldsymbol{p}$ ed $\boldsymbol{E}_0$ sono collineari, il vettore $\boldsymbol{p}$
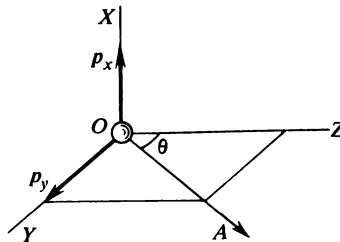
Fig. 321

è parallelo al piano XY. Scomponiamo il vettore $\boldsymbol{p}$ secondo gli assi X ed Y. Le intensità delle radiazioni emesse dai momenti dipolari p_x e p_y sono date dalla formula (98.8), dove si pone prima $\vartheta = \pi/2$ e poi $\vartheta = \pi/2 - \theta$. Dato che la luce incidente è naturale, queste radiazioni *non sono coerenti*, di modo che per trovare I_1 si devono addizionare le loro intensità. La formula (98.8) si trasforma allora in

$$I_1 = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2} (\overline{p_x^2} + \overline{p_y^2} \cos^2 \theta) = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \overline{p^2},$$

poiché per una luce naturale $\overline{p_x^2} = \overline{p_y^2} = 1/2\overline{p^2}$. Al posto della formula

(98.11) si ottiene allora

$$I_1 = 9\varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\pi^2 V_1^2}{\lambda^4} \frac{1 + \cos^2\theta}{2r^2} I_0. \tag{98.13}$$

Evidentemente, la formula (98.12) non cambia.

La luce diffusa è ora polarizzata parzialmente. *La polarizzazione lineare totale sarà osservata soltanto quando la linea d'osservazione OA sia perpendicolare alla direzione di propagazione della luce incidente*, poiché in questo caso il momento dipolare p_y non irradia.

Calcoliamo ora l'intensità I della luce diffusa da un volume V contenente un gran numero di pallini. Il loro numero medio in questo volume è uguale a NV dove N è il numero medio di pallini nell'unità di volume. Visto che le distanze tra i pallini sono grandi rispetto a α ed i pallini sono distribuiti disordinatamente nel volume V, per trovare I si devono addizionare le intensità diffuse da ciascun pallino. Supponiamo che la distanza dal volume V al punto d'osservazione sia grande rispetto alle dimensioni lineari del volume V stesso. Nella formula (98.13) si possono allora considerare uguali tutte le distanze r e scrivere

$$I = 9\varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \pi^2 \frac{V_1^2}{\lambda^4} \frac{1 + \cos^2\theta}{2r^2} NVI_0. \tag{98.14}$$

4. Calcoliamo la diminuzione dell'intensità I_0 della luce incidente dovuta alla diffusione. Isoliamo nel mezzo un cilindro arbitrario la cui sezione trasversale abbia area unitaria e le cui generatrici siano parallele all'asse Z. Tagliamo in questo cilindro un piccolo cilindro infinitamente corto delimitato dai piani z = costante e $z + dz$ = costante. Attraverso la base inferiore di questo piccolo cilindro penetra per secondo l'energia $I_0(z)$ ed attraverso la base superiore esce l'energia $I_0(z + dz)$. La differenza di queste energie $-dI_0$ è l'energia diffusa $\mathscr{P}_1 N dz$. Uguagliando entrambe le espressioni, si ottiene

$$dI_0 = -\gamma I_0 dz, \tag{98.15}$$

dove, conformemente alla formula (98.12)

$$\gamma = 24\pi^3\varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{NV_1^2}{\lambda^4}. \tag{98.16}$$

Dunque, in seguito alla diffusione, l'intensità dell'onda incidente decresce secondo la legge esponenziale:

$$I_0 = \text{costante}\cdot e^{-\gamma z}. \tag{98.17}$$

La quantità γ si dice *coefficiente di diffusione*.

5. Secondo la formula (98.14), ottenuta per la prima volta da Rayleigh, l'intensità della luce diffusa è inversamente proporzionale alla *quarta po-*

tenza della lunghezza d'onda. Questo risultato è detto *legge di Rayleigh*. Questa legge è valida per le particelle diffondenti le cui dimensioni lineari sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda.

La legge di Rayleigh fu qualitativamente confermata già dai primi studi sperimentali di Tyndall, che constatò che per diffusione la luce bianca diventava bluastra. In base a queste osservazioni Tyndall suggerì che il colore blu e la polarizzazione del cielo potessero essere dovuti alla diffusione della luce solare provocata da piccole particelle di polvere sempre presenti in quantità sufficiente nell'atmosfera terrestre.

La teoria quantitativa fu sviluppata da Rayleigh. Se la luce non fosse diffusa, il cielo sarebbe assolutamente nero. Su questo sfondo nero le stelle e gli altri corpi celesti parrebbero più brillanti e più netti. È esattamente ciò che vedono i cosmonauti dai veicoli spaziali. Invece, in presenza dell'atmosfera, una parte importante dei raggi solari diretti è diffusa in tutte le direzioni. Poiché la parte di luce diffusa è tanto più grande quanto più corta è la lunghezza d'onda, la luce diffusa è più ricca di onde corte, il che spiega il *colore blu del cielo*. Al levar ed al calar del Sole la luce solare diretta attraversa uno spesso strato di atmosfera ed una parte importante delle radiazioni di corta lunghezza d'onda risulta diffusa. Nella luce diretta che perviene fino alla superficie terrestre predominano le radiazioni rosse e per questa ragione al levar ed al calar il Sole pare rosso. La stessa è la spiegazione del *colore rosso dell'alba*.

A misura che aumenta l'altezza sopra la superficie terrestre, diminuisce il contenuto di polvere e di altre particelle estranee nell'atmosfera. Ci si potrebbe attendere che con ciò anche la proporzione di raggi blu nella luce diffusa debba diminuire. Ma le osservazioni negli osservatori di alta montagna mostrarono che la situazione era opposta. Più pura è l'aria e minore il contenuto di particelle estranee, più la luce del cielo contiene raggi blu e più grande è la sua polarizzazione. Partendo da queste constatazioni, Rayleigh concluse che la diffusione era qui dovuta non alle particelle estranee, ma alle *molecole d'aria*; tutti gli studi teorici e sperimentali confermarono questo punto di vista. Questa diffusione si dice *diffusione molecolare* o *diffusione di Rayleigh*. Ma la natura fisica della diffusione molecolare fu compresa soltanto nel 1908 da M. Smoluchowski (1872-1917). *La diffusione molecolare è provocata dalle fluttuazioni termiche dell'indice di rifrazione* che rendono il mezzo otticamente torbido. Una teoria della diffusione della luce nei liquidi e nei gas venne costruita su questa base da Einstein nel 1910. Questa teoria è applicabile nei casi in cui la lunghezza d'onda luminosa è tanto grande che il mezzo può essere diviso in elementi di volume piccoli rispetto al cubo della lunghezza d'onda e contenenti ancora un numero molto grande di molecole. A questi elementi di volume sono ancora applicabili le equazioni macroscopiche di Maxwell, senza che sia necessario tener esplicitamente conto della struttura molecolare delle sostanze. Le fluttuazioni dell'indice di rifrazione in questi elementi di volume giocano il

ruolo di *non omogeneità macroscopiche* che determinano la diffusione della luce, come fanno i pallini considerati sopra.

Il campo $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ della luce diffusa può essere, nel caso generale, calcolato per mezzo delle equazioni (98.2), dove ε_0 significa ora il valore medio della permettività dielettrica del mezzo e $\delta\varepsilon$ le fluttuazioni di ε_0. La soluzione si può trovare mediante il *metodo delle approssimazioni successive.* Nell'approssimazione di ordine zero nelle equazioni (98.2) si trascurano le non omogeneità del mezzo, cioè vengono trascurati i secondi membri di queste equazioni. Non si avrà luce diffusa $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ e quest'approssimazione fornirà soltanto l'onda incidente $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$. Per trovare l'approssimazione di ordine uno nei secondi membri della (98.2) sostituiamo il campo $\boldsymbol{E}$ con il suo valore $\boldsymbol{E}_0$ trovato nell'approssimazione di ordine zero. Risolvendo le equazioni ottenute, troviamo $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ e poi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ in prima approssimazione. Utilizzando la soluzione ottenuta, precisiamo i secondi membri della (98.2) e troviamo $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ in seconda approssimazione, ecc.

Praticamente è sufficiente limitarsi alla prima approssimazione, ponendo $\delta\boldsymbol{P} = \delta\varepsilon\boldsymbol{E}_0/(4\pi)$. Dividiamo il mezzo in volumi elementari $\delta_i V$, piccoli rispetto al cubo della lunghezza d'onda ma contenenti ancora un gran numero di molecole. Il momento dipolare supplementare di un volume elementare $\delta_i V$, dovuto alle fluttuazioni della permettività dielettrica è

$$\boldsymbol{p} = \frac{\delta_i\varepsilon \cdot \delta_i V}{4\pi}\boldsymbol{E}_0.$$

Quest'espressione differisce dalla (98.6) soltanto per il fattore di $\boldsymbol{E}_0$. Perciò, supponendo che la luce incidente sia naturale, per l'intensità media della luce diffusa dal volume elementare $\delta_i V$ si può subito scrivere

$$I_i = \frac{\pi^2}{\lambda^4}\frac{1 + \cos^2\theta}{2r^2} I_0(\delta_i V)^2\overline{(\delta_i\varepsilon)^2}. \qquad (98.18)$$

Il corrispondente campo elettrico è proporzionale a $\delta_i V$ ed a $\delta_i\varepsilon$.

6. Consideriamo ora la diffusione molecolare in un *gas perfetto.* In questo caso

$$\varepsilon_i = 1 + 4\pi\beta\frac{N_i}{\delta_i V},$$

dove β è la polarizzabilità della molecola e N_i il numero di molecole contenute nel volume elementare $\delta_i V$. Visto che il volume $\delta_i V$ è fisso nello spazio, cioè non fluttua, otteniamo dall'ultima formula $\delta_i V\,\delta\varepsilon_i = 4\pi\beta\delta N_i$, cioè la diffusione della luce è provocata dalle *fluttuazioni del numero di molecole* contenute nei volumi $\delta_i V$. Secondo la (97.7), $\overline{(\delta N_i)^2} = \overline{N}_i = N\delta_i V$, dove N è il numero di molecole contenute nell'unità di volume.

Quindi,

$$I_i = \frac{8\beta^2\pi^4}{\lambda^4}\frac{1 + \cos^2\theta}{r^2} I_0 N\delta_i V.$$

Per i gas $n^2 - 1 = 4\pi N\beta$, ed inoltre l'indice di rifrazione n è poco diverso dall'unità. Perciò al posto di questa formula si può scrivere $n - 1 =$ $= 2\pi N\beta$. Eliminando β, troviamo

$$\overline{I_i} = \frac{2\pi^2(n - 1)^2}{N\lambda^4}\frac{1 + \cos^2\theta}{r^4} I_0\delta_i V.$$

Per poter calcolare l'intensità I della luce diffusa da un volume finito V, osserviamo che i differenti volumi elementari $\delta_i V$ e $\delta_j V$ diffondono la luce in modo *incoerente*. Infatti, se prendiamo tutti i volumi elementari $\delta_i V$ uguali, i campi elettrici delle onde da essi diffuse saranno della forma $E_i =$ $= A\delta N_i$, dove il coefficiente A è lo stesso per tutti i volumi elementari $\delta_i V$. Il campo totale dell'onda diffusa è allora uguale a $\sum E_i$ e la sua intensità è

$$I \sim \overline{\left(\sum E_i\right)^2} = A^2 \overline{\sum_{i \neq j}\sum \delta N_i \delta N_j} + A^2 \overline{\sum (\delta N_i)^2}.$$

Ma nei gas perfetti le fluttuazioni dei numeri di molecole contenute nei diversi volumi elementari sono *indipendenti*. Perciò la doppia sommatoria della formula precedente diventa nulla il che dimostra la nostra asserzione. Quindi, per calcolare I si deve moltiplicare $\overline{I_i}$ per il numero di volumi elementari contenuti nel volume V, cioè per $V/\delta_i V$. Si trova allora

$$I = \frac{2\pi^2(n - 1)^2 V}{N\lambda^4}\frac{1 + \cos^2\theta}{r^2} I_0. \qquad (98.19)$$

Se la luce è polarizzata linearmente, il fattore $(1 + \cos^2\theta)/2$ deve essere sostituito con $\sin^2\vartheta$.

La formula (98.19) fu per la prima volta ottenuta nel 1899 da Rayleigh, che però non la giustificò sufficientemente. Rayleigh la stabilì ammettendo che la diffusione fosse prodotta dalle *singole molecole di gas* le quali si comportano in modo assolutamente analogo ai pallini indipendenti, che sono serviti nella deduzione della formula (98.14). Per calcolare l'intensità risultante della luce diffusa Rayleigh addizionava le intensità delle onde diffuse dalle molecole individuali, come se queste onde fossero incoerenti. Rayleigh supponeva che l'incoerenza fosse dovuta a moti termici delle molecole e non teneva esplicitamente conto delle fluttuazioni del numero di particelle contenute nei volumi elementari diffondenti.

Nel 1907 L.I. Mandelštam notò che se tutti i volumi elementari $\delta_i V$ (identici) fissi nello spazio contenessero lo stesso numero di molecole, le onde secondarie emesse da questi volumi sarebbero *coerenti indipendentemente dal fatto che le molecole in questi volumi siano fisse o mobili.*

Nell'addizionare le intensità dei campi di queste onde avrebbe luogo la loro *estinzione interferenziale* in tutte le direzioni, esclusa la direzione dell'onda incidente.

L'estinzione non sarà totale, poiché i numeri di molecole contenute nei volumi elementari *fluttuano* (Smoluchowski lo suggerì nel 1908). A causa di queste fluttuazioni le radiazioni emesse dai volumi elementari si possono scomporre in una parte coerente ed una parte incoerente. La parte coerente modifica la velocità di fase dell'onda incidente (cfr. il § 68). Le radiazioni non coerenti compaiono a causa delle fluttuazioni del numero di particelle. La diffusione della luce è legata a queste ultime. Solo grazie all'esistenza della relazione probabilistica (97.7), il risultato finale (98.19) nel caso dei gas perfetti è lo stesso, che si otterrebbe se le molecole diffondessero la luce in modo incoerente.

7. La formula (98.19) è in buon accordo con l'esperienza in tutti i casi in cui le molecole del gas possiedono una simmetria sferica, cioè sono *isotrope*. Tali sono, per esempio, le molecole dei gas rari. La prima conferma quantitativa di questa formula venne dallo studio della diffusione della luce nell'atmosfera terrestre (blu del cielo). Dopo aver misurato il coefficiente di diffusione si può calcolare, con l'aiuto della formula (98.19), il numero di Loschmidt N, cioè il numero di molecole d'aria per unità di volume. Il valore di N così calcolato concorda perfettamente con i valori determinati mediante altri metodi.

Se le molecole del gas sono *anisotrope*, per esempio CO_2, si osservano scarti dalla teoria esposta. Prima di tutto, se la luce incidente è polarizzata linearmente, la luce diffusa è polarizzata soltanto parzialmente e non totalmente, come esige la teoria. Questa *depolarizzazione della luce diffusa* è dovuta appunto all'anisotropia delle molecole. Poniamo che il vettore elettrico $\boldsymbol{E}_0$ dell'onda incidente sia parallelo all'asse X. Se la molecola fosse isotropa, il suo momento dipolare indotto $\boldsymbol{p} = \beta \boldsymbol{E}_0$ avrebbe la stessa direzione. La luce diffusa dalla molecola sarebbe polarizzata linearmente ed il piano delle vibrazioni passerebbe per l'asse del dipolo $\boldsymbol{p}$ e la linea d'osservazione. Ma se la molecola è anisotropa, i vettori $\boldsymbol{p}$ ed $\boldsymbol{E}$ non sono paralleli. Appariranno componenti del vettore $\boldsymbol{p}$ lungo gli assi Y e Z. Visto che l'orientamento spaziale della molecola varia in modo continuo e disordinato, a causa dei suoi moti termici, le polarizzabilità della molecola lungo gli assi coordinati X, Y e Z fluttuano ugualmente. Le componenti p_y e p_z producono onde diffuse la cui polarizzazione è differente da quella prodotta dalla componente p_x. Proprio ciò determina la depolarizzazione della luce diffusa.

Le fluttuazioni degli orientamenti spaziali delle molecole anisotrope provocano non soltanto la depolarizzazione, ma esercitano anche un'influenza sull'*intensità* della luce diffusa, ma non ci occuperemo di quest'aspetto della teoria.

8. Consideriamo ora la diffusione molecolare nei *gas non perfetti* e nei

liquidi che si trovano in stati lontani dai loro punti critici. Partiremo dalla formula (98.18). La permettività dielettrica ε è funzione della densità ρ e della temperatura T del mezzo. Visto che la sua variazione termica è debole, non ne terremo conto. Si avrà allora

$$\delta_i \varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\rho} \delta_i \rho,$$

dove $\delta_i \rho$ è la *fluttuazione della densità* nel volume $\delta_i V$. Ponendo $V = \delta_i V$ nella formula (97.25), possiamo scrivere

$$\delta_i V \overline{(\delta_i \rho)^2} = -\rho^2 \frac{kT}{v(\partial P/\partial v)_T}.$$

Di conseguenza, la formula (98.18) diventa

$$I_i = \frac{\pi^2}{\lambda^4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2r^2} I_0 \delta_i V \left(\rho \frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 \frac{kT}{(-v\, \partial P/\partial v)_T}.$$

Supponiamo ora che il volume diffondente V non sia piccolo. Nei gas e nei liquidi lontano dal punto critico le dimensioni lineari dei volumi elementari $\delta_i V$ si possono prendere piccole rispetto a λ, ma grandi rispetto al raggio d'azione delle forze molecolari (dell'ordine di 10^{-7} cm). In questo caso i differenti volumi elementari diffondono la luce in modo *incoerente*. Per calcolare l'intensità risultante della luce diffusa dal volume V si deve moltiplicare I_i per il numero di volumi elementari, cioè per $V/\delta_i V$. (Ammettiamo che i volumi elementari $\delta_i V$ siano uguali, il che non può influire sul risultato finale.) Si ottiene così

$$I = \frac{\pi^2}{\lambda^4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2r^2} V I_0 \left(\rho \frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 \frac{kT}{(-v\, \partial P/\partial v)_T}. \qquad (98.20)$$

Questa formula fu stabilita nel 1910 da Einstein e contiene la formula di Rayleigh come caso particolare.

Le fluttuazioni della densità diventano molto grandi quando ci si avvicina al *punto critico* della sostanza studiata, poiché in questo caso la derivata $\partial P/\partial v$ tende verso zero. Questo spiega la cosiddetta *opalescenza critica*, cioè la diffusione molto forte della luce che si osserva vicino al punto critico. Questo fenomeno era conosciuto molto prima dello sviluppo della teoria delle fluttuazioni dato da Smoluchowski ed Einstein, ma la sua origine rimase inspiegata fino all'apparizione delle opere di questi scienziati. Al punto critico la formula di Einstein conduce ad un valore infinito dell'intensità della luce diffusa, il che significa che nei dintorni del punto critico questa formula non è valida. La ragione consiste nel fatto che le fluttuazioni della densità nei volumi elementari $\delta_i V$ nei dintorni di un punto critico *non si possono più considerare statisticamente indipendenti.* Ornstein e Zernike generalizzarono la formula di Einstein alla diffusione della luce vi-

cino al punto critico. Visto che qui le dimensioni lineari delle non omogeneità che provocano la diffusione della luce non sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda λ, l'intensità della luce diffusa cessa di essere proporzionale alla quarta potenza della frequenza e cresce *più lentamente* con quest'ultima. Inoltre, la diffusione non è più simmetrica rispetto ad un piano perpendicolare ai raggi incidenti: *la luce è diffusa più fortemente in avanti che indietro.* Non possiamo però analizzare qui tutte queste questioni.

La formula di Einstein non tiene conto di tutte le cause di diffusione della luce; in particolare essa non tiene conto delle *fluttuazioni d'anisotropia* che si manifestano nei liquidi composti di molecole anisotrope. Tenendone conto, si trova che cresce l'intensità della luce diffusa e si spiega la sua depolarizzazione. Nel caso dei liquidi i corrispondenti calcoli teorici non sono tanto sicuri ed il loro accordo con i dati sperimentali è meno buono.

9. La diffusione molecolare della luce può essere provocata non soltanto dalle fluttuazioni della densità, ma anche da altre cause. Un esempio istruttivo è la *diffusione della luce nelle soluzioni.* In condizioni ordinarie le molecole di soluto sono tanto intimamente mescolate con le molecole di solvente che tutta la soluzione si comporta otticamente come un mezzo omogeneo quasi come il solvente puro. Le *fluttuazioni della concentrazione di soluto* nel solvente possono causare la diffusione della luce. In condizioni normali le fluttuazioni della concentrazione e la diffusione della luce dovuta ad esse sono piccole. Ma esiste un gran numero di combinazioni di sostanze che, al di sotto di una certa temperatura T_{cr} detta *temperatura critica di miscibilità*, sono soltanto parzialmente solubili l'una nell'altra, ed al di sopra di questa temperatura sono miscibili in tutte le proporzioni (cfr. il vol. II, § 123). Alla temperatura critica di miscibilità, i due liquidi sono completamente miscibili solo in *proporzioni ponderali ben determinate.* Tale è, per esempio, una miscela contenente 20 parti in peso di solfuro di carbonio e 80 parti d'alcool metilico alla temperatura critica $T_{cr} = 40$ °C. Alla temperatura critica di miscibilità ci si devono aspettare grandi fluttuazioni di concentrazione, similmente a ciò che ha luogo per le fluttuazioni di densità in prossimità del punto critico. Infatti, alla temperatura critica di miscibilità si osserva una diffusione molto forte della luce analoga all'opalescenza critica.

10. Un secondo esempio è dato dalla *diffusione della luce alla superficie di separazione di due liquidi immiscibili* o *alla superficie libera di un liquido.* A causa dell'agitazione termica la superficie di un liquido non è mai perfettamente liscia, essa è sempre *irregolare.* Su queste irregolarità la luce subisce una diffrazione, cioè ha luogo una *diffusione molecolare superficiale.* Se l'altezza di queste irregolarità è piccola rispetto alla lunghezza d'onda, come si ha normalmente, l'ampiezza della luce diffusa è inversamente proporzionale alla *lunghezza d'onda* e la sua intensità è inversamente proporzionale al *quadrato della lunghezza d'onda.* La tensione superfi-

ciale tende a ridurre le rugosità prodotte dall'agitazione termica, e perciò la diffusione molecolare superficiale della luce è particolarmente forte all'interfaccia tra due liquidi immiscibili aventi coefficienti di tensione superficiale vicini.

11. La diffusione molecolare della luce nei cristalli fu osservata per la prima volta in modo certo da G.S. Landsberg negli anni 1926-1927. La difficoltà di questi studi risiedeva non soltanto nel fatto che l'intensità della luce diffusa nei cristalli di buona qualità doveva essere, come stima preliminare, all'incirca il 10^{-8} dell'intensità della luce incidente. D'altra parte, non si sapeva ancora se potessero esistere cristalli nei quali la maggior parte della luce diffusa fosse composta da luce dovuta alla *diffusione molecolare* e non alla luce parassita, dovuta alla diffusione su diverse impurità, microfessure e altri difetti. Il metodo mediante il quale si è riusciti a separare questi due processi di diffusione, consiste nello studio della *dipendenza dell'intensità della luce diffusa dalla temperatura.* L'intensità della luce parassita diffusa *non deve dipendere dalla temperatura*, mentre quella della luce diffusa da processi molecolari *deve aumentare con la temperatura.* G.S. Landsberg scoprì che, nei migliori cristalli di quarzo, soltanto il 25% della luce diffusa non dipende dalla temperatura, mentre la parte restante (il 75%) dipende linearmente dalla temperatura, dimostrando l'origine molecolare di questa parte.

§ 99. *Effetto Mandel'štam-Brillouin*

1. Come abbiamo mostrato nel paragrafo precedente, il campo elettromagnetico in un mezzo otticamente disomogeneo a permettività dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon$ può essere rappresentato nella forma $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}'$, dove $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ è il campo dell'onda incidente ed $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ il campo dell'onda diffusa. Se il mezzo è debolmente disomogeneo, ci si può limitare all'approssimazione lineare e scrivere

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{P}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}') = -4\pi\operatorname{div}(\delta\boldsymbol{P}), \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E}' - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t} &= 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}' = 0, \end{aligned} \tag{99.1}$$

dove

$$\delta\boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}_0. \tag{99.2}$$

Queste equazioni dimostrano che il mezzo può essere considerato *omogeneo* a permettività dielettrica ε_0. L'influenza delle disomogeneità reali è equivalente alla presenza nel mezzo di *sorgenti di onde supplementari*: ogni

volume elementare dV del mezzo emette una radiazione supplementare come farebbe un *dipolo di Hertz* di momento dipolare $\delta \boldsymbol{P}\, dV$. Questa radiazione supplementare è la *luce diffusa*.

Le equazioni (99.1) sono *lineari* ed *omogenee* sia rispetto ai campi $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, sia rispetto a $\delta\varepsilon$. Ne segue che se rappresentiamo $\delta\varepsilon$ nella forma $\delta\varepsilon = \sum \delta_i \varepsilon$, in una approssimazione lineare la radiazione diffusa può essere ottenuta dalla sovrapposizione dei campi diffusi dalle disomogeneità $\delta_i\varepsilon$. Si può dunque trattare il problema della diffusione della luce incidente prima per il caso in cui il mezzo abbia *una sola disomogeneità* $\delta_i\varepsilon$ di un tipo dato. Le disomogeneità $\delta_i\varepsilon$, la cui sovrapposizione definisce $\delta\varepsilon$, possono essere scelte arbitrariamente. Consideriamo dapprima il caso in cui $\delta\varepsilon$ contenga un solo termine: $\delta\varepsilon = a \exp(-i\boldsymbol{K}\boldsymbol{r})$, dove a e $\boldsymbol{K}$ sono costanti. Supponiamo che l'onda incidente sia piana ed abbia per espressioni

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A}e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \quad \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{B}e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}.$$

Vediamo per quali lunghezze d'onda $\lambda = 2\pi/k$ ed in quali direzioni si osserva una radiazione diffusa.

Dividiamo il mezzo con piani equidistanti perpendicolari al vettore $\boldsymbol{K}$ (fig. 322). Sia $\Lambda = 2\pi/K$ la distanza tra i piani. Secondo la (99.2) le fasi delle sorgenti secondarie situate su questi piani equidistanti sono le stesse. Se la disomogeneità si manifestasse soltanto nello strato I e poi il mezzo fosse omogeneo, l'onda incidente subirebbe una riflessione parziale su questo strato e in parte passerebbe oltre. In presenza di una disomogeneità soltanto nello strato II otterremmo un'altra onda riflessa, della stessa ampiezza ma con un'altra fase. In presenza di una disomogeneità nello strato III si otterrebbe la terza onda riflessa, ecc. Nell'approssimazione lineare il campo di diffusione di tutto il mezzo è uguale semplicemente alla sovrapposizione di queste onde riflesse. Perché queste onde si rinforzino reciprocamente, è necessario che sia verificata la *condizione di Bragg-Wulff*: $2\Lambda \sin(\theta/2) = m\lambda$, dove θ è l'angolo di diffusione, cioè l'angolo tra le direzioni delle radiazioni incidente e diffusa, m un numero intero (ordine dello spettro di diffrazione).

Dimostriamo che $m = 1$. Tutte le onde piane riflesse da diversi strati, addizionandosi, producono un'onda della forma $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{A}'e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}')}$, dove il vettore $\boldsymbol{k}'$ determina la direzione di propagazione delle onde riflesse. D'altra parte, la polarizzazione supplementare del mezzo è

$$\delta \boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{E}_0}{4\pi}\delta\varepsilon = \frac{a\boldsymbol{A}}{4\pi}e^{i[\omega t - (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{r}]}.$$

Sostituendo queste espressioni nella seconda equazione (99.1) e confrontando gli esponenti, è facile ottenere $\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k} = \boldsymbol{K}$, da cui

$$2\Lambda \sin(\theta/2) = \lambda. \tag{99.3}$$

Dunque, nel caso in cui l'onda è diffratta su una disomogeneità sinusoidale della permettività dielettrica, nell'approssimazione lineare si ottiene uno spettro di diffrazione *di ordine uno soltanto.*

Secondo il teorema di Fourier, ogni disomogeneità del mezzo può essere rappresentata nella forma di una *sovrapposizione di disomogeneità sinusoidali piane aventi direzioni differenti.* Per quanto è stato dimostrato sopra, queste disomogeneità sinusoidali diffondono la luce in modo *indipendente.* Ma se la direzione della radiazione diffusa è data, non tutte le disomogeneità sono efficaci, ma solo quelle il cui vettore d'onda $\boldsymbol{K}$ è diretto *lungo la bisettrice dell'angolo supplementare dell'angolo* θ (fig. 322). Tutte le altre disomogeneità sinusoidali non contribuiscono alla diffusione nella
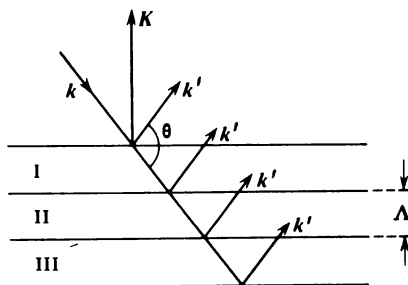
Fig. 322

direzione considerata. Vediamo che il meccanismo della diffusione sulle disomogeneità della permettività dielettrica è assolutamente analogo al meccanismo della diffusione dei raggi X nei cristalli, conformemente alla teoria di Bragg e Wulff (cfr. il § 61).

2. Finora abbiamo tenuto conto delle variazioni *spaziali* della funzione $\delta\varepsilon$ senza tener presenti le sue variazioni *temporali.* Se si tiene conto di quest'ultima circostanza, si arriva ad un nuovo fenomeno di diffusione della luce. Ponendo, come nel paragrafo precedente, che ε dipenda soltanto dalla densità ρ, scriviamo nell'approssimazione lineare $\Delta\varepsilon = (d\varepsilon/d\rho)\Delta\rho$. Ogni disomogeneità della densità del mezzo è una *sorgente di onde sonore.* Scomponiamo $\Delta\rho$ in un integrale o una serie di Fourier e prendiamo in questa scomposizione soltanto le onde sonore che sono essenziali per la diffusione delle onde lungo la direzione considerata. Il loro vettore d'onda $\boldsymbol{K}$ è stato definito sopra. A questo valore di $\boldsymbol{K}$ corrisponde una frequenza acustica Ω determinata e due direzioni di propagazione dell'onda sonora: lungo $\boldsymbol{K}$ ed in senso opposto. La disomogeneità $\delta\varepsilon$, che è responsabile della diffusione della luce nella direzione considerata, è rappresentata dalla somma $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2$, dove $\delta\varepsilon_1$ e $\delta\varepsilon_2$ hanno la forma di onde sonore piane

$$\delta\varepsilon_1 = a_1 e^{i(\Omega t - \boldsymbol{K}\boldsymbol{r})} \quad \text{e} \quad \delta\varepsilon_2 = a_2 e^{-i(\Omega t + \boldsymbol{K}\boldsymbol{r})}.$$

A queste onde corrispondono i vettori della polarizzazione supplementare del mezzo:

$$\delta \boldsymbol{P}_1 = \frac{E_0}{4\pi}\delta\varepsilon_1 = \frac{a_1 A}{4\pi} e^{i[(\omega+\Omega)t-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{r}]},$$

$$\delta \boldsymbol{P}_2 = \frac{a_2 A}{4\pi} e^{i[(\omega-\Omega)t-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{r}]}.$$

In queste condizioni le sorgenti di radiazione diffusa e quindi la radiazione diffusa stessa variano in funzione del tempo con le frequenze $\omega + \Omega$ e $\omega - \Omega$ (modulazione dell'onda luminosa mediante un'onda acustica). Nello spettro della radiazione diffusa dev'essere osservato un doppietto con queste stesse frequenze. Questo fenomeno si dice *struttura fine della diffusione di Rayleigh* o *effetto di diffusione di Mandelštam-Brillouin.* Lo spostamento della frequenza è uguale a $\Omega = Kv = (2\pi/\Lambda)v$, dove v è la velocità del suono e Λ la lunghezza dell'onda sonora. In base alla (99.3) si ha

$$\Omega = \frac{4\pi v}{\lambda}\sin\frac{\theta}{2} = 2\omega n\frac{v}{c}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{99.4}$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e n l'indice di rifrazione del mezzo.

Il doppietto di Mandelštam-Brillouin può essere interpretato come un *cambiamento della frequenza della luce per effetto Doppler* che si produce durante la riflessione della luce da un'onda acustica. Quando l'onda sonora si propaga incontro all'onda luminosa, si ha un aumento della frequenza della luce, nel caso contrario questa frequenza diminuisce. Il cambiamento di frequenza per effetto Doppler è dato dalla formula

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{2v\sin\theta/2}{c/n},$$

dalla quale si ottiene la formula (99.4).

L'idea che il moto termico poteva essere assimilato a onde sonore di differenti frequenze e di differenti direzioni di propagazione fu introdotta da Debye (1884-1966) nella sua teoria della capacità termica di corpi solidi. Debye trattò queste onde con i metodi della fisica statistica. Queste sono le stesse onde responsabili della diffusione della luce e dell'apparizione del doppietto di Mandelštam-Brillouin.

3. La struttura fine delle righe della diffusione di Rayleigh fu prevista indipendentemente da L.I. Mandelštam e L. Brillouin. Secondo la testimonianza di G.S. Landsberg, L.I. Mandelštam elaborò la sua teoria già nel 1918, ma pubblicò i suoi risultati solo nel 1926, dopo che Brillouin aveva già pubblicato nel 1922 i risultati delle sue ricerche. Mandelštam e Landsberg cercarono di scoprire sperimentalmente l'effetto in un cristallo di quarzo; riuscirono a costatare qualitativamente l'esistenza dell'effetto, ma il potere risolutivo insufficiente delle loro attrezzature spettrali non permi-

se di studiarlo quantitativamente. Tuttavia queste ricerche condussero alla scoperta dell'effetto della *diffusione combinatoria della luce* (si veda il § 100). Mandelštam e Landsberg si occuparono dello studio di quest'effetto più importante, ma per loro suggerimento gli studi sulla struttura fine della diffusione di Rayleigh vennero continuati da E.F. Gross (1897-1972) a Leningrado.

Gross mise in evidenza l'effetto facendo diffondere la luce *nei liquidi* [1], ma constatò che nei liquidi, insieme alle due componenti spostate, si osservava anche una *componente non spostata.* La causa dell'apparizione di quest'ultima fu spiegata da Landau (1908-1968) e Placzek (1905-1955).

Considerando il volume specifico V del liquido come una funzione della pressione e dell'entropia, si può scrivere

$$\delta V = (\partial V/\partial P)_S \delta P + (\partial V/\partial S)_P \delta S. \tag{99.5}$$

Quest'espressione mostra che esistono due tipi di fluttuazione del volume specifico: il primo è dovuto alle *fluttuazioni della pressione* ad entropia costante, l'altro alle *fluttuazioni dell'entropia* a pressione costante. Le fluttuazioni del primo tipo si propagano sotto forma di *onde acustiche* e determinano l'apparizione delle *componenti spostate.* Le disomogeneità provocate dalle fluttuazioni del secondo tipo si uguagliano per *conduzione termica* e per conseguenza si propagano molto più lentamente ed implicano la comparsa della *componente non spostata* della luce diffusa.

Notiamo che i processi di diffusione della luce prodotti dalle fluttuazioni di pressione e d'entropia *non sono coerenti.* Perciò le intensità integrali della componente fissa I_ω e delle componenti spostate $I_{\omega-\delta\omega}$ ed $I_{\omega+\delta\omega}$ sono collegate dalla relazione

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega}+I_{\omega+\delta\omega}} = \frac{(\partial V/\partial s)_P^2\,\overline{\Delta s^2}}{(\partial V/\partial P)_s^2\,\overline{\Delta P^2}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_P^2\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s,$$

per ricavare la quale sono state utilizzate le espressioni (97.22) e (97.24), nonché la formula $c_P = T(\partial s/\partial T)_P$, e la lettera minuscola s indica qui l'entropia specifica. Visto che il differenziale dell'entalpia specifica $di = T\,ds + V\,dP$ è un differenziale esatto, si ha $(\partial T/\partial P)_s = (\partial V/\partial s)_P$, e di conseguenza

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega}+I_{\omega+\delta\omega}} = -\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_P\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

[1] Questo risultato era inaspettato, poiché secondo la teoria idrodinamica l'assorbimento del suono nei liquidi è proporzionale al quadrato della frequenza ω. Se la teoria idrodinamica fosse interamente valida, le onde sonore di frequenza ottica non potrebbero propagarsi nei liquidi. La scoperta della struttura fine della luce diffusa dai liquidi incitò L.I. Mandelštam e M.A. Leontovič (1903-1981) ad elaborare una teoria molecolare della viscosità dei liquidi, basata sugli effetti di rilassamento, ed una teoria dell'assorbimento del suono nei liquidi.

o, in base all'identità $(\partial T/\partial V)_s(\partial V/\partial s)_T(\partial s/\partial T)_V = -1$,

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega} + I_{\omega+\delta\omega}} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_V = \frac{(\partial V/\partial T)_P(\partial s/\partial V)_T}{(\partial s/\partial T)_V}.$$

Considerando l'entropia s come funzione di T e V, otteniamo

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Si ha in definitiva

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega} + I_{\omega+\delta\omega}} = \frac{(\partial s/\partial T)_P - (\partial s/\partial T)_V}{(\partial s/\partial T)_V} = \frac{c_P - c_v}{c_v}. \tag{99.6}$$

Questa formula fu stabilita da Landau e Placzek.

Nei solidi amorfi le onde sonore possono essere *longitudinali* e *trasversali.* Queste onde si propagano con velocità diverse e perciò nella luce diffusa una riga spettrale deve suddividersi in *cinque componenti*: una componente fissa e due coppie di righe spostate, delle quali una coppia prodotta dalle onde acustiche longitudinali e l'altra dalle onde trasversali.

V.V. Vladimirskij (nato nel 1915) indicò che nel caso generale, nei cristalli, ogni riga spettrale di una luce non polarizzata deve scindersi in *25 componenti*: una componente fissa e 24 componenti spostate. Infatti in un cristallo in ogni direzione possono propagarsi un'onda acustica longitudinale e due onde acustiche trasversali. Nella stessa direzione possono propagarsi due onde luminose polarizzate in piani reciprocamente perpendicolari. Ognuna di queste onde luminose si scinde a sua volta in due nella riflessione da onde acustiche con appropriate direzioni di propagazione. Per questa ragione compaiono nella luce diffusa 24 componenti spostate. Tuttavia data la debole anisotropia di tutti i cristalli esaminati, queste 24 componenti si ripartiscono di solito in sei gruppi ognuno dei quali contiene 4 righe. Visto che le attrezzature spettrali non possono separare le quattro righe di un gruppo, si osservano sperimentalmente solo *sei componenti spostate.*

4. L'invenzione del laser ha permesso di realizzare potenti impulsi luminosi (detti impulsi giganti) che esercitano un'azione considerevole sul mezzo in cui si propaga la luce. In un campo elettrico alternato $\boldsymbol{E}$ appare la pressione d'elettrostrizione

$$\mathscr{P} = \frac{1}{8\pi}\left(\rho\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)E^2 \tag{99.7}$$

(cfr. il vol. III, § 32). La quantità $\rho\, d\varepsilon/d\rho$ è dell'ordine dell'unità. Nei campi luminosi deboli, con i quali ha a che fare l'ottica lineare, la pressione $\mathscr{P}$ è insignificante e si può trascurare la sua azione sul mezzo. Ma nel campo luminoso di un impulso gigante di un laser questa pressione può raggiunge-

re centinaia di migliaia di atmosfere. Le onde luminose ed acustiche nel mezzo debbono essere allora considerate *simultaneamente*. Queste onde sono descritte da un sistema complesso di *equazioni non lineari* d'elettrodinamica e d'acustica connesse reciprocamente. Ciò conduce ad una serie di *fenomeni ottici non lineari*. Uno di questi fenomeni è la *diffusione stimolata di Mandelštam-Brillouin*. Gli effetti ottici non lineari saranno studiati nel capitolo XI, tuttavia è opportuno presentare ora la diffusione stimolata di Mandelštam-Brillouin.

Siano $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{kr})$, $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{A}_1 \cos[(\omega + \Omega)t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}]$, $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{A}_2 \cos[(\omega - \Omega)t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}]$, $\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{A}_3 \cos[(\omega t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r})]$ le intensità del campo elettrico dell'onda incidente e delle tre onde diffuse di Mandelštam-Brillouin. Le ultime tre onde sono dovute alla diffusione sulle fluttuazioni termiche. Le loro intensità sono dapprima piccole, ma in seguito possono crescere a spese dell'interazione con l'onda incidente. La pressione d'elettrostrizione $\mathscr{P}$ è determinata dal quadrato della somma di tutti i campi, cioè $(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3)^2$. Elevando al quadrato, rappresentiamo, secondo note formule di trigonometria, i quadrati ed i prodotti dei coseni sotto forma di somme di termini costanti e di coseni delle somme e delle differenze degli argomenti. I termini costanti non partecipano all'eccitazione di onde sonore. Non sono importanti neanche i termini contenenti i coseni degli argomenti sommati, poiché rappresentano i *termini di alta frequenza* che variano nel tempo con le frequenze ottiche, mentre le onde sonore si smorzano sempre più rapidamente con l'aumento della frequenza. L'eccitazione delle onde sonore è legata soltanto ai *termini di bassa frequenza* contenenti i coseni delle differenze degli argomenti. Scriviamo tutti questi termini omettendo i coefficienti numerici e tenendo conto della relazione $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$ (fig. 322). Si ottiene

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1 \cos(\Omega t - \boldsymbol{Kr}), \quad \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_2 \cos(\Omega t + \boldsymbol{Kr}), \quad \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_3 \cos \boldsymbol{Kr},$$
$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 \cos 2\Omega t, \quad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3 \cos \Omega t, \quad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3 \cos \Omega t.$$

Solo il primo termine è importante e rappresenta l'onda che si propaga nella stessa direzione e con la stessa fase dell'onda sonora primaria generata dalle fluttuazioni termiche. Perciò avrà luogo un'*amplificazione parametrica* di quest'onda e di tutte le onde luminose diffuse da quella primaria. Questo processo d'amplificazione continuerà fino a che l'intensità della luce diffusa non sarà confrontabile con quella della luce incidente. Ciò si osserva sperimentalmente. A differenza della diffusione non coerente dovuta a fluttuazioni termiche, *la diffusione stimolata di Mandelštam-Brillouin è coerente*.

Problema

Nel caso della diffusione da un cristallo di diamante della luce emessa dalla riga di risonanza di una lampada a mercurio ($\lambda = 253{,}65$ nm), osservando ad un angolo $\theta = 90°$ rispetto alla direzione del fascio incidente, sono state scoperte due coppie di componenti spostate di

$\delta\lambda = 0{,}052$ nm e di $\delta\lambda = 0{,}032$ nm rispetto alla componente centrale fissa. Calcolare le velocità di propagazione delle onde acustiche longitudinali e trasversali nel diamante. L'indice di rifrazione del diamante è $n = 2{,}42$.

Risposta. $v = \dfrac{c}{2n \sin(\theta/2)} \dfrac{\delta\lambda}{\lambda}$; $v_{\text{long}} = 18\,000$ m/s; $v_{\text{trasv}} = 11\,000$ m/s.

Visto che la velocità del suono nel diamante è grande, si riesce a risolvere la struttura fine della diffusione Rayleigh persino per mezzo di spettrografi a prisma.

§ 100. *Diffusione combinatoria (effetto Raman)*

1. Durante gli studi spettrali della diffusione della luce nel quarzo e nello spato d'Islanda, Mandelštam e Landsberg scoprirono (febbraio del 1928) che ogni riga spettrale della luce incidente era accompagnata dall'apparizione di un sistema di righe di altre frequenze dette *satelliti.* Praticamente allo stesso tempo quest'effetto fu scoperto in India da Raman (1888-1970) e Krishnan (1898-1961) durante uno studio della diffusione della luce nei liquidi. Il cambiamento della lunghezza d'onda era molto più grande che nell'effetto Mandelštam-Brillouin. Questo fenomeno si dice *diffusione combinatoria* o *effetto Raman.* (La pubblicazione di Raman è anteriore a quella dei ricercatori sovietici.) Esaminiamo le principali leggi sperimentali della diffusione combinatoria.

1) Le frequenze delle righe satelliti differiscono dalla frequenza della riga eccitatrice di $\Delta\omega^j_{\text{comb}}$, dove j è il numero d'ordine della riga satellite, di modo che a differenti satelliti corrispondono differenti $\Delta\omega_{\text{comb}}$. Passando da una riga spettrale ad un'altra della radiazione primaria l'insieme dei valori di $\Delta\omega^j_{\text{comb}}$ resta *lo stesso.* Quest'insieme caratterizza la sostanza studiata e cambia solo al passaggio da una sostanza ad un'altra. Questo fatto è utilizzato nell'analisi spettrale con il metodo della diffusione combinatoria della luce. Le frequenze delle righe spettrali e le loro variazioni sono generalmente caratterizzate dal numero di onde contenute in un centimetro. Le indicheremo con ν e $\Delta\nu$, ponendo $\nu = 1/\lambda$. La tavola 11 mostra in quale misura la costanza di $\Delta\nu$ è rispettata per differenti lunghezze d'onda nella diffusione combinatoria (secondo le misure di G.S. Landsberg).

2) Ad ogni satellite, di frequenza $\omega - \Delta\omega_{\text{comb}}$ spostata verso l'estremità rossa dello spettro, corrisponde un satellite di frequenza $\omega + \Delta\omega_{\text{comb}}$ spostata verso l'estremità violetta dello spettro. I primi si dicono *satelliti rossi* o *satelliti Stokes* ed i secondi *satelliti violetti* o *satelliti anti-Stokes.*

3) Il numero di satelliti differenti (numero di indici j differenti) e la loro intensità relativa, ad una stessa temperatura, dipendono dalla natura della sostanza diffondente. *Le intensità dei satelliti violetti sono notevolmente più piccole di quelle dei corrispondenti satelliti rossi e manifestano una tendenza generale all'indebolimento, a misura che* $\Delta\nu_{\text{comb}}$ *aumenta.*

4) *Le costanti* $\Delta\omega_{\text{comb}}$, *caratteristiche per una sostanza considerata, coincidono con le frequenze proprie* Ω_{infr} *delle vibrazioni infrarosse della*

Frequenza della riga fondamentale ν, cm^{-1}	Benzene C_6H_6	Cloroformio $CHCl_3$		Tetracloruro di carbonio CCl_4	
	$\Delta\nu_{ros}$	$\Delta\nu_{ros}$	$\Delta\nu_{viol}$	$\Delta\nu_{ros}$	$\Delta\nu_{viol}$
33692	992,9	—	—	—	—
33086	991,3	667,7	—	459,7	—
31985	992,9	667,7	669,3	458,3	459,4
31923	992,3	667,3	669,5	457,8	460,4
29917	—	668,1	670,5	458,7	458,8
27388	991,2	666,6	—	458,4	461,2
27354	991,3	666,8	669,9	459,4	461,8
27290	991,1	—	669,8	459,1	461,8
24705	992,2	669,2	669,5	457,9	459,7
24515	—	667,5	—	457,8	—
23034	992,9	667,3	—	—	—
22994	992,1	670,8	—	457,8	—
22938	992,3	669,4	667,1	459,6	457,8
Media	992,0	668,0	669,4	458,5	460,2

stessa sostanza, benché non a tutte le Ω_{infr} conosciute corrispondano delle $\Delta\omega_{comb}$ conosciute. Inoltre, ad una riga intensa di diffusione combinatoria corrisponde spesso una debole riga d'assorbimento infrarosso e viceversa.

5) Le righe della diffusione combinatoria della luce sono più o meno *polarizzate*. Il grado di polarizzazione dei diversi satelliti di una stessa riga non è uguale e non è correlato alla polarizzazione della riga fondamentale della luce diffusa. Il carattere di polarizzazione dei satelliti rossi e violetti corrispondenti a un valore dato di $\Delta\omega_{comb}$ *è sempre lo stesso e non dipende dalla frequenza della riga fondamentale.*

2. Il fenomeno di diffusione combinatoria fu spiegato da Mandel'štam e Landsberg subito dopo la sua scoperta. Nel campo E dell'onda luminosa gli elettroni all'interno della molecola cominciano a vibrare e la molecola acquista un momento dipolare indotto p βE. Dal punto di vista classico il tensore di polarizzabilità β della molecola è determinato dalle posizioni istantanee dei suoi nuclei atomici. Ma i nuclei stessi non sono a riposo: essi eseguono moti termici disordinati e per questa ragione la polarizzabilità β non resta costante e varia nel tempo. Si può rappresentarla per mezzo di una sovrapposizione di vibrazioni armoniche le cui frequenze sono determinate dalle vibrazioni dei nuclei atomici, cioè coincidono con le frequenze proprie delle vibrazioni infrarosse della molecola. Appare una *modulazione delle vibrazioni* dei momenti dipolari indotti p. Se il campo esterno E varia nel tempo in modo armonico con frequenza ω, nelle vibrazioni del mo-

mento dipolare p compaiono le frequenze combinatorie $\omega \pm \Omega_{infr}$. Le stesse frequenze si manifestano nella radiazione di questi momenti dipolari, cioè nella luce diffusa. Tale è l'origine del fenomeno dal punto di vista classico.

Le considerazioni esposte si possono facilmente presentare in forma matematica. Se s è il numero di nuclei contenuti nella molecola, questi nuclei possiedono $3s$ gradi di libertà, di cui tre sono *di traslazione* e tre *di rotazione*. I restanti $f = 3s - 6$ gradi di libertà descrivono i *moti interni dei nuclei nella molecola*. Per descrivere i moti interni dei nuclei sono necessarie f coordinate $q_1, q_2, \dots, q_f$. La scelta delle coordinate è arbitraria, ma è comodo utilizzare le *coordinate generalizzate normali*.

Nella posizione d'equilibrio dei nuclei tutte le coordinate sono nulle. Se gli scarti rispetto alle posizioni d'equilibrio sono piccoli, ogni coordinata q_m nei moti termici esegue vibrazioni armoniche libere $q_m = a_m \cos (\Omega_m t + \delta_m)$ con una frequenza infrarossa Ω_m ed una fase δ_m che varia in modo caotico. Essendo piccole le vibrazioni, il tensore β può essere sviluppato in serie arrestandosi ai termini lineari in q. Supponendo, per semplificare, che β sia uno scalare, si ottiene

$$\beta = \beta_0 + \sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_m}\right) q_m,$$

o, dopo la sostituzione dei valori di q_m,

$$\beta = \beta_0 + \sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_m}\right) a_m \cos (\Omega_m t + \delta_m) =$$

$$= \beta_0 + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_m}\right) a_m e^{i(\Omega_m t + \delta_m)} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_m}\right) a_m e^{-i(\Omega_m t + \delta_m)}.$$

Scriviamo l'onda incidente in forma complessa $E = E_0 e^{i\omega t}$; si ha allora

$$p = \beta_0 E_0 e^{i\omega t} +$$

$$+ \frac{E_0}{2} \sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_m}\right) a_m e^{i[(\omega + \Omega_m)t + \delta_m]} + \frac{E_0}{2} \sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_m}\right) a_m e^{i[(\omega - \Omega_m)t - \delta_m]}.$$

Quest'espressione mostra che la radiazione diffusa contiene luce *non soltanto di frequenza iniziale* ω, *ma anche una luce di frequenze combinate* $\omega \pm \Omega_m$. È evidente che le onde diffuse da singole molecole sono *incoerenti* poiché l'eccitazione termica delle vibrazioni dei nuclei implica che le fasi δ_m variano in modo disordinato, sia che vengono considerate molecole diverse oppure le vibrazioni di una stessa molecola ad istanti diversi.

3. La teoria classica della diffusione combinatoria, come pure di ogni fenomeno dovuto alla radiazione ed all'assorbimento della luce, è insufficiente. I successi di questa teoria sono dovuti alle masse *relativamente grandi* dei nuclei atomici; per questa ragione le equazioni della meccanica classica esprimono correttamente certe caratteristiche delle loro vibrazioni.

Ma la teoria classica non spiega tutte le leggi della diffusione combinatoria della luce. In particolare, essa non può spiegare i rapporti osservati tra le intensità delle righe satelliti corrispondenti rosse e violette. Secondo la teoria classica queste intensità debbono essere *praticamente uguali*, mentre i dati sperimentali mostrano che *l'intensità dei satelliti rossi è sempre superiore a quella dei corrispondenti satelliti violetti.*

La teoria quantistica spiega facilmente questo risultato. Secondo la meccanica quantistica i livelli energetici della molecola formano una *serie discreta* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots$ La diffusione di un fotone sulla molecola è analoga al processo di urto di un fotone con una molecola, processo che deve verificare la *legge di conservazione dell'energia*. In questo processo il fotone può trasmettere una parte della sua energia alla molecola o, al contrario, ricevere energia da una molecola eccitata. Secondo la relazione $\mathcal{E}_{fot} = \hbar\omega$, la variazione dell'energia del fotone si manifesta nella *variazione della sua frequenza*. Supponiamo che un fotone d'energia $\hbar\omega$ venga diffuso da una molecola d'energia $\mathcal{E}_n$. Dopo la diffusione l'energia del fotone è $\hbar\omega'$ e la molecola passa al livello energetico $\mathcal{E}_m$. Secondo la legge di conservazione dell'energia $\hbar\omega + \mathcal{E}_n = \hbar\omega' + \mathcal{E}_m$ e quindi si ha

$$\omega' = \omega + \Omega_{nm}, \tag{100.1}$$

dove

$$\Omega_{nm} = (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m)/\hbar. \tag{100.2}$$

Se $\mathcal{E}_n > \mathcal{E}_m$, la frequenza del fotone diffuso è più grande di quella del fotone incidente, cioè nella luce diffusa compare un *satellite violetto*. Se, invece, $\mathcal{E}_n < \mathcal{E}_m$, nella luce diffusa compare un *satellite rosso*.

Sia $\mathcal{E}_n < \mathcal{E}_m$. Il satellite rosso viene prodotto allora quando $\mathcal{E}_n$ è il livello fondamentale della molecola ed il satellite violetto apparirà quando il livello fondamentale è $\mathcal{E}_m$. Il rapporto delle intensità dei satelliti viene espresso come $I_{ros}/I_{viol} = N_n/N_m$, dove N_n è il numero di molecole presenti nel livello $\mathcal{E}_n$ e N_m è il numero di molecole che occupano il livello $\mathcal{E}_m$. Secondo la formula di Boltzmann, all'equilibrio termico si avrà

$$\frac{N_n}{N_m} = \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}{kT}\right) = \exp\frac{\hbar\,|\Omega_{nm}|}{kT},$$

e quindi

$$\frac{I_{ros}}{I_{viol}} = \exp\frac{\hbar\,|\Omega_{nm}|}{kT}. \tag{100.3}$$

Questa formula spiega completamente il rapporto delle intensità, osservato sperimentalmente.

4. Nei potenti impulsi della radiazione laser si osserva un effetto non lineare detto *diffusione combinatoria stimolata della luce*. Quest'effetto è dovuto ad *un'azione di ritorno dell'onda luminosa sulle molecole del mez-*

zo. In un campo elettrico $\boldsymbol{E}$ non uniforme una molecola di momento dipolare $\boldsymbol{p}$ è sottoposta all'azione della forza $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\nabla)\boldsymbol{E}$. Le forze di questo tipo esercitano un'azione anche *sulle parti costituenti di una molecola*, poiché ogni parte elettricamente neutra di una molecola, composta per esempio da un nucleo e da un elettrone, possiede un momento dipolare. I momenti dipolari indotti $\boldsymbol{p}$ sono proporzionali al campo $\boldsymbol{E}$, di modo che tutte queste forze sono proporzionali al *quadrato* del campo $\boldsymbol{E}$. Il campo $\boldsymbol{E}$ è composto dal campo $\boldsymbol{E}_0$ dell'onda incidente e dal campo $\boldsymbol{E}'$ delle onde diffuse. All'inizio il campo $\boldsymbol{E}'$ è debole poiché esso ha per origine le fluttuazioni termiche del mezzo. Ma in seguito esso può rinforzarsi per interazioni con l'onda incidente. Tra le forze componenti

$$[(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}')\nabla](\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}')$$

esistono termini in cui figura il prodotto dei campi $\boldsymbol{E}_0$ ed $\boldsymbol{E}'$ le cui frequenze coincidono con le corrispondenti frequenze delle vibrazioni infrarosse della molecola. Questi termini provocano un'*amplificazione per risonanza* di queste vibrazioni infrarosse, ciò implica il crescere dell'intensità delle corrispondenti righe della diffusione combinatoria. Le vibrazioni stimolate dei nuclei atomici della molecola sono in fase con l'onda incidente e perciò, a differenza della diffusione combinatoria ordinaria (di origine termica), *la diffusione combinatoria stimolata è coerente con l'onda incidente*.

IX. TEORIA DELLA RELATIVITÀ

§ 101. *Principio di relatività in meccanica newtoniana ed in meccanica relativistica*

1. *La teoria della relatività è una teoria fisica fondamentale le cui leggi si estendono a tutta la fisica.* Questa teoria è sorta agli inizi del XX secolo al fine di superare le difficoltà di principio con le quali si erano scontrate l'elettrodinamica e l'ottica dei corpi in moto. Tutti i tentativi intrapresi per sormontare queste difficoltà in base all'ipotesi dell'etere universale erano stati vani. La teoria della relatività rinunciò all'utilizzazione dell'ipotesi dell'etere universale, basandosi anziché su ipotesi, su *principi* o *postulati* fondati sui dati sperimentali. Questa è la forza della teoria della relatività, e spiega i suoi successi. Non è nostro compito esporre dettagliatamente la storia della nascita e dello sviluppo della teoria della relatività. Tratteremo queste questioni molto brevemente per poter meglio sottolineare le questioni di principio ed approfondire il significato dei postulati e del contenuto della teoria.

La teoria della relatività è opera di Albert Einstein, che pubblicò nel 1905 una memoria fondamentale intitolata « *Dell'elettrodinamica dei corpi in moto* ». Molti risultati esposti in questa memoria erano stati anteriormente ottenuti da Larmor (1857-1942), Lorentz e Poincaré (1854-1912). Ma sia Larmor, sia Lorentz sostenevano, per principio, il punto di vista dell'etere universale fisso al quale era solidale il sistema di riferimento assoluto che aveva la loro preferenza. Più vicino alla teoria della relatività giunse Poincaré, il quale già nel 1898 criticò la nozione di simultaneità di eventi spazialmente separati (questa critica è stata in seguito ripetuta da Einstein). Poincaré colmò anche le lacune matematiche ed eliminò gli errori nei lavori di Lorentz. Ma una nuova concezione fisica di tutto il problema ed una costruzione conseguente della teoria della relatività da un punto di vista unitario è contenuto soltanto nell'opera di Einstein menzionata sopra, e che fu scritta senza alcun'influenza da parte dei suoi predecessori.

2. Cominciamo con il ricordare ciò che è stato detto nel volume I rispetto al principio di relatività nella meccanica newtoniana. La legge fondamentale della meccanica di Newton si esprime con l'equazione

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}, \tag{101.1}$$

dove $\boldsymbol{F}$ è la forza che agisce su un punto materiale e $\boldsymbol{r}$ il raggio vettore che ne definisce la posizione rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali, uno *fisso* (o non accentato) che indicheremo con S, e l'altro *mobile* (o accentato) che indicheremo con S'. Sia il sistema S' animato da un moto rettilineo ed uniforme rispetto al sistema S con velocità $\boldsymbol{V}$. Se $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$ sono i raggi vettori che definiscono la posizione di un punto materiale in moto rispetto a questi due sistemi di riferimento ad un dato istante t, questi raggi vettori sono legati dalla *trasformazione di Galileo*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t. \tag{101.2}$$

La meccanica di Newton suppone con ciò che il tempo t sia *assoluto,* cioè lo stesso in tutti i sistemi di riferimento. Per semplificare, il tempo viene misurato a partire dall'istante in cui le origini delle coordinate di S e S' coincidono. Questo procedimento non esercita alcuna influenza sulla generalità dei ragionamenti.

Derivando la relazione (101.2) due volte rispetto al tempo, si ottengono le *formule di trasformazione della velocità e dell'accelerazione*:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'. \tag{101.3}$$

Dunque, l'*accelerazione è invariante rispetto alla trasformazione di Galileo,* cioè è la stessa in entrambi i sistemi di riferimento S e S'. I raggi vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$, nonché le velocità $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}'$, sono diversi, ma *le differenze dei raggi vettori nonché delle velocità di due punti materiali qualsiasi sono le stesse,* poiché esse determinano le *posizioni relative* e la *velocità* di un punto rispetto all'altro. La forza $\boldsymbol{F}$ nella meccanica newtoniana dipende soltanto dalle *differenze dei raggi vettori* e *delle velocità* dei punti materiali interagenti. Perciò la forza $\boldsymbol{F}$, e con essa anche l'equazione di Newton (101.1), non cambiano in una trasformazione di Galileo. Lo stesso vale per le equazioni differenziali del moto dei sistemi di punti materiali nella meccanica di Newton. Quindi, si ottiene il seguente risultato:

Le equazioni della meccanica di Newton che determinano le variazioni dello stato di moto dei sistemi meccanici, sono invarianti rispetto ad una trasformazione di Galileo.

Questa proposizione è detta *principio di relatività galileiana,* che può anche essere enunciato come segue:

Le leggi della Natura, che determinano le variazioni dello stato di moto dei sistemi meccanici, sono le stesse in due sistemi di riferimento inerziali, cioè animati da un moto rettilineo ed uniforme l'uno rispetto all'altro.

La fisica prerelativistica considerava equivalenti questi due enunciati poiché, nel moto di traslazione uniforme dei sistemi di riferimento inerziali l'uno rispetto all'altro, essa non ammetteva alcun'altra trasformazione di $\boldsymbol{r}$ e t, oltre a quella di Galileo. In realtà il secondo enunciato è *più generale* di quello precedente, poiché in esso non è concretizzato il tipo di trasforma-

zione delle coordinate e del tempo rispetto alla quale sono invarianti le equazioni della meccanica. In seguito, salvo indicazioni particolari, il principio di relatività utilizzato è quello del *secondo enunciato.*

3. Il principio di relatività non afferma affatto che uno stesso fenomeno fisico si presenta nello stesso modo in diversi sistemi di riferimento inerziali. Infatti le sole equazioni differenziali della meccanica non definiscono il moto del sistema. Ad esse è ancora necessario aggiungere le *condizioni iniziali,* per esempio assegnare le coordinate e le velocità di tutte le particelle interagenti ad un istante dato. E queste condizioni iniziali variano al passaggio da un sistema di riferimento ad un altro. Proprio a seguito della differenza delle condizioni iniziali il moto di un oggetto che cade dalla reticella per bagagli di un vagone in moto uniforme si effettua secondo una traiettoria verticale se questo moto è osservato rispetto al vagone, mentre lo stesso moto si effettua secondo una traiettoria parabolica rispetto al binario. Ecco perché l'enunciato del principio di relatività non riguarda l'identità dei fenomeni, ma l'*identità delle leggi* che determinano la variazione dello stato di moto dei sistemi meccanici.

Il significato del principio di relatività può anche essere illustrato con un altro esempio. Prendiamo un sistema chiuso A di corpi ed assegnamo le loro posizioni e le velocità iniziali rispetto ad un sistema di riferimento S inerziale. Supponiamo che esista un altro sistema chiuso A' di corpi identico ad A, nel quale le condizioni iniziali sono esattamente le stesse del sistema A, ma rispetto ad un altro sistema di riferimento inerziale S'. Il moto dei corpi del sistema A rispetto a S è allora identico a quello dei corpi del sistema A' rispetto a S'. In ciò consiste appunto l'*equivalenza* dei sistemi di riferimento inerziali imposta dal principio di relatività.

In linea di principio, tutti i corpi dell'Universo sono in interazione mutua. Perciò, persino se esistessero sistemi chiusi, potremmo trovarne, a rigor di termini, uno solo: tutto l'Universo. Ma allora il principio di relatività, nel senso che esso ha nell'ultimo esempio, sarebbe privo di significato, poiché non esistono due Universi. Il principio di relatività ha senso solo perché si possono trascurare molte interazioni, essendo queste ultime deboli, e definire così un numero praticamente infinito di sistemi finiti di corpi, ciascuno dei quali si comporta approssimativamente come un sistema *chiuso.* In quale grado uno o l'altro di questi sistemi soddisfa a questa condizione dipende dalla questione studiata e dalla precisione imposta. Ci si deve domandare se l'allontanamento di tutte le masse, non facenti parte del sistema considerato, sia sufficiente per considerarlo chiuso. Conformemente all'esperienza, la risposta è la seguente: nel caso di un *moto rettilineo ed uniforme* (rispetto ad un sistema di riferimento inerziale) questa condizione e *sufficiente,* ma essa è *insufficiente* per tutti gli altri moti.

4. È impossibile dividere tutti i fenomeni naturali in fenomeni puramente « meccanici » ed in quelli « non solo meccanici ». Persino se si potesse farlo, il principio di relatività non potrebbe essere applicato ai soli fe-

nomeni « meccanici ». Infatti, ogni fenomeno meccanico è legato a molti fenomeni « fisici » e ne dipende. Se il principio di relatività non fosse valido per questi fenomeni « fisici », esso non potrebbe restare valido per i fenomeni puramente « meccanici ». Perciò il principio di relatività deve essere esteso a *tutti i fenomeni naturali* ed è necessario enunciarlo come segue.

Le leggi della Natura che determinano le variazioni dello stato dei sistemi fisici sono le stesse in due sistemi di riferimento inerziali in moto di traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro.

Quest'enunciato costituisce il *principio di relatività ristretta di Einstein.* Questo principio stabilisce l'equivalenza dei *soli sistemi di riferimento inerziali.* In base a questo principio Einstein elaborò nel 1905 la *teoria della relatività ristretta.* Dieci anni dopo generalizzò il prinicipio di relatività ai *sistemi di riferimento non inerziali arbitrari* ed elaborò la *teoria della relatività generale* detta anche *teoria relativistica della gravitazione.* Questa teoria fondamentale acquistò un'importanza particolare in seguito alle recenti scoperte. La teoria generale della relatività diventò la *teoria fondamentale* dell'astrofisica ed in particolare della cosmologia. Ma nel nostro Corso esporremo soltanto la teoria della relatività ristretta.

§ 102. *Esperienza di Michelson*

1. Le equazioni fondamentali dell'elettrodiamica di Maxwell-Lorentz *non sono invarianti rispetto alla trasformazione di Galileo.* Infatti, la velocità della luce nel vuoto, calcolata a partire da queste equazioni, è costante ed uguale a c. Questo risultato sarebbe verificato in tutti i sistemi di riferimento inerziali, se in essi le equazioni di Maxwell avessero la stessa forma. Ma ciò è incompatibile con la legge di composizione delle velocità (101.3) che è un corollario della trasformazione di Galileo.

La non invarianza delle equazioni di Maxwell rispetto alla trasformazione di Galileo, come credevano i fisici della fine del secolo XIX e dell'inizio del secolo XX, non contraddice però il principio di relatività. A tutti i fenomeni elettrodinamici, oltre alla materia ordinaria, secondo le concezioni ammesse a quell'epoca, partecipa anche l'*etere universale.* Le equazioni di Maxwell assumono la loro forma ordinaria soltanto nei sistemi di riferimento in cui l'etere è a riposo. Questo sistema è privilegiato o isolato tra tutti gli altri sistemi di riferimento inerziali. In tutti gli altri sistemi deve esser osservato uno spostamento dell'etere (*vento d'etere*). La sua scoperta veniva considerata in quell'epoca come uno dei problemi cruciali della fisica. Il risultato degli esperimenti ha completamente smentito l'ipotesi dell'etere e quindi l'eventualità di un suo moto. Tuttavia gli esperimenti pensati e progettati per scoprire il vento d'etere presentano un certo interesse anche oggi, poiché, pur rigettando il concetto d'etere universale, ci consentono di porre la questione dell'esistenza di un *sistema di riferimento*

inerziale privilegiato. A questa questione rispondono gli esperimenti effettuati per rivelare il vento d'etere.

2. Se si ammette l'ipotesi dell'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato, la prima questione che si pone è quella concernente il moto della Terra rispetto a questo sistema di riferimento. Indichiamo la velocità di questo moto con $\boldsymbol{V}$. Secondo la cinematica prerelativistica, la velocità della luce rispetto alla Terra misurata nel senso del vettore $\boldsymbol{V}$ sarà uguale a $c - V$ e nel senso opposto sarà uguale a $c + V$, dove c è la velocità della luce rispetto al sistema di riferimento privilegiato.

Questo risultato può essere verificato con un esperimento. Si potrebbe, così pare, utilizzare a questo scopo due orologi sincronizzati installati sulla Terra in punti diversi A e B che si trovano ad una distanza $l = AB$ l'uno dall'altro (fig. 323). Se la retta AB è orientata lungo la velocità $\boldsymbol{V}$, il tempo
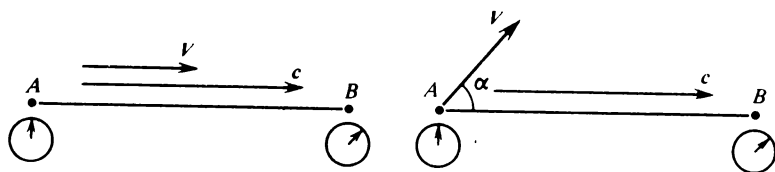
Fig. 323

necessario perché la luce percorra la distanza AB sarà uguale a $t_{AB} = l/(c - V)$, ed a $t_{BA} = L/(c + V)$, per percorrerla in senso inverso. La differenza di questi tempi di percorso sarà, al primo ordine d'approssimazione in V/c, uguale a $t_{AB} - t_{BA} \approx 2 \frac{l}{c} \frac{V}{c}$. Se la retta AB forma un angolo α con la direzione della velocità $\boldsymbol{V}$, questa differenza sarà uguale a

$$t_{AB} - t_{BA} \approx 2 \frac{l}{c} \frac{V}{c} \cos \alpha.$$

Il tempo t_{AB} è determinato notando le indicazioni degli orologi negli istanti in cui la luce arriva in B e quando essa è emessa da A. Lo stesso procedimento fornisce il tempo t_{BA}.

Non mancavano suggerimenti, spesso spiritosi, su come realizzare esperimenti. Ma dal punto di vista di principio tutti questi suggerimenti non differivano dallo schema d'esperimento descritto sopra. I suggerimenti di questo tipo furono abbandonati dopo la seguente osservazione di Michelson. I tempi t_{AB} e t_{BA} sono misurati mediante *due orologi* che si trovano in diversi punti dello spazio. Perché la misura sia corretta, è necessario *sincronizzare* questi orologi, il che è praticamente irrealizzabile con la precisione necessaria. (Più tardi Einstein notò che questa era una difficoltà *di princi-*

pio e non soltanto pratica, si veda il § 104). Per realizzare l'esperimento si deve rinunciare alla sincronizzazione, cioè effettuare tutte le misure mediante *un solo orologio.* Per farlo dal punto A, dove si trova l'orologio, è necessario inviare un segnale luminoso e rifletterlo in uno specchio posto in B per farlo ritornare in A. Il tempo totale t di propagazione della luce lungo la retta AB di andata e ritorno può essere misurato mediante un solo orologio. Dividendo la distanza raddoppiata tra i punti A e B per il tempo misurato si può trovare la velocità della luce c. Ma questa non è la velocità della luce in un senso determinato, ma la *velocità media in due sensi diametralmente opposti.* Michelson studiò la dipendenza del tempo totale t dall'orientamento della retta AB.

Come mostra la figura 324, $c^2 = c'^2 + V^2 + 2Vc' \cos\alpha$, dove $\mathbf{c}$ e $\mathbf{V}$ sono le velocità della luce e della Terra rispetto al sistema di riferimento privilegiato, $\mathbf{c}'$ è la velocità della luce rispetto alla Terra ed α l'angolo tra le velocità $\mathbf{V}$ e $\mathbf{c}'$. Risolvendo l'equazione quadratica rispetto a c', si trova

$$c' = -V\cos\alpha + c\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\alpha},$$

dove è stata introdotta la notazione $\beta = V/c$. Limitandoci ai quadrati di β, otteniamo

$$c' = c\left(1 - \beta\cos\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\sin^2\alpha\right).$$

3. Michelson utilizzò per le sue misure l'interferometro da lui costruito, descritto nel § 35 (fig. 140). La lamina P_2 fu introdotta per rendere uguali le lunghezze ottiche dei bracci dell'apparecchio e rese quindi realizzabili le
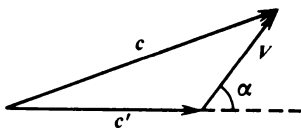
Fig. 324

interferenze in luce bianca. Nei ragionamenti di principio si può astrarre dall'esistenza della lamina P_2 e considerare che la lamina P_1 sia infinitamente sottile. Supponiamo che il braccio 2 dell'interferometro faccia con la direzione della velocità $\mathbf{V}$ un angolo α. Per percorrere la distanza di andata e ritorno tra il punto A e lo specchio M_2 la luce impiega un tempo

$$t_2 = \frac{l}{c}\frac{1}{1 - \beta\cos\alpha - 1/2\beta^2\sin^2\alpha} + \frac{l}{c}\frac{1}{1 + \beta\cos\alpha - 1/2\beta^2\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{2l}{c}\frac{1 - 1/2\beta^2\sin^2\alpha}{(1 - 1/2\beta^2\sin^2\alpha)^2 - \beta^2\cos^2\alpha} \approx \frac{2l}{c}\frac{1 - 1/2\beta^2\sin^2\alpha}{1 - \beta^2}.$$

Calcoliamo ora il tempo t_1 che la luce impiega per percorrere il tragitto di andata e ritorno lungo il braccio dell'interferometro perpendicolare al braccio 2. Si può calcolarlo dall'esperssione precedente, sostituendo l'angolo α con l'angolo $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$. Ciò dà

$$t_1 = \frac{2l}{c} \frac{1 - 1/2\beta^2 \cos^2 \alpha}{1 - \beta^2}.$$

Dunque,

$$t_2 - t_1 = \frac{l}{c} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \cos 2\alpha \approx \frac{l}{c} \beta^2 \cos 2\alpha.$$

A questa differenza dei tempi corrisponde una differenza di fase tra i raggi che interferiscono, data da

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi c}{\lambda} (t_2 - t_1) = \frac{2\pi l}{\lambda} \beta^2 \cos 2\alpha.$$

Se l'interferometro ruota, l'angolo α varia e le frange d'interferenza debbono spostarsi. Proprio quest'effetto cercò di scoprire Michelson.

Se per unità di misura si prende l'interfrangia, lo spostamento delle frange corrispondente ad una rotazione dell'interferometro sarà uguale a

$$\Delta N = \frac{\Delta(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} = \frac{l}{\lambda} \beta^2 \Delta(\cos 2\alpha). \qquad (102.1)$$

Il valore massimo dello spostamento

$$\Delta N_{max} = \frac{2l}{\lambda} \beta^2 \qquad (102.2)$$

si raggiunge quando nella rotazione dell'interferometro $\cos 2\alpha$ varia da ± 1 a ∓ 1. Di qui si vede che lo spostamento atteso è molto piccolo poiché esso è del *secondo ordine* in $\beta \equiv V/c$. È impossibile stimarlo con precisione, poiché la velocità della Terra rispetto al sistema di riferimento inerziale privilegiato è ignota. Si può però stimare il limite inferiore di ΔN_{max}. Infatti, supponiamo che il Sole sia a riposo rispetto al sistema di riferimento privilegiato. V indicherà allora la velocità della Terra sulla sua orbita che è uguale press'a poco a 30 km/s, di modo che $\beta = 10^{-4}$, $\beta^2 = 10^{-8}$. Nel primo esperimento di Michelson (1881) la lunghezza dei bracci dell'interferometro era uguale a $l = 1{,}2$ m. Se si prende $\lambda = 600$ nm, si ottiene $\Delta N_{max} = 0{,}04$ interfrangia.

Se si tiene conto del moto del Sole, ci si può attendere uno spostamento delle frange più grande. Infatti, scomponiamo la velocità di moto del Sole in una componente $V_\parallel$ situata nel piano dell'orbita terrestre ed una componente $V_\perp$ perpendicolare a questo piano. La velocità totale della Terra è al-

lora uguale a $V = V_{orb} + V_{\|} + V_{\perp}$, dove V_{orb} è la velocità orbitale della Terra. Se l'esperimento è effettuato nell'istante in cui le direzioni delle velocità V_{orb} e $V_{\|}$ coincidono, la velocità totale della Terra si può scrivere

$$V^2 = (V_{orb} + V_{\|})^2 + V_{\perp}^2,$$

di modo che V sarà più grande di V_{orb}. Di conseguenza, anche lo spostamento atteso delle frange sarà più grande di quello calcolato sopra.

Certo, lo spostamento atteso minimo di 0,04 interfrangia calcolato sopra si dovrebbe osservare soltanto due volte all'anno, quando la direzione del vento d'etere coincida o sia opposta allo spostamento della Terra. Perciò è necessario eseguire le osservazioni durante almeno *sei mesi,* come in effetti facevano Michelson e tutti i fisici che ripetevano il suo esperimento.

L'esperimento è stato realizzato con una tale precisione che permetteva di scoprire uno spostamento uguale a 0,01 interfrangia. Lo spostamento atteso di 0,04 interfrangia poteva essere sicuramente rivelato malgrado tutte le sorgenti di errori fortuiti. Risultò che lo spostamento non c'era. Più esattamente, il risultato ottenuto permetteva di affermare che la velocità del vento d'etere, se esiste, non potrebbe essere superiore a 18 km/s.

4. Nel 1887 Michelson riprese il suo esperimento insieme con Morley (1838-1923). Affinché la rotazione dell'interferometro non produca deformazioni che provocano piccoli spostamenti delle frange d'interferenza, l'apparecchio e tutte le altre attrezzature erano montati su una lastra massiccia di cemento che galleggiava sulla superficie del mercurio contenuto in un recipiente. Inoltre, l'apparecchio era costantemente in rotazione, anche durante le misure. Per mezzo di riflessioni ripetute molte volte su 16 specchi montati sulla stessa lastra di cemento, la lunghezza efficace di ciascun braccio dell'interferometro era portata fino a 11 m. Lo spostamento atteso delle frange dovuto al moto orbitale della Terra era uguale a 0,4 interfrangia. Lo spostamento minimo che si poteva osservare (tenendo conto degli errori sperimentali) era uguale a 0,02 e lo spostamento medio delle frange era uguale a 0,01 interfrangia. L'esperimento ha permesso di affermare che la velocità del vento d'etere non poteva essere superiore a 7 km/s. Michelson stesso concluse che il risultato di questi esperimenti era negativo, in altre parole l'effetto era nullo: *il vento d'etere non esiste.*

L'esperimento di Michelson fu molte volte ripetuto da altri fisici che utilizzavano apparecchiature e metodi d'osservazione perfezionati. Senza toccare la storia della questione, indichiamo soltanto che agli inizi degli anni '30 si arrivò alla conclusione che la velocità del vento d'etere, se esiste, non poteva essere superiore a 1-1,5 km/s.

5. L'invenzione dei laser, con il loro altissimo grado di monocromaticità e di coerenza spaziale, permise di semplificare in modo eccezionale lo schema dell'esperimento di Michelson e di aumentare la sua precisione. L'esperimento fu realizzato nel 1964 dai fisici americani Jaseja, Javan, Murrey e Townes. Il principio è il seguente.

Se la velocità della luce dipende dalla direzione della sua propagazione rispetto alla Terra, la frequenza della radiazione emessa dal laser dovrebbe modificarsi con la rotazione. Questa variazione è proporzionale a β^2, cioè è del secondo ordine in β. Due laser ad elio-neon identici sono montati perpendicolarmente l'uno all'altro su una piattaforma ruotante (fig. 325). Il fascio di luce inviato da uno dei laser attraversa uno specchio semiargentato S, mentre il fascio inviato dal secondo laser si riflette sullo stesso specchio S. Poi i due fasci si propagano nello stesso senso e penetrano in un
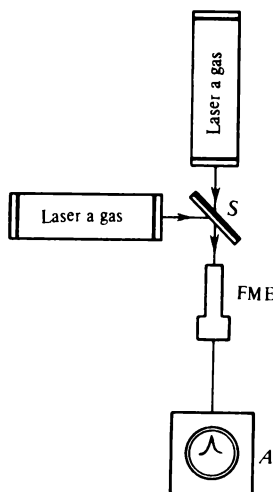
Fig. 325

moltiplicatore fotoelettrico montato sulla stessa piattaforma ruotante. Se le frequenze di questi due fasci differiscono un po' l'una dall'altra, dovrebbero apparire dei battimenti della corrente fotoelettrica di frequenza appartenente alla gamma delle frequenze radioelettriche, che si potrebbe osservare, per mezzo di procedimenti radiotecnici conosciuti, con un analizzatore A. La frequenza dei battimenti dovrebbe variare durante la rotazione dell'apparecchio. Se nella posizione iniziale uno dei laser fosse orientato lungo la direzione di traslazione della Terra e l'altro perpendicolarmente alla direzione di traslazione della Terra, nella rotazione dell'apparecchio di 90°, secondo la teoria dell'etere fisso, ci si dovrebbe aspettare una variazione della differenza delle frequenze dei laser uguale press'a poco a 3 MHz, dovuta al moto orbitale della Terra, mentre l'errore sperimentale non era superiore ad alcuni hertz. L'esperimento non confermò questo spostamento. In base alle loro osservazioni i ricercatori conclusero che la velocità del vento d'etere, se quest'ultimo esistesse, non potrebbe essere superiore a

30 m/s. In confronto con i risultati precedenti la precisione delle misure aumentò all'incirca di 50 volte.

6. Il risultato negativo dell'esperimento di Michelson dimostra che nel sistema di riferimento terrestre la velocità della luce nel vuoto è *isotropa,* cioè non dipende dalla direzione della sua propagazione. Per velocità della luce qui s'intende la sua *velocità media* nei due sensi di propagazione diametralmente opposti; è proprio la velocità media che determina il risultato dell'esperimento che utilizza un solo orologio. Generalizzando questo risultato, si può affermare che esso è verificato *in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Resta ancora da precisare se i valori numerici della velocità della luce sono gli stessi in tutti i sistemi di riferimento. Una risposta affermativa a questa questione è stata fornita nel 1932 dagli esperimenti di Kennedy e Torndyke che modificarono l'apparecchio di Michelson. Nel loro esperimento venne utilizzato un interferometro di Michelson nel quale le lunghezze dei bracci erano *diverse* e differivano di 16 cm l'uno dall'altro. Essi osservavano le frange d'interferenza durante sei mesi (l'interferometro era immobile rispetto alla Terra). Durante questo periodo di tempo la Terra si spostava continuamente dalla sua posizione iniziale ad un punto diametralmente opposto della sua orbita, partecipando allo stesso tempo al moto del Sole. Con ciò venivano realizzati molti sistemi di riferimento che differivano tra loro per la posizione e per l'orientamento nello spazio. Se la velocità della luce fosse differente in tutti questi sistemi di riferimento, si dovrebbe osservare uno spostamento regolare delle frange d'interferenza. In realtà gli spostamenti delle frange erano aleatori e non erano superiori a 3/1000 d'interfrangia. Basandosi su questo risultato, si può concludere, che, con la precisione all'incirca di 2 m/s, la velocità della luce nel vuoto rispetto alla Terra è la stessa, quale che sia la posizione della Terra nello spazio.

Tutti questi risultati confermano l'equivalenza di diversi sistemi inerziali di riferimento rispetto a tutti i fenomeni fisici e dimostrano che *non esiste un sistema di riferimento inerziale privilegiato.*

§ 103. *Indipendenza della velocità della luce dal moto della sorgente luminosa*

1. Oltre al principio o postulato di relatività, la teoria della relatività di Einstein si basa sul *postulato secondo il quale la velocità della luce nel vuoto è indipendente dal moto della sorgente luminosa.* Generalmente, quest'ultimo postulato viene indicato come *principio di invarianza della velocità della luce* benché, come notò ancora Pauli (1900-1958), questa denominazione possa far sorgere equivoci. Non si può assolutamente affermare che la velocità della luce nel vuoto sia sempre costante, poiché questa velo-

cità è costante solo nei *sistemi di riferimento inerziali,* mentre la sua indipendenza dal moto della sorgente resta valida anche *nella teoria della relatività generale,* dove sulla scelta dei sistemi di riferimento non è imposta alcuna limitazione.

Se dall'inizio avessimo adottato la teoria ondulatoria della luce, sarebbe stato inutile porre come postulato indipendente che la velocità della luce non dipende dal moto della sorgente luminosa. Tuttavia è preferibile costruire una teoria tanto fondamentale, quanto lo è la teoria della relatività, senza legarsi ad alcuna ipotesi sulla natura e sul meccanismo dei fenomeni fisici.

2. L'ipotesi della dipendenza della velocità della luce dal moto della sorgente luminosa fu introdotta da Ritz (1878-1909). Secondo quest'ipotesi, la velocità della luce nel vuoto è costante ed uguale a c soltanto rispetto alla sorgente luminosa. Se, invece, la sorgente luminosa si sposta con velocità $\mathbf{v}$ rispetto ad un sistema di riferimento, la velocità della luce $\mathbf{c}'$ in questo sistema sarà uguale alla somma vettoriale di $\mathbf{c}$ e di $\mathbf{v}$, cioè $\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \mathbf{v}$, come avviene nel caso della velocità di un proiettile tirato da un cannone in moto. Quest'ipotesi è detta *balistica.* Ritz ricostruì in modo sistematico l'elettrodinamica di Maxwell conformemente alla sua ipotesi. È evidente che l'ipotesi balistica può spiegare il risultato negativo dell'esperimento di Michelson, solo se la sorgente luminosa è fissa rispetto all'interferometro.

Ma l'ipotesi balistica, come qualsiasi altra ipotesi sulla dipendenza della velocità della luce dal moto della sorgente, non concorda con l'interpretazione molecolare della riflessione e della rifrazione della luce (cfr. i §§ 68 e 69). Quest'interpretazione è basata sull'idea che le onde riflessa e rifratta si producono in conseguenza dell'interferenza dell'onda incidente con le onde secondarie emesse dalle molecole e dagli atomi del mezzo. Infatti, se supponiamo fisso il mezzo e mobile la sorgente, le onde emesse da quest'ultima si propagheranno con velocità differenti da quelle delle onde emesse dalle molecole e dagli atomi del mezzo, e ciò rende impossibile l'interferenza tra queste onde. Ma questa osservazione rappresenta un'argomentazione basata sulla teoria ondulatoria della luce e non è una verifica sperimentale indipendente da ogni ipotesi sulla natura della luce.

Una dimostrazione convincente dell'inconsistenza dell'ipotesi balistica, come provò nel 1913 l'astronomo olandese de Sitter (1872-1934), ci viene fornita dalle osservazioni astronomiche sui moti delle stelle doppie. Infatti, ammettiamo che l'ipotesi balistica sia vera. Supponiamo per semplificare che le componenti di una stella doppia ruotino attorno al loro centro di massa su orbite circolari situate nello stesso piano che contiene l'orbita della Terra. Consideriamo il moto di una di queste stelle. Sia v la sua velocità lungo l'orbita circolare. Quando la stella s'allontana dalla Terra lungo la retta che le congiunge, la velocità della luce è uguale a $(c - v)$ e quando essa s'avvicina alla Terra, la velocità della luce è $(c + v)$. Se misuriamo il tempo a partire dall'istante in cui la stella comincia ad allontanarsi dalla

Terra, la luce da questa posizione raggiungerà la Terra nell'istante $t_1 = L/(c - v)$ e dalla posizione in cui comincia ad avvicinarsi nell'istante $t_2 = T/2 + L/(c + v)$, dove T è il periodo di rivoluzione della stella e L la sua distanza dalla Terra. Essendo enormi le distanze dalle stelle, i moti osservati delle stelle presenterebbero scarti notevoli rispetto alle leggi di Keplero. In particolare, se L è molto grande, potrebbe essere $t_2 \leqslant t_1$, il che significa che la stella potrebbe essere osservata simultaneamente in due (e persino in più) posizioni o sembrerebbe ruotare in senso inverso. Ma, come hanno mostrato le osservazioni astronomiche, non si verifica niente di simile.

Se l'ipotesi balistica fosse vera, l'esperimento di Michelson, realizzato non con una sorgente terrestre ma con la luce di una stella, dovrebbe fornire un risultato positivo. Così fece Tomaschek nel 1926, ma ottenne un risultato negativo.

Nel 1956 A.M. Bonč-Bruevič e V.A. Molčanov, utilizzando metodi moderni di misura della velocità della luce, confrontarono le veloctià della luce emessa dai bordi opposti del Sole. In conseguenza della rotazione assiale del Sole uno dei bordi s'avvicina all'osservatore con una velocità di 2,3 km/s e l'altro s'allontana con la stessa velocità. Entrambe le velocità della luce coincidono con precisione sufficiente.

Infine vennero realizzati esperimenti speciali in cui si confrontavano le velocità dei quanti γ emessi da nuclei di carbonio eccitati ($^*C^{12}$) in moto e da nuclei d'ossigeno eccitati ($^*O^{16}$) immobili. Venivano anche realizzati esperimenti d'annichilazione di coppie elettrone-positrone adattati specialmente alla verifica dell'indipendenza della velocità della luce dal moto della sorgente luminosa. In confronto con gli esperimenti astronomici, nei quali sono utilizzate sorgenti luminose cosmiche a velocità relativamente piccole, negli esperimenti con i nuclei atomici e le particelle elementari la velocità delle sorgenti è molto più alta (confrontabile con la velocità della luce stessa). Gli esperimenti confermarono che, con precisione di circa il 10%, la velocità di quanti γ è indipendente dal moto della sorgente.

Tutti gli esperimenti menzionati confermano il postulato dell'invarianza della velocità della luce nel vuoto rispetto al moto della sorgente.

3. Osserviamo, per concludere, che la teoria della relatività non avrebbe potuto essere elaborata, se non fosse stato stabilito il fatto fondamentale che *la velocità di propagazione della luce è finita.* Lo studio dei metodi e dei risultati delle misure della velocità della luce presenta un interesse straordinario, che non è soltanto storico. In particolare, la precisazione di questa costante è indispensabile per misure sempre più precise delle distanze astronomiche mediante procedimenti di radiolocalizzazione, il che a sua volta è necessario per la costmonautica. Osserviamo, senza approfondire queste questioni, che nel 1972 la velocità della luce è stata determinata in base a misure indipendenti della lunghezza d'onda λ e della frequenza ν della luce. La sorgente di luce era un laser ad elio-neon emittente su una

lunghezza d'onda di 3,39 μm. La lunghezza d'onda era misurata con un procedimento interferometrico, confrontandola ad una lunghezza campione, cioè alla lunghezza d'onda della riga arancio dell'isotopo kripton-86 nel vuoto. L'errore di queste misure era $\sim 10^{-5}$ nm. La frequenza della radiazione laser era misurata per confronto con il campione atomico di frequenza, cioè con la frequenza di transizione tra due livelli quantici iperfini dell'atomo di cesio-133 in un campo magnetico nullo. Qui sono stati utilizzati i metodi dell'ottica non lineare basati sulla generazione di radiazioni di frequenze uguali alla somma ed alla differenza delle frequenze. Si è trovato dunque che la velocità della luce $c = \lambda\nu$ ha per valore

$$c = 299\,792\,458 \pm 1{,}2 \text{ m/s}$$

la cui precisione è più di due ordini di grandezza migliore di quella dei risultati anteriori.

§ 104. *Concetto di simultaneità*

1. Prima dell'elaborazione della teoria della relatività si pensava che il principio di relatività ed il principio di invarianza della velocità della luce dal moto della sorgente fossero in contraddizione. Infatti, secondo il principio di relatività, la velocità della luce nel vuoto dev'essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Indichiamola come sempre con c. Prendiamo due sistemi di riferimento inerziali S e S' in moto uniforme e rettilineo l'uno rispetto all'altro. Siano O ed O' due punti fissi rispetto ai sistemi di riferimento S e S' e che coincidano rispettivamente e spazialmente all'istante $t = 0$. Provochiamo in questi punti nello stesso istante $t = 0$ un breve impulso di luce e consideriamo la sua propagazione prima nel sistema S. Visto che la luce si propaga in tutte le direzioni con la stessa velocità c, ad un istante t l'impulso luminoso perverrà alla superficie sferica Σ di raggio ct con centro in O. Consideriamo ora la propagazione dello stesso impulso luminoso nel sistema S'. I due sistemi sono equivalenti e differiscono soltanto per il fatto che la sorgente di luce si muove rispetto ad essi in modo differente. Ma nella questione considerata questo fatto non ha nessun'importanza, poiché la velocità della luce non dipende dal moto della sorgente. Perciò si può affermare che al momento t lo stesso impulso luminoso arriverà alla superficie sferica Σ' di ugual raggio ct, ma con centro in O'. Le sfere Σ e Σ' sono diverse, poiché all'istante t i loro centri O ed O' si sono allontanati. Dunque, lo stesso impulso luminoso deve *simultaneamente* trovarsi sulla sfera Σ e sulla sfera Σ', il che è, evidentemente, impossibile.

2. Ma il ragionamento riportato è erroneo, poiché alla sua base si trova una *concezione intuitiva di simultaneità.* Se due eventi avvengono in uno stesso punto dello spazio, è facile rendersi conto se essi siano simultanei o no. Ma se gli eventi si producono *in punti diversi dello spazio,* non si può affermare se essi siano o no simultanei, poiché non esiste *alcuna simultaneità a priori di eventi spazialmente separati.*

In linea di principio la descrizione spazio-temporale dei fenomeni naturali potrebbe essere data senza ricorrere al concetto di simultaneità. Infatti, consideriamo un sistema di riferimento inerziale arbitrario; per definire la posizione di un punto rispetto a questo sistema di riferimento, utilizzeremo assi delle coordinate realizzati, per esempio, per mezzo di tre aste rigide reciprocamente perpendicolari. Misureremo la distanza tra due punti applicando alle aste un'asta campione di lunghezza fissa divisa in metri ed in unità di lunghezza più piccole. Questo procedimento è inutilizzabile per la misura di grandi lunghezze. Si deve allora ricorrere a procedimenti di misura indiretti dei quali è stato detto al § 1 del primo volume. Per misurare il tempo mettiamo nel nostro sistema di coordinate *orologi identici* in diversi punti sufficientemente vicini, in modo arbitrario ed indipendente. Si ottiene così un sistema di riferimento spazio-temporale. Ogni evento in questo sistema può essere caratterizzato dal punto dove esso ha avuto luogo e dalle indicazioni dell'orologio *nello stesso punto.*

Abbiamo per il momento introdotto soltanto il *tempo locale,* cioè il tempo indicato dagli orologi in ogni punto dello spazio, senza che i tempi in punti diversi siano collegati tra loro. Questa circostanza rende il nostro sistema praticamente inapplicabile per una descrizione spazio-temporale dei fenomeni naturali. Un sistema pratico può essere solo quello a *tempo unico,* in cui le indicazioni degli orologi in diversi punti non sono indipendenti ma sincronizzate o correlate in un modo determinato. Il metodo di sincronizzazione, in linea di principio, può essere arbitrario. È solo necessario che questo metodo sia *internamente non contraddittorio.* Tuttavia considerazioni d'opportunità basate sul principio di relatività e sull'invarianza della velocità della luce rispetto al moto della sorgente implicano in modo praticamente univoco d'adottare il metodo di sincronizzazione suggerito da Einstein e la definizione di simultaneità che ne discende.

3. Einstein suggerì di sincronizzare gli orologi spazialmente separati mediante impulsi luminosi che si propagano nel vuoto. Finché gli orologi non sono ancora sincronizzati, non si può parlare di velocità in una certa direzione. Si può parlare soltanto di *velocità media* della luce nei due sensi di una direzione data, poiché questa velocità media si può determinare per mezzo di un *solo orologio.* A questo scopo da un punto fisso A, all'istante t_1^A, inviamo un impulso luminoso verso uno specchio fisso situato ad una distanza l dal punto A. Supponiamo che l'impulso luminoso riflesso ritorni al punto A nell'istante t_2^A. Il tempo si misura sullo stesso orologio, di modo che non è necessaria nessuna sincronizzazione. Dividendo il tragitto $2l$ per il tempo $t_2^A - t_1^A$, troviamo la velocità media della luce $c = 2l/(t_2^A - t_1^A)$. L'esperimento di Michelson e gli altri esperimenti hanno mostrato che questa velocità è una *costante universale.* Si può affermare ora che, *per definizione, la velocità della luce è la stessa nei due sensi di una direzione qualsiasi.* Si postula dunque la *sincronizzazione degli orologi* e si introduce il *concetto di simultaneità.* Si può parlare ora di velocità di spostamento *in un*

senso dato, poiché si può misurare il tempo di percorso per mezzo di due orologi sincronizzati situati in punti diversi dello spazio.

Enunciamo ora definitivamente la *regola di sincronizzazione degli orologi di Einstein. Supponiamo che in punti fissi A e B* (fig. 326) *siano disposti orologi identici. Dal punto A, nell'istante t_1^A indicato dall'orologio A, inviamo un impulso luminoso in direzione di uno specchio disposto nel punto B. Supponiamo inoltre che l'impulso riflesso ritorni ad A nell'istante t_2^A (indicato dall'orologio A). Quando l'impulso luminoso arriva in B, regoliamo l'orologio situato in B sul tempo* $t^B = 1/2(t_1^A + t_2^A)$. *Per definizione, gli orologi situati in A e B sono allora sincronizzati.*

Esiste un altro metodo di sincronizzazione equivalente a quello precedente. *A metà di un segmento di retta AB facciamo partire un breve impulso luminoso. All'istante dell'arrivo dell'impulso luminoso in A ed in B mettiamo gli orologi alla stessa ora il che assicura la loro sincronizzazione.*
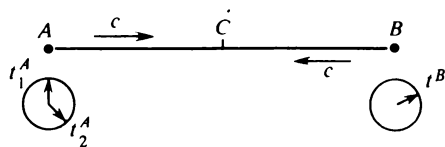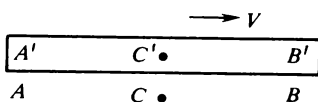
Fig. 326 Fig. 327

Ma gli orologi A e B si possono sincronizzare non soltanto direttamente, ma anche mediante un terzo orologio C. Sincronizziamo prima, per mezzo di uno dei metodi menzionati, gli orologi A e C e poi gli orologi B e C. Postuliamo che gli orologi A e B siano allora sincoronizzati. Quest'affermazione, come mostrano tutte le conseguenze che derivano da essa, non porta a contraddizioni e concorda con l'esperienza. Si ottiene così un *sistema di riferimento spazio-temporale a tempo unico* in cui gli orologi sono sincronizzati secondo la regola di Einstein. *Due eventi spazialmente separati in questo sistema di riferimento sono detti simultanei se gli orologi situati nei punti dove hanno luogo questi eventi indicano lo stesso tempo.*

4. *La simultaneità è un concetto relativo,* cioè due eventi simultanei in un sistema di riferimento inerziale possono non esserlo in un altro sistema di riferimento inerziale. Spieghiamo questa proposizione mediante un esperimento immaginario. Sulla superficie terrestre un treno $A'B'$ si muove di moto rettilineo ed uniforme con velocità V (fig. 327). Prendiamo come sistema di riferimento S' in moto un sistema solidale al treno. Consideriamo come sistema fisso S il binario ferroviario. Supponiamo che un fulmine colpisca le due estremità A' e B' di treno e lasci tracce A e B sul binario ferroviario. Indichiamo il centro del treno con il punto C' e il centro dell'intervallo AB sul binario con il punto C. Supponiamo inoltre che la luce dei fulmini arrivi simultaneamente nel punto C. Nel sistema di riferimento S i colpi di fulmine sulle estremità del treno sono eventi simultanei.

Ma nell'istante in cui la luce di entrambi i lampi si incontra, il punto C' si trova a destra dal punto C. In questo istante il segnale luminoso proveniente da B' è già passato attraverso il punto C', ma il segnale emesso da A' non è ancora arrivato al punto C'. Quindi, dal punto di vista di un osservatore che si trova nel sistema S', il fulmine ha colpito il punto B' prima del punto A'.

È ora chiaro come si può risolvere il paradosso menzionato al punto 1. La luce raggiunge la superficie sferica Σ simultaneamente nel sistema di riferimento S e non simultaneamente nel sistema S'. Analogamente, la luce arriva alla superficie sferica Σ' simultaneamente nel sistema di riferimento S' e non simultaneamente per un osservatore che si trova nel sistema di riferimento S.

La fisica prerelativistica si sviluppava con successo ammettendo che il tempo e la simultaneità fossero *assoluti,* cioè gli stessi in tutti i sistemi di riferimento. Ma ciò funziona fino a che le velocità considerate sono *piccole.* La propagazione della luce è un processo rapido e perciò proprio nell'ottica la fisica incontrò le difficoltà di principio che poterono essere superate solo grazie alla teoria della relatività.

§ 105. *Trasformazione delle coordinate e del tempo nella teoria della relatività*

1. Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali S e S', il secondo dei quali sia animato da un moto rettilineo ed uniforme rispetto al primo con velocità V; ne segue che il primo sistema si muove rispetto al secondo con la velocità $-V$. In ogni sistema di riferimento sono disposti molti orologi identici che sono immobili rispetto a questo sistema di riferimento e sincronizzati secondo la regola di Einstein. Siano x, y, z, t le coordinate ed il tempo di un evento qualsiasi (per esempio l'urto di due palline) nel sistema di riferimento S, e x', y', z', t' le coordinate ed il tempo dello stesso evento nel sistema di riferimento S'. Conoscendo i valori di x, y, z, t, calcolare i valori di x', y', z', t' o viceversa. La soluzione di questo problema è basata sull'ipotesi che lo spazio sia *omogeneo* ed *isotropo* e che il tempo sia *omogeneo* [1]. L'omogeneità dello spazio e del tempo significa che tutti i punti dello spazio e tutti gli istanti di tempo sono assolutamente equivalenti sia nel sistema S, sia in quello S'. L'isotropia dello spazio significa, invece, l'equivalenza totale di tutte le direzioni spaziali nei sistemi di riferimento S e S'. In virtù dell'omogeneità e dell'isotropia dello spazio e del tempo la relazione tra x, y, z, t e x', y', z', t' deve essere *lineare.*

---

[1] Queste proprietà non si possono considerare come tali a priori. Esse sono state stabilite e confermate con gli esperimenti, ma la loro spiegazione può essere evidentemente data solo dalla cosmologia durante gli studi dell'origine e dell'evoluzione dell'Universo.

Il problema delle trasformazioni puramente spaziali delle coordinate è trattato nella geometria analitica e perciò possiamo tralasciare questo problema e considerare quale ruolo gioca il moto uniforme relativo dei sistemi di riferimento nella trasformazione delle coordinate e del tempo. Per farlo è sufficiente considerare il caso particolare in cui le origini O ed O' dei sistemi coordinati S e S' coincidono ad un certo istante, che prendiamo come origine del tempo sia nel sistema S, che nel sistema S'. In questo caso la relazione tra x, y, z, t e x', y', z', t' sarà non soltanto lineare, ma anche *omogenea,* poiché a valori nulli dei parametri non accentati corrispondono valori nulli dei parametri accentati. Inoltre, gli assi X', Y', Z' del sistema coordinato S' si possono scegliere in modo che essi siano paralleli agli assi X, Y, Z del sistema coordinato S e, in particolare, l'asse X' coincida sempre con l'asse X (fig. 328).
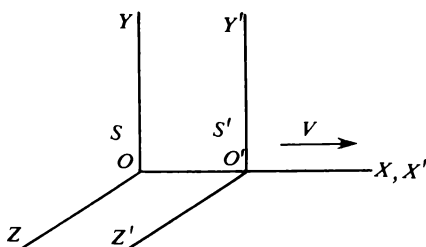
Fig. 328

2. Supponiamo che la velocità relativa V dei sistemi coordinati S e S' sia inferiore alla velocità della luce c ($V < c$). A questa condizione, dall'origine delle coordinate O ad un istante $t_1 > 0$ (indicato dall'orologio del sistema S) venga inviato un segnale luminoso nel senso positivo dell'asse X. Supponiamo inoltre che questo segnale arrivi al punto O' ad un istante t' (indicato dall'orologio del sistema di riferimento S'). Essendo lineare la relazione tra le coordinate ed il tempo nei sistemi di riferimento S e S', il tempo t' deve essere espresso linearmente in termini di t_1. Ad un valore nullo di t_1 corrisponde un valore nullo di t', poiché all'istante $t = t'$ le origini O ed O' coincidono. Si avrà dunque

$$t' = kt_1, \tag{105.1}$$

dove k è un coefficiente. In virtù dell'isotropia dello spazio questo coefficiente può dipendere soltanto dal valore assoluto della velocità V e non dal suo senso.

Esprimiamo il coefficiente k in termini della velocità V. Supponiamo che nel punto O' il segnale luminoso si rifletta propagandosi nel senso inverso e ritorni al punto O nell'istante t_2 (indicato dall'orologio del sistema S). Essendo i sistemi di riferimento S e S' assolutamente equivalenti, si

avrà allora

$$t_2 = kt', \tag{105.2}$$

dove k ha lo stesso valore della (105.1). Eliminando t', si ottiene

$$t_2 = k^2 t_1. \tag{105.3}$$

Secondo la regola di sincronizzazione di Einstein, il segnale luminoso inviato da O all'istante t_1 e ritornato all'istante t_2 si riflette nel punto O' all'istante

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1 + k^2}{2} t_1 \tag{105.4}$$

(indicato dall'orologio del sistema di riferimento S). La distanza x che percorre il punto O' durante il tempo t è uguale a $x = Vt$. La luce percorre la stessa distanza durante il tempo $t - t_1$, e quindi $x = c(t - t_1)$. Dunque, si ha $Vt = c(t - t_1)$. Sostituendo qui il valore di t della formula precedente, si ottiene

$$V(k^2 + 1) = c(k^2 - 1), \tag{105.5}$$

da cui

$$\frac{V}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \tag{105.6}$$

$$k^2 = \frac{c + V}{c - V} = \frac{1 + V/c}{1 - V/c}. \tag{105.7}$$

Estraendo la radice quadrata dall'ultima espressione, si trova k e subito dopo si ottengono due formule ausiliarie

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad k - \frac{1}{k} = \frac{2V/c}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \tag{105.8}$$

che ci saranno necessarie in seguito. Tutte queste relazioni si verificano solo a condizione che $V < c$.

Osserviamo in particolare che dalle formule (105.1) e (105.4) segue che

$$\frac{t'}{t} = \frac{2k}{k^2 + 1} = \sqrt{1 - (V/c)^2}, \tag{105.9}$$

da cui $t' < t$. La quantità t è il tempo durante il quale il punto O' si sposta dal punto fisso O fino ad un punto in cui lo raggiunge il segnale luminoso; t è misurato sull'orologio « fisso », cioè su quello che si trova nel sistema di riferimento S. Il tempo t' indica lo stesso tempo ma misurato sull'orologio « mobile » del sistema di riferimento S'. Quindi, i tempi t e t' rappresentano gli intervalli di tempo che trascorrono tra gli stessi eventi, ma misurati rispettivamente nel sistema di riferimento « fisso » S ed in quello

« mobile » S'. La formula (105.9) mostra che l'orologio mobile marcia più lentamente di quello fisso. Discuteremo questo fenomeno in seguito da diversi punti di vista; per ora ritorniamo al problema della trasformazione delle coordinate e del tempo.

3. Supponiamo che sull'asse X si sia prodotto un evento A, per esempio una collisione di due palline (fig. 329). Nel sistema di riferimento S quest'evento è caratterizzato dall'ascissa x e dall'istante t. Nel sistema di riferimento S' l'ascissa ed il tempo dello stesso evento sono rispettivamente x' e t'. Consideriamo un segnale luminoso inviato dall'origine delle coordinate O verso il luogo A dell'evento (fig. 329, a). Per percorrere la distanza OA il segnale luminoso impiega un tempo x/c. Perché questo segnale arrivi al punto A nell'istante t, esso deve essere emesso da O all'istante $t_1 = t - x/c$. Per percorrere la distanza $O'A$ lo stesso segnale impiega il
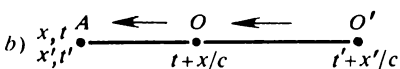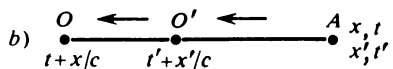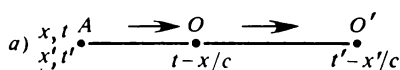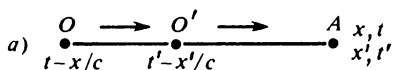
Fig. 329

Fig. 330

tempo x'/c, di modo che esso passa per il punto O' nell'istante $t_1' = t' - x'/c$. Per definizione di coefficiente k, $t_1' = kt_1$ o $t' - x'/c = k(t - x/c)$. Riflettiamo ora il segnale luminoso nel punto A in senso inverso (fig. 329, b). Esso passerà per il punto O' all'istante $t_2' = t' + x'/c$ e per il punto O all'istante $t_2 = t + x/c$. Abbiamo dunque invertito i ruoli giocati dalle grandezze con apice o senza, ed in base alla stessa definizione di coefficiente k si può scrivere $t_2 = kt_2'$ o $t + x/c = k(t' + x'/c)$. Si ha quindi

$$t' - x'/c = k(t - x/c), \qquad k(t' + x'/c) = t + x/c. \qquad (105.10)$$

Le relazioni ottenute sono valide in ogni punto dell'asse X. Supponiamo, per esempio, che l'evento A sia avvenuto a sinistra dei punti O ed O' (fig. 330, a). Inviamo dal punto, dove ha avuto luogo l'evento, un segnale luminoso diretto verso il lato destro. Visto che ora x e x' sono negative, il segnale raggiungerà i punti O ed O' negli istanti successivi $t - x/c$ e $t' - x'/c$. In base alla definizione di coefficiente k scriviamo $t' - x'/c = k(t - x/c)$; ma questa è la prima relazione (105.10). Inviamo ora un segnale luminoso che si propaga da destra a sinistra (fig. 330, b). Supponiamo che esso arrivi nel punto A agli istanti t e t' misurati rispettivamente per mezzo degli orologi dei sistemi S e S'. Nei punti O ed O' il segnale arriva agli istanti $t + x/c$ e $t' + x'/c$, e quindi $t' + x'/c = k(t' - x'/c)$, cioè si ottiene la seconda relazione (105.10).

È molto istruttivo considerare tutte le disposizioni relative dei punti A, O, O' per assicurarsi che le relazioni (105.10) sono sempre verificate.

Dalle relazioni (105.10) troviamo

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)x - \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)ct, \\
t' &= \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)t - \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)\frac{x}{c},
\end{aligned}
\tag{105.11}
$$

o, in base alla (105.8),

$$
x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{105.12}
$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$
\beta = V/c. \tag{105.13}
$$

Abbiamo aggiunto qui le uguaglianze $y' = y$, $z' = z$ che mostrano che le coordinate trasversali y e z dell'evento considerato non si trasformano. Per dimostrare quest'ultima affermazione costruiamo nei sistemi di riferimento S e S', mediante lo stesso metodo, due aste rigide indentiche, fisse rispetto ai loro sistemi di riferimento. Mettiamole con un'estremità sull'asse X parallelamente agli assi Y e Y' (fig. 331). Le lunghezze y e y'
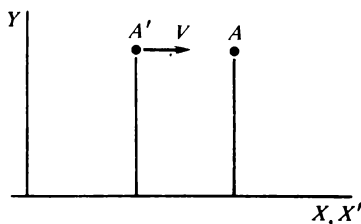
Fig. 331

delle aste, misurate rispettivamente nei sistemi di riferimento S e S', sono evidentemente uguali, ma ciò non significa ancora che la seconda equazione (105.12) sia verificata. È ancora necessario dimostrare che y e y' si possano considerare come coordinate di *uno stesso evento*. Per dimostrarlo fissiamo alle estremità libere delle aste le piccole palline A ed A'. Poniamo che all'inizio la pallina A' si trova a sinistra della pallina A. Affermiamo che, messa in moto, la pallina A' entrerà necessariamente in collisione con la pallina A. Infatti, se la pallina in moto passasse sopra o sotto quella fissa, i sistemi di riferimento S e S' non sarebbero equivalenti. Ma se le palline si urtano, y e y' diventano le coordinate dello stesso evento, collisione delle palline, e si può considerare dimostrata la seconda equazione (105.12). Nello stesso modo si dimostra la terza equazione (105.12).

Proprio le formule (105.12) risolvono il problema della trasformazione delle coordinate e del tempo nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro. Esse si dicono *trasformazione di Lorentz* (questa denominazione è stata introdotta da Poincaré), che le stabilì nel 1904. Larmor aveva stabilito queste stesse formule nel 1900. Sia Larmor, sia Lorentz credevano all'esistenza dell'etere universale fisso, e per essi il tempo vero era il tempo t misurato nel sistema di riferimento in cui l'etere è in riposo. La quantità t' rappresentava il tempo soltanto formalmente: quest'era una variabile matematica introdotta in modo che fosse verificata l'invarianza delle equazioni dell'elettrodinamica nel passaggio dalle variabili x, y, z, t alle variabili x', y', z', t'. La dimostrazione delle formule di Lorentz che abbiamo appena dato, nonché l'interpretazione del loro vero significato vennero concepite nel 1905 da Einstein. Nella sua teoria tutti i sistemi di riferimento inerziali sono perfettamente equivalenti e la quantità t' è un tempo vero quanto lo è il tempo t. Questo fatto appare chiaramente, se le equazioni (105.12) vengono risolte rispetto a x, y, z, t. Si ottengono così le formule di « trasformazione inversa »

$$x = \frac{x' + Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad (105.14)$$

che hanno la stessa forma della « trasformazione diretta ». Come ci si doveva aspettare, le formule (105.14) si deducono dalle formule (105.12) per semplice sostituzione di V con $-V$.

Le formule (105.12) e (105.14) per $\beta > 1$ fornirebbero valori immaginari delle coordinate e del tempo. È quindi privo di senso parlare del moto di un sistema di riferimento con velocità V superiore alla velocità della luce c. Ne segue che la velocità di ogni corpo non può essere superiore a c, poiché ad ogni corpo si può attaccare un sistema di riferimento.

Nel caso di moti lenti per i quali $(V/c)^2 \ll 1$ e $Vv/c^2 \ll 1$ (v è la velocità dei corpi mobili), la trasformazione di Lorentz, come ci si doveva aspettare, al limite diventa la trasformazione di Galileo.

4. Nella fisica prerelativistica lo spazio ed il tempo erano concetti *indipendenti.* Si ammetteva che la distanza tra due punti dello spazio (più esattamente la distanza tra due punti materiali considerati ad un istante dato), nonché gli intervalli di tempo tra due eventi fossero gli stessi in tutti i sistemi di riferimento. In altre parole, si supponeva che entrambe queste grandezze fossero *invarianti* nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro. Nella teoria della relatività questa invarianza scompare, e invece di due invarianti, spaziale e temporale, esiste un solo invariante, l'*invariante spazio-temporale.* È facile trovarlo, moltiplicando a membro a membro le equazioni (105.11), ottenendo

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = \text{Inv.} \qquad (105.15)$$

Per comodità scriviamo questa formula, utilizzando nuove variabili tem-

porali

$$\tau = ct, \qquad \tau' = ct', \tag{105.16}$$

aventi la dimensione di una lunghezza. L'introduzione di queste nuove variabili significa che gli intervalli di tempo sono ora misurati con le stesse unità usate per le distanze spaziali: l'unità di tempo è il tempo che impiega la luce per percorrere l'unità di lunghezza. Con le nuove variabili la (105.15) si scrive

$$\tau^2 - x^2 = \tau'^2 - x'^2 = \text{Inv}. \tag{105.17}$$

Tenendo ora conto del fatto che con gli orientamenti degli assi coordinati adottati $y' = y$, $z' = z$, si ottiene

$$\tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \tau'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \text{Inv}. \tag{105.18}$$

In questa forma l'invariante spazio-temporale (105.18) non dipende dall'orientamento relativo dei sistemi di riferimento S e S', né dal senso della velocità V. Tuttavia nella formula (105.18) si suppone che uno degli eventi sia dato. Questo evento dato è rappresentato dalla coincidenza delle origini delle coordinate O ed O'. Per eliminare questa limitazione scriviamo la (105.18) nella forma

$$\Delta\tau^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \Delta\tau'^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = \text{Inv}, \tag{105.19}$$

dove $\Delta\tau$, Δx, ..., $\Delta\tau'$, $\Delta x'$, ... rappresentano le differenze tra i tempi e le coordinate spaziali degli eventi 1 e 2 nei sistemi di riferimento S e S':

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1,$$
$$\Delta\tau' = \tau_2' - \tau_1', \quad \Delta x' = x_2' - x_1', \quad \Delta y' = y_2' - y_1', \quad \Delta z' = z_2' - z_1'.$$

La radice quadrata dell'invariante (105.19) si dice *intervallo tra gli eventi considerati* e nel seguito viene indicato con s_{12} o Δs. Il quadrato dell'intervallo tra gli eventi 1 e 2 può evidentemente essere scritto

$$s_{12}^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2 - l_{12}^2 = (\tau_2' - \tau_1')^2 - l_{12}'^2, \tag{105.20}$$

dove l_{12} e l_{12}' sono le distanze tra i punti in cui si sono prodotti gli eventi rispettivamente nei sistemi di riferimento S e S'.

Si possono introdurre anche nelle formule di trasformazione di Lorentz i parametri τ e τ' al posto di t e t'. Limitandoci al caso particolare rappresentato in figura 328, riscriviamo le formule (105.12) nella forma

$$x' = \frac{x - \beta\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad \tau' = \frac{\tau - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{105.21}$$

Se si prende come unità la velocità della luce c, la quantità β rappresenta la velocità del sistema di coordinate mobile.

Minkowski (1864-1909) per descrivere gli eventi spazio-temporali ha in-

trodotto una terminologia geometrica, chiamando l'insieme dei valori di τ, x, y, z che caratterizzano il tempo ed il luogo dell'evento, *punto d'universo*. L'insieme dei punti d'universo è uno spazio a quattro dimensioni detto *spazio-tempo* o *universo di Minkowski*. Una linea tracciata nello spazio-universo di Minkowski si dice *linea d'universo*. L'intervallo tra due eventi è adottato come *distanza invariante* tra i corrispondenti punti d'universo. In base a queste concezioni fu elaborato il calcolo tensoriale nello spazio-universo di Minkowski che è analogo al calcolo tensoriale della geometria euclidea. Esso è uno strumento matematico adeguato alla teoria della relatività ristretta.

5. Gli intervalli tra gli eventi si possono dividere in *intervalli reali* ed in *intervalli puramente immaginari*. Data l'invarianza dell'intervallo, questa suddivisione *non dipende dalla scelta del sistema di riferimento*.

Domandiamo se si può trovare un sistema di riferimento tale che gli eventi 1 e 2 siano *monolocalizzati*, cioè si producano in uno stesso punto dello spazio? Se S' rappresenta un tale sistema, in esso $l'_{12} = 0$, ed in base alla (105.20) il quadrato dell'intervallo può essere rappresentato nella forma $s_{12}^2 = (\tau_2^2 - \tau_1')^2$. Ne segue che $s_{12}^2 > 0$, cioè è necessario che l'intervallo s_{12} sia reale. Per dimostrare che questa condizione è sufficiente si può, senza perdere in generalità, utilizzare la trasformazione di Lorentz particolare (105.21). Perché gli eventi che si producono nel sistema S' coincidano spazialmente, è sufficiente che sia verificata la condizione $\Delta x' = 0$, cioè $\Delta x = \beta\Delta\tau$. Questo risultato implica che il sistema S' debba spostarsi con velocità $\beta = \Delta x/\Delta\tau$. Ma per gli intervalli reali $|\Delta x| < \Delta\tau$, di modo che $|\beta| < 1$. Quindi, il sistema S' deve spostarsi con una velocità inferiore alla velocità della luce, e perciò questo sistema può essere realizzato. L'intervallo di tempo tra gli eventi monolocalizzati nel sistema di riferimento S' è $\Delta\tau' = |s_{12}|$, o in unità di misura ordinarie $\Delta t' = |s_{12}|/c$. Gli intervalli reali si dicono *intervalli di genere tempo*.

Vediamo ora se può esistere un sistema di riferimento tale che gli eventi 1 e 2 siano *simultanei*. Se S' è questo sistema di riferimento, si ha $\tau_2' - \tau_1' = 0$ e quindi, in base alla (105.20), dev'essere $s_{12}^2 = -l_{12}'^2$. Ciò significa che è necessario che l'intervallo s_{12} sia puramente immaginario. La sufficienza di questa condizione si dimostra come sopra. La distanza tra i punti, in cui hanno avuto luogo gli eventi simultanei 1 e 2 nel sistema S', è $l'_{12} = |s_{12}|$. Gli intervalli puramente immaginari si dicono *intervalli di genere spazio*.

Consideriamo infine il caso speciale in cui l'intervallo tra gli eventi è nullo. In questo caso, per rendere gli eventi monolocalizzati, si deve passare ad un sistema di riferimento che si sposta con la velocità della luce. Lo stesso è necessario perché gli eventi diventino simultanei. Nessuna di queste eventualità è realizzabile. Gli intervalli nulli si dicono intervalli *luminosi* e caratterizzano l'emissione di un segnale luminoso in un punto dato ed il suo arrivo in un altro punto dello spazio.

6. Nel caso della trasformazione di Lorentz particolare (105.21), corrispondente alla figura 328, tutti i risultati ottenuti si possono illustrare graficamente. Ciò è possibile perché è sufficiente limitarsi alla considerazione della trasformazione di una sola coordinata spaziale x e del tempo τ, cioè ragionare come se lo spazio-tempo di Minkowski fosse un *piano bidimensionale* (x, τ). Un evento arbitrario O (punto d'universo) in questo piano viene fatto coincidere con l'origine delle coordinate (fig. 332). Tracciamo per O due assi reciprocamente perpendicolari, uno dei quali coincida con l'asse spaziale x e l'altro con l'asse temporale τ nel sistema di riferimento S.
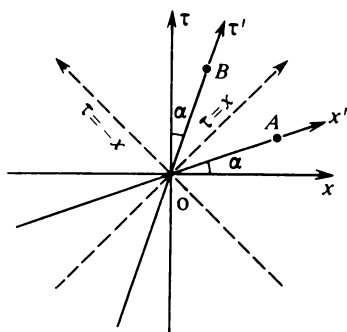
Fig. 332
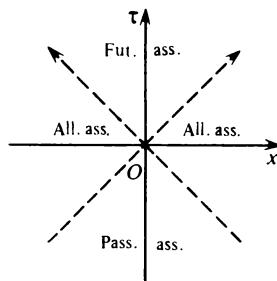
Fig. 333

Le rette tratteggiate $\tau = x$ e $\tau = -x$ sono le linee d'universo dei segnali luminosi che si propagano rispettivamente nei sensi positivo e negativo dell'asse X. Sia A un evento arbitrario. Uniamo i punti A ed O con la linea d'universo $\tau = x \operatorname{tg} \alpha$ che descrive il moto uniforme di un corpo lungo l'asse X con velocità β. Se $\beta < 1$, a questo corpo si può attaccare un sistema di riferimento S' e prendere la retta OA come asse spaziale X'. L'asse temporale τ' è definito dalla condizione $x' = 0$. Come segue dalla (105.21) questa sarà la linea d'universo $x = \beta\tau$, cioè la retta OB inclinata dello stesso angolo $\alpha = \operatorname{arctg} \beta$, formato con l'asse temporale τ. Nel nuovo sistema di riferimento gli eventi O ed A sono simultanei ma spazialmente distinti, mentre gli eventi O e B sono monolocalizzati ma non simultanei.

Rispetto all'evento O tutti gli eventi possono essere divisi in *eventi assolutamente lontani* e in *eventi assolutamente non simultanei* (cioè *assolutamente passati* ed *assolutamente futuri*), come è indicato in figura 333. Per il primo gruppo l'intervallo tra gli eventi è puramente immaginario e per il secondo gruppo esso è reale. La frontiera tra questi eventi è costituita dalle linee d'universo tratteggiate dei segnali luminosi che si propagano nei sensi positivo e negativo dell'asse spaziale. Nello spazio a quattro dimensioni di Minkowski questa frontiera è rappresentata da una varietà a tre dimensioni, e cioè il cono $\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, il cui asse è l'asse dei tempi τ. Questo cono è detto *cono di luce*.

Solo gli eventi il cui intervallo è di genere tempo possono essere legati da una relazione di causa ed effetto. Per esempio, l'evento O (fig. 332) potrebbe essere causa dell'evento B, poiché in ogni sistema di riferimento l'evento B è posteriore all'evento O. Ma due eventi non possono essere causa l'uno dell'altro, se l'intervallo tra essi è di genere spazio. Tali sono, per esempio, gli eventi O ed A (fig. 332). In un sistema di riferimento fisso S l'evento A è posteriore all'evento O. Nel sistema accentato (x', τ') questi eventi sono simultanei. Se si prende un sistema di riferimento che si muove più rapidamente del sistema (x', τ'), ma più lentamente della luce, il suo asse spaziale avrà un'inclinazione maggiore di quella dell'asse X'. In questo sistema di riferimento l'evento A precede l'evento O. Dunque, non si può soddisfare la condizione che in tutti i sistemi di riferimento la « causa » preceda l'« effetto » e ciò dimostra la nostra proposizione.

La retta OA d'equazione $\tau = \beta x$ è la linea d'universo di un moto che si svolge con velocità $x/\tau = 1/\beta$, cioè con una *velocità superiore alla velocità della luce.* L'esistenza di tali velocità non contraddice la teoria della relatività, che ammette l'esistenza di velocità qualsiasi. Ma se gli stati si propagano con velocità superiori alla velocità della luce, l'intervallo tra due stati qualsiasi sarà di genere spazio, e perciò ognuno di questi stati non può essere causa dell'altro. I processi di questo tipo non possono essere utilizzati come « segnali » per trasmettere l'informazione. *Nessun corpo e nessun segnale che trasmetta azioni può propagarsi con una velocità superiore alla velocità della luce nel vuoto. La velocità della luce nel vuoto è la velocità limite di propagazione delle interazioni* [1].

§ 106. *Contrazione delle lunghezze e dilatazione del tempo*

1. Se un'asta rigida è a riposo rispetto ad un sistema di riferimento, la sua lunghezza l_0 è determinata mediante il confronto con un campione di lunghezza a riposo rispetto allo stesso sistema di riferimento. La grandezza l_0 può essere detta *lunghezza propria dell'asta,* poiché essa non dipende dalla scelta del sistema di riferimento rispetto al quale l'asta è a riposo. Ma se l'asta è in moto, è necessario convenire che cosa s'intenda per lunghezza dell'asta in un sistema di riferimento fisso. Per evitare malintesi sottolineiamo espressamente che tutte le misure delle lunghezze e degli intervalli di tempo debbono essere effettuate per mezzo di aste campione e di orologi che sono *a riposo* rispetto a questo sistema di riferimento.

In un sistema di riferimento fisso si dice lunghezza l di un'asta mobile la

[1] Durante l'ultimo decennio si è discusso dell'eventuale esistenza di particelle superluminose ipotetiche, dette *tachioni.* È evidente che se queste particelle esistessero, esse non potrebbero servire da « segnali » per la trasmissione di interazioni. Per dettagli si veda V.A. Ugarov, *Teoria della relatività ristretta,* Casa Editrice «Nauka», Mosca, 1977 (in russo).

distanza tra due punti, appartenenti a questo sistema, davanti ai quali le estremità dell'asta passano simultaneamente. Per stabilire una relazione tra l e l_0 utilizzeremo il caso particolare della trasformazione di Lorentz (105.12). Supponiamo che l'asta sia a riposo nel sistema S' e si trovi sull'asse X'. La differenza $\Delta x'$ delle coordinate delle sue estremità nel sistema di riferimento S' definisce la lunghezza l_0 dell'asta a riposo. La differenza delle coordinate delle stesse estremità Δx nel sistema di riferimento S misurata ad uno stesso istante t è la lunghezza l dell'asta in moto. Ma dalla prima formula (105.12) per t = costante segue che $\Delta x' = \Delta x/\sqrt{1 - \beta^2}$, e quindi

$$l = l_0\sqrt{1 - \beta^2}. \tag{106.1}$$

Dunque, *la lunghezza dell'asta in moto è più piccola di quella dell'asta a riposo*. Questo fenomeno si dice *contrazione delle lunghezze di Lorentz*. Questo concetto è stato introdotto indipendentemente da Fitzgerald (1851-1901) e da Lorentz, per i quali quest'era un'ipotesi *ad hoc* specialmente inventata per spiegare il risultato negativo dell'esperimento di Michelson, benché Lorentz abbia cercato di giustificarla dal punto di vista della teoria elettronica. Nella teoria della relatività la contrazione di Lorentz ed il suo vero senso fisico non hanno bisogno di alcuna ipotesi supplementare, il che non esclude certamente la possibilità di un'interpretazione atomistica della contrazione di Lorentz, nonché del rallentamento degli orologi in moto del quale si dirà in seguito. Ma per questo si deve disporre non soltanto delle equazioni dell'elettrodinamica, ma anche delle leggi ancora sconosciute che determinano la struttura della materia. Quando queste leggi saranno stabilite, basandosi su esse si potrà anche considerare la questione delle variazioni di lunghezza e di tempo. Ma se la teoria della relatività è valida, il risultato di questa considerazione è noto a priori. Le leggi della natura debbono essere *invarianti rispetto alla trasformazione di Lorentz,* e perciò nel problema della contrazione delle lunghezze e della dilatazione dei tempi esse non possono fornire risultati differenti da quelli della teoria della relatività.

2. Consideriamo ora due eventi arbitrari l'intervallo tra i quali sia di genere tempo. Gli intervalli di tempo Δt e $\Delta t'$ tra questi eventi misurati nel sistema S « fisso » ed in quello S' « mobile » sono generalmente differenti. I due sistemi S e S' sono assolutamente equivalenti, cosicché tra Δt e $\Delta t'$ può esistere una relazione $\Delta t \lesseqgtr \Delta t'$ qualsiasi. Ammettiamo ora che il sistema di riferimento mobile S' sia tale che entrambi gli eventi avvengano *in un medesimo punto dello spazio.* (Nel caso di intervalli di genere tempo tale sistema esiste, cfr. il punto 5 del paragrafo precedente.) Il sistema S' diventa allora un sistema di riferimento inerziale privilegiato. Il tempo misurato in questo sistema verrà indicato con t_0, ed il tempo misurato nel sistema di riferimento « fisso » S con t. Per stabilire la relazione tra Δt e Δt_0 supporremo che nella (105.14) la coordinata x' sia costante, cioè la stessa

per entrambi gli eventi. Dall'ultima formula (105.14) otteniamo allora $\Delta t = \Delta t'/\sqrt{1 - \beta^2}$. Ma secondo la nostra definizione $\Delta t'$ è precisamente Δt_0, e per conseguenza

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}. \qquad (106.2)$$

Dalla (106.2) segue che $\Delta t_0 < \Delta t$, cioè l'*intervallo di tempo tra i due eventi è minore nel sistema di riferimento in cui questi eventi hanno luogo nello stesso punto.* Questo fenomeno si dice *rallentamento dell'orologio mobile.* La ragione di questa denominazione è la seguente. Poniamo un orologio in un certo punto del sistema di riferimento S'. Quest'orologio si dice « mobile », poiché esso si sposta con il sistema di riferimento S'. Al contrario, tutti gli orologi disposti nel sistema di riferimento S sono detti « fissi ». È chiaro che nel sistema S' due eventi qualsiasi, che si producono là dove si trova l'orologio « mobile », saranno localizzati nello stesso punto dello spazio, di modo che quest'orologio misurerà l'intervallo di tempo Δt_0. Qui gli istanti in cui si manifestano entrambi gli eventi sono registrati *sullo stesso orologio* (« mobile »), di modo che non è necessaria alcuna sincronizzazione. Al contrario, nel sistema di riferimento « fisso » S gli istanti, in cui si manifestano gli eventi, sono registrati da orologi situati in *differenti punti dello spazio.* Per misurare Δt si devono possedere *due orologi* sincronizzati conformemente alla regola di Einstein. Proprio a questo è dovuta l'*asimmetria* che si manifesta nella forma $\Delta t_0 < \Delta t$ nella misura del tempo per mezzo dell'orologio « mobile » e per mezzo dell'orologio « fisso ».

3. Supponiamo ora che una particella sia in moto rispetto al sistema di riferimento « fisso » S lungo una traiettoria curvilinea con una velocità v variabile in modulo. Nella teoria della relatività ristretta sono ammessi soltanto sistemi di riferimento spazio-temporali che si spostano rispetto a S in modo rettilineo ed uniforme. Prendiamo un numero infinito di questi sistemi di riferimento che si spostano con tutte le velocità possibili ed in tutte le direzioni. Il sistema di riferimento rispetto al quale la velocità istantanea della particella è nulla, nonché l'orologio che è legato a questo sistema di riferimento, sono detti *associati.* Spostandosi, la particella passa ininterrottamente da un sistema di riferimento associato ad un altro. Dividiamo la traiettoria della particella nel sistema di riferimento S in segmenti infinitamente corti, e sia dt il tempo impiegato nel sistema S per percorrere uno di questi segmenti. Secondo la (106.2), il tempo di percorso del segmento misurato per mezzo dell'orologio associato è $dt_0 = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$. L'intervallo di tempo finito registrato con l'orologio « fisso » è rappresentato dall'integrale

$$t_2 - t_1 = \int \frac{dt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (106.3)$$

esteso a tutta la traiettoria della particella.

Se l'orologio si sposta insieme con la particella, si deve stabilire una relazione tra la durata registrata su questo orologio con la durata registrata su un orologio associato. Non si può farlo *senza uno studio del funzionamento dell'orologio,* poiché il moto accelerato è accompagnato dall'apparizione di forze d'inerzia che esercitano una influenza sulla marcia dell'orologio. Per esempio, se viene messo in moto un orologio a molla, le forze d'inerzia possono deformare il bilanciere o le altre parti meccaniche dell'orologio. Le deformazioni possono essere tanto grandi che l'orologio s'arresterà o si romperà. Un orologio a pendolo non può misurare il tempo in assenza del campo gravitazionale. Il cuore di un organismo vivente (che può esser assimilato ad un orologio) cesserà di battere e l'organismo stesso morirà se gli si comunica un'accelerazione troppo grande, ecc. Ma in linea di principio è possibile pensare anche ad un orologio il cui funzionamento non sia molto sensibile all'azione delle forze gravitazionali ed inerziali. Conveniamo di chiamare quest'orologio *perfetto.* La durata che misura un orologio perfetto coincide con la durata misurata con un orologio associato. Questo permette, in linea di principio, di verificare se un orologio dato sia perfetto o non lo sia. È evidente che, nella formula (106.3), con t_0 si può intendere il tempo misurato *con un orologio perfetto che si sposta con la particella.* Questo tempo si dice *tempo proprio,* poiché esso è invariante, cioè non dipende dal moto della particella. Dalla formula (106.3) segue che le durate misurate mediante un orologio « fisso » e mediante un orologio « mobile », perfetti tutt'e due, sono legate dalla relazione

$$t_2 - t_1 > t_{02} - t_{01}. \qquad (106.4)$$

In particolare, se l'orologio ritorna alla sua posizione di partenza (rispetto al sistema di riferimento S), esso registrerà un tempo inferiore a quello registrato dall'orologio « fisso ».

4. La migliore approssimazione all'orologio perfetto è l'*orologio atomico* e specialmente l'*orologio nucleare.* Per la loro azione le forze d'inerzia sono equivalenti alle forze gravitazionali (cfr. il vol. I, § 71). In condizioni normali queste forze sono trascurabili rispetto alle forze elettriche ed ancor più rispetto alle forze nucleari che determinano i processi negli strati elettronici e nei nuclei degli atomi. Le forze d'inerzia e di gravitazione non partecipano praticamente a questi processi interatomici.

Consideriamo, per esempio, l'atomo di cesio-133 nell'*orologio campione atomico a cesio,* mediante il quale viene stabilito un campione di tempo determinato da una transizione elettronica ben definita. Per una convenzione adottata, la radiazione elettromagnetica emessa in assenza di campi esterni esegue $\nu = 9\ 192\ 631\ 770 \approx 10^{10}$ vibrazioni per secondo che viene detto *secondo atomico.* Il raggio dell'atomo è $\sim 10^{-8}$ cm. Se assimiliamo l'atomo ad un oscillatore armonico, le sue vibrazioni sono accompagnate da accelerazioni enormi $\sim (2\pi\nu)^2 r \sim 10^{13}$ cm/s^2. Se all'orologio viene comunicata un'accelerazione ~ 1 cm/s^2, per farlo sono necessarie forze di

10^{13} volte più deboli. È evidente che queste forze non potranno esercitare alcun'azione sostanziale sui processi interatomici. Soltanto durante misure di tempo con precisione relativa di $\sim 10^{-12}$-10^{-13}, queste accelerazioni ed i corrispondenti campi gravitazionali probabilmente potranno esercitare un'influenza sulla marcia dell'orologio e sulle sue indicazioni. Si deve allora tenerne conto. Da quanto è esposto sopra segue che, tra tutti gli orologi, quelli atomici e nucleari sono, a quanto pare, gli unici che potrebbero servire per misurare e studiare la dilatazione relativistica dei tempi, almeno a velocità piccole rispetto alla velocità della luce.

Il fenomeno della disintegrazione radioattiva degli atomi o di altre particelle instabili può assumere le funzioni di orologio perfetto. La disintegrazione radioattiva obbedisce alla legge

$$n = n_0 e^{-t/\tau}, \qquad (106.5)$$

dove n_0 è il numero di particelle e n il loro numero dopo un tempo t. La costante τ si dice *tempo di vita* della particella instabile considerata. Il rapporto n/n_0 definisce il tempo t. La dilatazione relativistica dei tempi è stata sperimentalmente confermata nella disintegrazione dei *mesoni* μ (*muoni*). Così si chiamano delle particelle cariche instabili la cui massa è di 207 volte più grande di quella dell'elettrone. La carica del muone è uguale a quella dell'elettrone, ma può essere sia positiva, sia negativa. I muoni si formano nei raggi cosmici ad altezze dell'ordine di 10 km. Il confronto delle intensità dei flussi di muoni nei raggi cosmici sulla sommità di una montagna ed ai suoi piedi ha mostrato che la vita media del muone nel sistema di riferimento del laboratorio è $\tau \approx 10^{-5}$ s. D'altra parte, i muoni cosmici si possono rallentare in un blocco di piombo e si possono separare i muoni lenti per mezzo di un dispositivo speciale. Secondo le misure, il tempo di vita di un muone lento (a riposo) è $\tau_0 \approx 2{,}20 \cdot 10^{-6}$ s. Se non esistesse la dilatazione relativistica dei tempi, il flusso di muoni cosmici, persino alla velocità della luce, diminuirebbe di e volte dopo un percorso di circa 600 m. Dopo un percorso di 5 km la loro intensità diminuirebbe di $e^{50/6} \approx 4000$ volte, cioè i muoni non potrebbero raggiungere la superficie terrestre. In realtà dopo un percorso di 5 km la loro intensità diminuisce all'incirca di $e^{5/3} \approx 5$ volte. La dilatazione relativistica dei tempi elimina questo disaccordo. Infatti, il tempo di vita τ di un muone nel sistema di riferimento del laboratorio è legato al tempo proprio di vita dalla relazione $\tau = \tau_0/\sqrt{1 - \beta^2}$. La misura dell'energia cinetica media dei muoni cosmici ha mostrato che essi possiedono un'energia di $\approx 10^9$ eV. In base a quest'energia è facile calcolare che $\sqrt{1 - \beta^2} \approx 0{,}1$. Ci si può dunque attendere che $\tau \approx 2{,}2 \cdot 10^{-6}/0{,}1 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ s. Questo risultato è confrontabile con quanto forniscono le misure.

5. La costruzione degli acceleratori di particelle cariche ha permesso di realizzare esperimenti di questo tipo in condizioni meglio definite e control-

late. Per realizzare questi esperimenti si è riscorsi ai *mesoni* π (o *pioni*), la cui massa è di 273 volte più grande di quella dell'elettrone e la carica è uguale a quella dell'elettrone. I pioni si formano in grande quantità durante l'interazione dei protoni di grande energia con la materia. La durata di vita media di un pione in un sistema di riferimento rispetto al quale esso è a riposo è $\tau_0 = 2{,}60 \cdot 10^{-8}$ s. Nel ciclotrone dell'Università di Columbia è stato prodotto un flusso di pioni animato di una velocità $v = 0{,}75$ s ($\beta = 0{,}75$). Se non esistesse la dilatazione relativistica dei tempi, durante il tempo τ_0 il fascio percorrerebbe una distanza uguale a $0{,}75 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}60 \cdot 10^{-8} = 5{,}85$ m. In realtà, come segue dalle misure, l'intensità del fascio diminuisce di e volte dopo un percorso di $8{,}5 \pm 0{,}6$ m, cioè nel sistema del laboratorio la durata di vita τ di un pione è di $1{,}45 \pm 0{,}11$ volte più grande della sua durata di vita propria τ_0. Questo risultato concorda bene con la formula $\tau/\tau_0 = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ che fornisce $\tau/\tau_0 = 1{,}51$.

I risultati di questi esperimenti possono essere interpretati come una manifestazione della *contrazione relativistica delle lunghezze*. Infatti, in un sistema di riferimento rispetto al quale il pione è a riposo, la sua durata di vita è τ_0. Il laboratorio si sposta rispetto al pione con una velocità v e durante il tempo τ_0 percorre una distanza $l = v\tau_0$ nel sistema di riferimento legato al pione. Se questa distanza è misurata per mezzo di un regolo graduato a riposo nel laboratorio, si troverà $l_0 = l/\sqrt{1 - \beta^2} = 8{,}8$ m il che è in accordo con l'esperienza.

6. Hafele e Keating hanno realizzato un esperimento per rivelare il rallentamento relativistico della marcia degli orologi *su scala macroscopica*. In quest'esperimento quattro orologi atomici al cesio identici sono stati installati nel 1971 a bordo di aerei a reazione che hanno volato attorno al globo terrestre nelle direzioni est ed ovest. Gli intervalli di tempo t_{est} e t_{ovest} misurati per mezzo degli orologi che si spostavano rispettivamente verso est e verso ovest, sono stati confrontati con gli intervalli di tempo t_{fisso} misurati per mezzo di orologi campione fissi che si trovavano all'Osservatorio Marittimo di Washington. Dopo aver calcolato la media delle indicazioni dei quattro orologi mobili, sono stati ottenuti i seguenti risultati:

$$t_{est} - t_{fisso} = (-59 \pm 10) \cdot 10^{-9}\ \text{s}, \qquad t_{ovest} - t_{fisso} = (273 \pm 7) \cdot 10^{-9}\ \text{s}.$$

Vediamo quali sono le previsioni della teoria della relatività. L'accelerazione del centro della Terra, determinata dall'attrazione gravitazionale del Sole è uguale a 0,18 dell'accelerazione dei punti dell'equatore terrestre, dovuta alla rotazione assiale della Terra. Benché quest'accelerazione non sia piccola, si può trascurarla in virtù del *principio dell'equivalenza delle forze di gravitazione e delle forze d'inerzia* (cfr. il vol. I, § 71). Se non si tiene conto della disomogeneità del campo gravitazionale del Sole l'azione di questo campo sarà completamente compensata dalla forza d'inerzia centrifuga dovuta alla rotazione del centro della Terra attorno al Sole. Si può

dunque ammettere che il centro della Terra esegua un moto rettilineo ed uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Ne segue che un sistema di riferimento non rotante avente il centro del Sole come origine delle coordinate sarà praticamente anch'esso un sistema di riferimento inerziale. Proprio quest'ultimo sistema di riferimento verrà utilizzato nei nostri ragionamenti. Supponiamo che gli aerei volino attorno al globo terrestre lungo un parallelo ad un'altezza h e con una velocità v rispetto alla Terra. Rispetto al sistema di riferimento inerziale scelto le velocità degli aerei sono: $V_{est} = V_0 + v$, $V_{ovest} = V_0 - v$, dove V_0 è la velocità del laboratorio terrestre nello stesso sistema di riferimento. Poniamo prima $h = 0$; se t_0 è il tempo proprio, si avrà allora

$$t_{fisso} = \int dt_0/\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \approx t_0 - \frac{V_0^2}{2c^2}\, t_0.$$

Analogamente,

$$t_{est} \approx t_0 - \frac{(V_0 + v)^2}{2c^2}\, t_0, \qquad t_{ovest} \approx t_0 - \frac{(V_0 - v)^2}{2c^2}\, t_0.$$

Sottraiamo da queste espressioni l'espressione precedente e teniamo conto del fatto che nelle formule finali, nei limiti di precisione dei calcoli, il tempo t_0 può essere sostituito con t_{fisso}. Si ottiene allora

$$t_{est} - t_{fisso} = -\frac{2V_0 v + v^2}{2c^2}\, t_{fisso}, \qquad t_{ovest} - t_{fisso} = \frac{2V_0 v - v^2}{2c^2}\, t_{fisso}. \qquad (106.6)$$

È evidente che per t_{fisso} s'intende il tempo di volo degli aerei *senza tener conto della durata delle soste,* poiché il tempo di sosta non esercita alcun'influenza sul valore delle differenze $t_{est} - t_{fisso}$ e $t_{ovest} - t_{fisso}$.

Supponiamo che l'aereo voli attorno al globo terrestre in 24 ore. Per la latitudine di Washington la sua velocità dev'essere uguale a $v = V_0 \approx 1000$ km/h ≈ 300 m/s. Le formule (106.6) forniscono allora i seguenti valori $t_{est} - t_{fisso} \approx -130 \cdot 10^{-9}$ s, $t_{ovest} - t_{fisso} \approx +43 \cdot 10^{-9}$ s.

Il calcolo riportato non tiene conto dell'influenza del *potenziale gravitazionale della Terra* sull'andamento di tempo (cfr. il § 109, nonché il vol. I, § 72). Se si tiene conto di questo fatto, entrambe le espressioni (106.6) debbono essere aumentate di

$$\Delta t_{grav} = \frac{gh}{c^2}\, t_{fisso}, \qquad (106.7)$$

dove h è l'altitudine di volo e g l'accelerazione di caduta libera alla superficie della Terra. Ponendo $h = 10$ km, nell'esempio riportato sopra si ottiene $\Delta t_{grav} = 94 \cdot 10^{-9}$ s, cioè l'« effetto di gravitazione » è dello stesso ordine della grandezza dell'« effetto cinematico » del quale abbiamo tenuto

conto sopra. Hafele e Keating hanno effettuato i calcoli tenendo conto di questa correzione e calcolarono l'integrale secondo i tragitti reali degli aerei, ottenendo i seguenti valori teorici:

$$t_{est} - t_{fisso} = (-40 \pm 23)\cdot 10^{-9}\ s, \quad t_{ovest} - t_{fisso} = (275 \pm 21)\cdot 10^{-9}\ s,$$

che sono in buon accordo con i rusultati sperimentali. Osserviamo che la correzione Δt_{grav} è eliminata dalla differenza ($t_{ovest} - t_{est}$). Questa differenza è dovuta soltanto all'« effetto cinematico » della dilatazione dei tempi. La coincidenza dei risultati teorici con quelli sperimentali costituisce una prova evidente del rallentamento relativistico della marcia degli orologi in moto.

7. Esaminiamo per concludere il cosiddetto *paradosso dei gemelli.* Il gemello A resta sulla Terra ed il gemello B intraprende un viaggio a bordo di una nave interstellare la cui velocità è vicina alla velocità della luce. Dopo cinque anni (secondo il suo orologio) il gemello B ritorna alla Terra e ritrova suo fratello A diventato un vecchio decrepito. B apprende che secondo l'orologio rimasto a Terra, il suo viaggio è durato 50 anni terrestri. Così, diventa possibile effettuare, durante una vita umana, non soltanto viaggi nelle profondità del Cosmo, ma anche un *viaggio nel futuro.* Se astraiamo dai lati tecnico e pratico del problema, questi viaggi sono in linea di principio realizzabili. Infatti, i processi biologici non rappresentano un gruppo di fenomeni naturali particolare. Come tutti gli altri fenomeni naturali, essi obbediscono alle leggi della fisica. Se a bordo di una nave interstellare vengono create condizioni vicine a quelle della vita terrestre, i processi vitali su questa nave si svilupperanno come sulla Terra. I battiti del cuore assumono nell'organismo umano il ruolo d'orologio. Durante una vita umana il cuore esegue sulla Terra $2\cdot 10^9$ battiti, e lo stesso numero di battiti eseguirà a bordo della nave spaziale. Ma un orologio in moto marcia più lentamente di un orologio fisso. Se durante il viaggio il cuore del gemello B esegue $1{,}5\cdot 10^8$ battiti, il cuore del fratello restato a Terra avrà eseguito, al momento del loro incontro, 10 volte più battiti. Questo è appunto il « paradosso dei gemelli ».

Nel 1974 il paradosso dei gemelli è stato sperimentalmente verificato sull'acceleratore del CERN (Centro europeo di ricerche nucleari di Ginevra). I mesoni μ accelerati erano mantenuti durante più di $150 \mu s$ su un'orbita circolare di 5 m di raggio mediante un campo magnetico. Durante questo periodo di tempo essi eseguivano più di 10^5 giri. L'energia dei mesoni era press'a poco 12 volte superiore alla loro energia a riposo, di modo che $1/\sqrt{1 - \beta^2} = 12$. Perciò il tempo di vita dei muoni che ci si aspetta nel sistema di riferimento del laboratorio dev'essere $2{,}2\cdot 12 = 26{,}4\ \mu s$. Il risultato sperimentale fu $26{,}37 \pm 0{,}05\ \mu s$.

§ 107. *Effetto Doppler ed aberrazione della luce*

1. Se un'onda monocromatica, che si propaga in un sistema di riferimento « fisso » S secondo una direzione data, possiede una frequenza ω, in un sistema di riferimento « mobile » S' la stessa onda possiede un'altra frequenza ω' e si propaga in un'altra direzione. La variazione della frequenza di un'onda che si manifesta nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro si dice *effetto Doppler* (1803-1853) ed il cambiamento della sua direzione è detto *aberrazione della luce.* Esponendo la teoria di questi fenomeni, ci limitiamo al caso in cui l'onda luminosa si propaga nel *vuoto,* poiché in entrambi i sistemi di riferimento lo spazio in cui si propaga l'onda sarà allora *isotropo.* In presenza di un mezzo materiale l'isotropia si conserverà soltanto nel sistema di riferimento rispetto al quale il mezzo è a riposo. Nel sistema di riferimento rispetto al quale il mezzo è in moto appare un'anisotropia che complica la teoria dell'effetto Doppler e dell'effetto d'aberrazione nei mezzi materiali.

Nella teoria relativistica le variazioni della frequenza e della direzione di propagazione di un'onda si possono determinare nel modo più semplice dalla condizione di *uguaglianza delle fasi* di una data onda in entrambi i sistemi di riferimento. Supponendo che l'onda sia piana, questa condizione può essere scritta come segue:

$$\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = \omega' t' - \mathbf{k}'\mathbf{r}', \tag{107.1}$$

dove $\mathbf{r}$, t e $\mathbf{r}'$, t' sono le coordinate ed il tempo di uno stesso evento nei sistemi di riferimento considerati, ed inoltre l'origine del tempo è scelta di modo che nell'istante in cui le origini delle coordinate di entrambi i sistemi di riferimento coincidono, $t = t' = 0$.

Per dimostrare la condizione enunciata, supponiamo che, alle origini delle coordinate nell'istante $t = t' = 0$, sull'onda sia stato fatto un marchio che l'onda trasporta con velocità di fase; la fase delle vibrazioni nel punto dove si appone il marchio sarà uguale a $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$ in entrambi i sistemi di riferimento. Immaginiamo ora due osservatori A ed A' che si spostano arbitrariamente nello spazio; l'osservatore A per determinare la sua posizione nello spazio e nel tempo utilizza le coordinate e l'orologio del sistema di riferimento S e l'osservatore A' utilizza le coordinate e l'orologio del sistema di riferimento S'. Si può per esempio supporre, senza perdere di generalità, che l'osservatore A sia a riposo nel sistema di riferimento S e l'osservatore A' lo sia nel sistema di riferimento S'. Quest'ipotesi non è necessaria in questa forma speciale. (Di solito, quando si studia l'effetto Doppler, il sistema S è solidale alla sorgente luminosa ed il sistema S' all'osservatore.) Entrambi gli osservatori cominciano a contare le onde che passano dall'istante in cui davanti a loro passa il marchio, e dopo un certo tempo i due osservatori s'incontrano. Indichiamo con $\mathbf{r}$, t le coordinate ed

il tempo di quest'evento nel sistema S, e con r', t' nel sistema S'. L'osservatore A scoprirà che nell'istante del suo incontro con A' la fase della vibrazione che passa davanti a lui sarà $\varphi_2 = \omega t - kr$ ed ha già contato un numero N di onde

$$N = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} = \frac{\omega t - kr}{2\pi}.$$

L'osservatore A' scoprirà che all'istante dell'incontro davanti a lui sono passate

$$N' = \frac{\omega' t' - k'r'}{2\pi}$$

onde. Ma il numero di onde passate non può dipendere da quale persona le conta, e quindi

$$N = N', \quad \text{o} \quad \omega t - kr = \omega' t' - k'r',$$

come si doveva dimostrare.

Per stabilire le formule delle trasformazioni relativistiche della frequenza e della direzione di propagazione dell'onda, è sufficiente esprimere nella formula (107.1) le variabili $r(x, y, z)$ e t in funzione delle variabili $r'(x', y', z')$ e t', utilizzando a questo scopo le formule di trasformazione di Lorentz (105.14). Dopo aver realizzato questa trasformazione ed identificando i coefficienti delle stesse variabili, si ottiene

$$\omega' = \frac{\omega - k_x V}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{107.2}$$

$$k'_{x'} = \frac{k_x - \omega V/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_{y'} = k_y, \quad k'_{z'} = k_z. \tag{107.3}$$

In modo analogo si ottengono le formule di trasformazione inversa

$$\omega = \frac{\omega' + k'_{x'} V}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{107.4}$$

$$k_x = \frac{k'_{x'} + \omega V/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k_y = k'_{y'}, \quad k_z = k'_{z'}. \tag{107.5}$$

Le formule (107.2) e (107.4) descrivono l'effetto Doppler, mentre le formule (107.3) e (107.5) descrivono l'aberrazione della luce.

2. Consideriamo il caso particolare in cui l'onda si propaga lungo l'asse X. In questo caso poniamo nella formula (107.2) $k_x = \omega/c$ ed otteniamo

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \tag{107.6}$$

La variazione di frequenza in questo caso è detta *effetto Doppler longitudinale*. È chiaro che il risultato (107.6) può essere dedotto dalla formula generale (107.4). Se l'osservazione è effettuata nel sistema di riferimento S', la frequenza dell'onda diminuisce quando questo sistema si sposta nel senso di propagazione dell'onda, ed aumenta se esso si sposta incontro all'onda. Nel caso di uno spostamento lento, si possono trascurare i quadrati del rapporto $\beta \equiv V/c$, la formula (107.6) diventa

$$\omega' \approx \omega(1 - \beta) = \omega(1 - V/c). \tag{107.7}$$

3. Consideriamo ora un altro caso particolare in cui l'osservazione è effettuata nel sistema di riferimento S' perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda. In questo caso è preferibile utilizzare la formula (107.4), ponendo in essa $k'_{x'} = 0$. Ciò dà

$$\omega' = \omega\sqrt{1 - \beta^2} \approx \omega(1 - \beta^2/2). \tag{107.8}$$

Si ha uno spostamento della frequenza verso la *regione delle grandi lunghezze d'onda* al secondo ordine in β. Quest'è un effetto puramente relativistico sconosciuto nella teoria classica prerelativistica, che si dice *effetto Doppler trasverso.*

Per precisare il significato fisico dell'effetto Doppler trasverso supponiamo che davanti all'osservatore passi un treno d'onde composto di N onde. Servendosi del suo orologio, l'osservatore misura la durata del passaggio di questo treno d'onde e la indica con t'. È evidente che $\omega' = 2\pi N/t'$. Misuriamo la durata del passaggio di questo treno d'onde con l'orologio del sistema di riferimento S. Per farlo è necessario segnare le indicazioni dell'orologio negli istanti di passaggio delle estremità del treno davanti all'osservatore. La differenza di queste indicazioni determina la durata t del treno d'onde misurata dall'orologio del sistema di riferimento S. Si può di nuovo scrivere $\omega = 2\pi N/t$ e di conseguenza $\omega'/\omega = t/t'$. Il tempo t' è misurato da *uno stesso orologio* fisso rispetto all'osservatore, mentre il tempo t è misurato da *orologi differenti* e sincronizzati nel sistema di riferimento S. Perciò l'orologio dell'osservatore deve essere considerato « fisso » e tutti gli orologi del sistema di riferimento S debbono essere considerati « mobili » (cfr. il § 106, punto 2). Ma un orologio in moto marcia più lentamente di quello fisso, con $t/t' = \sqrt{1 - \beta^2}$, e quindi $\omega' = \omega\sqrt{1 - \beta^2}$. Dunque, l'effetto Doppler trasverso non è altro che una manifestazione dell'effetto relativistico di *rallentamento della marcia di un orologio in moto.* Lo stesso effetto è responsabile dell'apparizione del termine $\sqrt{1 - \beta^2}$ nelle formule (107.2) e (107.4).

4. L'effetto Doppler trasverso è stato per la prima volta osservato nel 1938 da Ives e Stillwell che ricominciarono i loro esperimenti nel 1941. Come sorgente di luce, utilizzarono un fascio di raggi canale composti di atomi d'idrogeno animati da una grande velocità $v \sim 10^8$ cm/s. Una costru-

zione speciale del tubo assicurava una buona uniformità della velocità v dei raggi canale; questa velocità veniva calcolata mediante la differenza di potenziale applicato agli elettrodi ed il valore dell'effetto Doppler longitudinale. La luce emessa dagli atomi in moto, perpendicolarmente alla loro direzione di propagazione, cadeva in uno spettrografo. Secondo la stima degli sperimentatori, lo spettrografo permetteva di misurare lunghezze d'onda con una precisione di 0,00025 nm. La principale difficoltà di quest'esperimento stava nel fatto che è sufficiente una piccola deviazione e la direzione del fascio di raggi canale non è più rigorosamente perpendicolare alla linea d'osservazione; lo spostamento Doppler perpendicolare, essendo proporzionale a $(v/c)^2$, poteva essere mascherato dall'effetto Doppler longitudinale, che è più forte, poiché quest'effetto è del primo ordine in $(v \cos \vartheta)/c$ (ϑ è l'angolo tra velocità dell'atomo e linea d'osservazione). Per una velocità degli atomi $v \approx 10^8$ cm/s entrambi gli effetti sono confrontabili già per $\vartheta \sim 5'$. Questa difficoltà fu superata, disponendo l'asse dello spettrografo perpendicolarmente al piano di uno specchio. Nello spettrografo penetrava non soltanto la luce emessa direttamente dagli atomi, ma anche la luce riflessa dallo specchio. Quest'ultima può essere considerata come la luce emessa dalle immagini mobili degli atomi. Se l'atomo si muove sotto un angolo ϑ rispetto alla linea d'osservazione, la sua immagine nello specchio si muove sotto un angolo $\pi - \vartheta$. Gli spostamenti Doppler del primo ordine per l'atomo e per la sua immagine sono allora uguali e di segni contrari. Se non esistesse lo spostamento del secondo ordine, nello spettrografo si osserverebbero due righe $\lambda_1 = \lambda - \Delta\lambda$ e $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$, simmetriche rispetto alla riga iniziale λ. Questa disposizione simmetrica sarà perturbata dallo spostamento trasversale $\delta\lambda$ che si produce sempre verso le grandi lunghezze d'onda. Tenendone conto, si ha $\lambda_1 = \lambda - \Delta\lambda + \delta\lambda$, $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda + \delta\lambda$, da cui

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda.$$

Così si può separare l'effetto Doppler quadratico (trasverso) da quello lineare (longitudinale). Secondo la (107.8), la variazione di lunghezza d'onda nell'effetto Doppler trasverso è determinata dall'espressione

$$\delta\lambda = \frac{1}{2}\lambda\beta^2. \tag{107.9}$$

In uno degli esperimenti il valore dello spostamento previsto, calcolato per mezzo della tensione applicata (6788 V) doveva essere uguale a $\delta\lambda = 0{,}00116$ nm, e quello calcolato mediante l'effetto Doppler longitudinale dovrebbe essere 0,00109 nm. L'esperimento diretto fornisce $\delta\lambda = 0{,}0011$. Un accordo ugualmente soddisfacente è stato ottenuto anche per altre tensioni applicate al tubo.

I risultati d'Ives e di Stillwell sono stati confermati da altri ricercatori. Questi erano i primi esperimenti in cui fu per la prima volta dimostrata la *dilatazione relativistica dei tempi,* benché gli stessi Ives e Stillwell, senza riferirsi alla teoria della relatività, avessero cercato di interpretarli dal punto di vista della vecchia teoria dell'etere universale.

5. Passiamo ora allo studio dell'aberrazione della luce. Introduciamo i vettori unitari $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{N}'$ orientati secondo la direzione di propagazione dell'onda nei sistemi di riferimento S e S'. Si ha allora $\boldsymbol{k} = \omega\boldsymbol{N}/c$, $\boldsymbol{k}' = \omega'\boldsymbol{N}'/c$, e dalle formule (107.2) e (107.3) si ottiene

$$N'_{x'} = \frac{N_x - \beta}{1 - \beta N_x}, \quad N'_{y'} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta N_x}, \quad N'_{z'} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta N_x}. \qquad (107.10)$$

L'aberrazione della luce fu scoperta nel 1727 dall'astronomo Bradley (1692-1762) durante l'osservazione delle stelle al telescopio. Per questa ragione essa è anche detta *aberrazione astronomica.* Per descrivere questo fenomeno adottiamo come sistema di riferimento «fisso» S il sistema di riferimento di Copernico (dove il Sole è considerato «fisso», e come sistema di
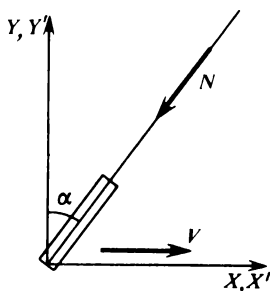
Fig. 334

riferimento «mobile» S' il sistema di riferimento legato alla Terra. Con questo trascuriamo completamente la rotazione della Terra attorno al suo asse e ragioniamo come se questa rotazione non esistesse. Orientiamo gli assi X e X' lungo il moto orbitale della Terra ed indichiamo con V la velocità del suo moto. Orientiamo l'asse Y lungo una direzione arbitraria ma perpendicolaremente alla direzione del moto orbitale della Terra. Indichiamo inoltre con α l'angolo tra la direzione che punta verso la stella (che è la direzione dell'asse del telescopio) nel sistema di riferimento S ed il senso positivo dell'asse Y (fig. 334). Si ha allora $N_x = -\sin\alpha$, $N_y = -\cos\alpha$, $N_z = 0$. Le corrispondenti quantità nel sistema di riferimento S' vengono indicate con le stesse lettere ma munite di apici. Portandole nella prima formula (107.10), si ottiene

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha + \beta}{1 + \beta\sin\alpha}, \qquad (107.11)$$

o

$$\sin\alpha = \frac{\sin\alpha' - \beta}{1 - \beta\sin\alpha'}. \tag{107.12}$$

Queste formule definiscono la direzione di propagazione dell'onda in un sistema di riferimento, se questa direzione è nota nell'altro sistema.

Consideriamo il caso particolare in cui la luce nel sistema di riferimento S si propaga lungo l'asse Y. In questo caso si ha $\alpha = 0$ e di conseguenza

$$\sin\alpha' = \beta. \tag{107.13}$$

Per osservare la stella nel telescopio, è necessario inclinarlo in avanti di un angolo α' definito dalla (107.13), rispetto alla posizione perpendicolare. L'angolo α' si dice *angolo d'aberrazione*. Nel caso analogo in cui la luce nel sistema di riferimento S' si propaga lungo l'asse Y', cioè se $\alpha' = 0$, si ottiene

$$\sin\alpha = -\beta. \tag{107.14}$$

Si deve inclinare il telescopio dello stesso angolo ma in senso opposto. La velocità del moto orbitale della Terra è $V \approx 30$ km/s, di modo che $\alpha \approx V/c \approx 10^{-4}$ rad $\approx 20{,}5''$.

Se la velocità V restasse costante in grandezza ed in direzione, la posizione visibile delle stelle sulla volta del cielo sarebbe invariata e non si potrebbe rilevare l'aberrazione. In realtà la direzione del moto orbitale della Terra varia continuamente, e perciò varierà per aberrazione anche la posizione visibile delle stelle sulla volta celeste. Ogni sei mesi la direzione del moto della Terra diventa opposta e l'angolo d'aberrazione cambia di segno. Se la stella si trova nel piano dell'orbita terrestre, la sua posizione visibile eseguirà in questo piano vibrazioni rettilinee d'ampiezza angolare $\alpha = V/c = 20{,}5''$ e di periodo uguale ad un anno. Se la direzione della stella (nel sistema S) è perpendicolare al piano dell'orbita terrestre, la sua posizione visibile sulla volta celeste descriverà una circonferenza di raggio angolare $20{,}5''$. In ogni altra posizione intermedia la traiettoria della posizione visibile della stella descriverà un'ellisse il cui semiasse maggiore possiede la stessa dimensione angolare. Tale sarebbe l'effetto d'aberrazione della luce, nel caso ideale che il solo moto della Terra fosse il suo moto circolare attorno al Sole. In realtà l'aberrazione è un effetto molto debole che si sovrappone allo spostamento delle stelle sulla volta celeste dovuto alla rotazione della Terra attorno al proprio asse. Erano necessarie un'eccezionale facoltà d'osservazione ed una particolare arte sperimentale per poter rivelare e misurare quest'effetto. Questo è stato fatto da Bradley.

Sottolineiamo in modo particolare che l'effetto d'aberrazione della luce non ha alcun rapporto con la velocità di spostamento delle stelle rispetto alla Terra. Questo effetto rispecchia soltanto la *variazione della velocità* di questo moto relativo dovuto al moto della Terra. Ecco perché l'aberrazio-

ne della luce è la stessa *per tutte le stelle,* benché le loro velocità rispetto alla Terra siano molto diverse.

6. Bradley pensava che l'effetto d'aberrazione della luce dimostrasse che la velocità di propagazione della luce era finita. Dopo aver misurato l'angolo d'aberrazione α, calcolò questa velocità mediante la formula $\alpha = V/c$. Quest'era la seconda determinazione della velocità della luce (la prima fu effettuata da Römer). Bradley interpretò il fenomeno scoperto dal punto di vista della teoria corpuscolare della luce di Newton. Nella cinematica non relativistica le velocità $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ dei corpuscoli di luce nei sistemi di riferimento S e S' sono legate dalla relazione $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$. Limitiamoci al caso in cui nel sistema di riferimento S il corpuscolo si sposta lungo l'asse Y con velocità $v_y = -c$. Nel sistema di riferimento S' compare una componente della velocità del corpuscolo di luce nella direzione perpendicolare $v_x' = v_x - V_x = -V$. Per questa ragione la traiettoria del corpuscolo di luce nel sistema S' sarà inclinata rispetto all'asse Y' di un angolo α' definito dalla formula

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v_x'}{v_y'} = \frac{V}{c} = \beta. \tag{107.15}$$

È questa la formula che, nella teoria corpuscolare di Newton, definisce l'angolo d'aberrazione. Se gli angoli α' sono piccoli, questa formula coincide con la formula relativistica (107.13), nella quale vengono trascurati i termini quadratici in β. Se al moto del corpuscolo di luce applicassimo la legge relativistica di composizione delle velocità (tenendo conto del fatto che la velocità del corpuscolo di luce in modulo è uguale a c), otterremmo esattamente le formule relativistiche precedenti (107.10). L'osservazione dell'effetto d'aberrazione della luce non permette dunque di decidere in favore della teoria ondulatoria o della teoria corpuscolare della luce.

7. L'interpretazione dell'aberrazione della luce nelle teorie ondulatorie della luce, persino nella loro forma elettromagnetica, incontrò grandi difficoltà, poiché queste teorie erano manchevoli in quanto si basavano su ipotesi fondate sulle proprietà meccaniche dell'etere e sul moto di quest'ultimo rispetto alla Terra. Per la prima volta una interpretazione impeccabile e semplice dell'aberrazione della luce (e dell'effetto Doppler ottico) potè essere dedotta dalla teoria della relatività.

A questo proposito tocchiamo una questione posta nella teoria dell'etere applicata all'ottica: varierà o no l'angolo d'aberrazione se il telescopio usato per la sua misura sarà riempito d'acqua? Le teorie della luce fondate sul concetto dell'etere universale davano a questa questione risposte diverse, a seconda delle ipotesi concernenti il moto dell'etere rispetto alla Terra. La verifica sperimentale fu realizzata nel 1871 da Airy che constatò che l'angolo d'aberrazione non cambiava in conseguenza del riempimento con acqua del telescopio. Per la teoria della relatività questa questione è semplice. Per semplificare la discussione invertiamo il senso di propagazione della

luce supponendo che la sorgente luminosa sia messa nel fuoco principale dell'obiettivo del telescopio. Visto che l'etere non esiste, nel sistema di riferimento, rispetto al quale il telescopio è a riposo, l'acqua o l'aria che si trovano nel telescopio, nonché i vetri dell'obiettivo stesso del telescopio, sono mezzi otticamente isotropi. In questo sistema di riferimento i raggi luminosi emergono dal telescopio parallelamente al suo asse ottico principale, indipendentemente dal fatto se il telescopio è riempito d'acqua o no. Per determinare l'angolo d'aberrazione è necessario passare ad un sistema di riferimento mobile S'. Ma ciò può essere fatto per un'onda che è già *uscita dal telescopio.* La direzione di propagazione di quest'onda non dipende assolutamente dalla natura del mezzo contenuto nel telescopio. Né l'esistenza di un telescopio, né quella di un mezzo esercitano alcun'influenza sul passaggio da un sistema di riferimento ad un altro. Ne segue che neanche l'angolo d'aberrazione dipende dal mezzo contenuto nel telescopio.

§ 108. *Effetto Doppler in acustica e nella teoria dell'etere*

Doppler scoprì l'effetto, che porta il suo nome, nel 1842 per le onde acustiche. In seguito la teoria di quest'effetto fu applicata, senza alcuna modifica, all'ottica, postulando che la teoria ondulatoria dell'etere fosse giusta. Al posto dell'aria nella quale si propagano le onde acustiche, in ottica si trova l'etere luminoso. Per il resto tutti i ragionamenti nell'acustica e nell'ottica sono identici. La teoria dell'etere universale oggi non è altro che una reminiscenza storica, ma l'effetto Doppler acustico ha conservato tutto il suo valore. Perciò è utile esporre la teoria di questo effetto. Ma poiché questo volume è dedicato all'ottica, parleremo come prima di onde luminose che si propagano nell'etere. Per passare all'acustica sarà sufficiente sostituire il termine « etere » con il termine « aria » e le onde luminose con le onde acustiche.

Nella teoria dell'etere il fenomeno fa intervenire, oltre alla sorgente ed all'osservatore, un mezzo intermediario, l'etere luminoso. A questo sono dovute la complicatezza e l'indeterminatezza della teoria dell'effetto Doppler, poiché in ogni caso concreto non possiamo dire come si muovono rispetto all'etere « introvabile » sia la sorgente, sia l'osservatore. Le diverse teorie dell'etere si distinguono tra loro soprattutto per la scelta del sistema di riferimento nel quale l'etere è a riposo e, di conseguenza, si comporta come un mezzo otticamente isotropo. Supponiamo che nell'etere si propaghi un'onda monocromatica piana. Indichiamo con ω la sua frequenza nel sistema di riferimento in cui l'etere è a riposo, e con $\boldsymbol{k} = \omega \boldsymbol{N}/c$ indichiamo il suo vettore d'onda, dove $\boldsymbol{N}$ è il vettore unitario lungo il quale si propaga l'onda. In questo sistema di riferimento la fase dell'onda è data da $\varphi = \omega t - \boldsymbol{kr}$. Supponiamo inoltre che rispetto all'etere si spostino in modo uniforme la sorgente con velocità $\boldsymbol{V}_s$ e l'osservatore con velocità $\boldsymbol{V}_0$. I

loro raggi vettori sono rispettivamente $\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{V}_s t$ e $\boldsymbol{r}_o = \boldsymbol{V}_o t$. Le fasi delle vibrazioni in questi punti mobili sono date dalle espressioni $\varphi_s = (\omega - \boldsymbol{k V}_s)t$ e $\varphi_o = (\omega - \boldsymbol{k V}_o)t$. Ne segue che la sorgente, nel sistema di riferimento in cui essa è a riposo, emette onde di frequenza $\omega_s = \omega - \boldsymbol{k V}_s$, mentre la frequenza percepita dall'osservatore è data dall'espressione $\omega_o = \omega - \boldsymbol{k V}_o$. Dividendo a membro a membro e tenendo conto del fatto che $\boldsymbol{k} = \omega \boldsymbol{N}/c$, eliminiamo la frequenza intermedia ω e troviamo

$$\frac{\omega_o}{\omega_s} = \frac{1 - (\boldsymbol{N V}_o)/c}{1 - (\boldsymbol{N V}_s)/c}. \tag{108.1}$$

Quest'è la formula fondamentale che determina la variazione della frequenza per effetto Doppler nella teoria dell'etere e in acustica. Vediamo che in questa teoria la frequenza ω_o è determinata dai moti della sorgente e dell'osservatore *rispetto all'etere,* nonché dalla direzione di propagazione $\boldsymbol{N}$ dell'onda nell'etere a riposo. È ciò che la distingue dalla teoria della relatività nella quale l'etere non esiste e perciò l'effetto Doppler dipende soltanto dalla velocità della sorgente *rispetto all'osservatore* $(\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_o)$. In particolare, per una stessa velocità relativa $(\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_o)$ la formula (108.1) fornisce risultati differenti, a seconda che sia in movimento la sorgente o l'osservatore. Quando la sorgente è mobile e l'osservatore fisso, si ha

$$\omega_o = \frac{\omega_s}{1 - \boldsymbol{N V}_s/c}. \tag{108.2}$$

Se, invece, l'osservatore è mobile e la sorgente fissa, si ha

$$\omega_o = \omega_s(1 - \boldsymbol{N V}_o/c). \tag{108.3}$$

In un'approssimazione lineare, quando nella formula (108.1) si possono trascurare i quadrati dei rapporti V_s/c e V_o/c, questa formula diventa

$$\frac{\omega_o}{\omega_s} = 1 + \frac{\boldsymbol{N}}{c}(\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_o). \tag{108.4}$$

In questa formula figura soltanto la velocità relativa $(\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_o)$ e non le velocità $\boldsymbol{V}_s$ e $\boldsymbol{V}_o$ separatamente. Ma questa formula non determina ancora la variazione della frequenza, poiché in essa figura anche la direzione $\boldsymbol{N}$ di propagazione dell'onda nell'etere a riposo. Infatti, benché l'onda sia inviata dalla sorgente verso l'osservatore, per aberrazione la sua direzione varia con la variazione di moto dell'etere. Solo nel caso particolare in cui la sorgente o l'osservatore siano a riposo rispetto all'etere, questa indeterminatezza sparisce e la formula (108.4) coincide con la formula di prima approssimazione della teoria della relatività. Si può allora scriverla nella forma

$$\omega_o = (1 + V_N/c), \tag{108.5}$$

dove V_N è la velocità della sorgente rispetto all'osservatore secondo il rag-

gio di visione. Questa velocità è positiva quando la sorgente s'avvicina all'osservatore e negativa quando essa s'allontana.

Quanto esposto sopra mostra tutte le semplificazioni che introduce la teoria della relatività nella teoria dell'effetto Doppler e dell'aberrazione della luce.

Problema

In figura 335 è riportato uno schema dell'esperimento di Foucault per misurare la velocità della luce in un mezzo materiale. I raggi luminosi inviati dalla sorgente S, dopo aver attraversato una lamina di vetro M e la lente L, sono riflessi da uno specchio piano R che può ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano della figura. La lente L forma un'immagine della sorgente S sulla superficie di uno specchio concavo C il cui centro di curvatura coincide con l'asse di rotazione dello specchio R. Il recipiente P è riempito dalla sostanza esaminata nella quale si vuol misurare la velocità della luce. Se lo specchio R è fisso, i raggi riflessi da C e R si riuniscono di nuovo nel punto S. Lo specchio M devia una parte dei raggi e forma un'immagine reale della sorgente nel punto S_1. Quando lo specchio R ruota, l'immagine S_1 si sposta nel punto S_1'. Conoscendo il valore dello spostamento $S_1 S_1'$, si può calcolare la velocità della
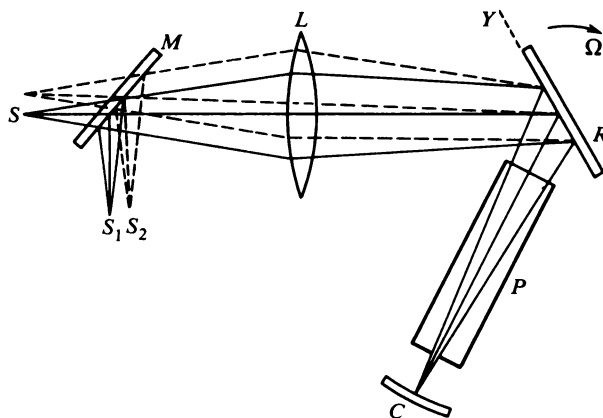
Fig. 335

luce nella sostanza esaminata. Quando i raggi sono riflessi da uno specchio in moto, ha luogo una variazione della frequenza della luce per effetto Doppler. Tenendone conto, dimostrare che il metodo di Foucault fornisce la *velocità di gruppo della luce.*

Soluzione. Senza perdere di generalità, si può ammettere che gli strati d'aria tra R e P, nonché quelli tra P e C, siano infinitamente sottili, il che permette di trascurare il loro spessore in tutti i calcoli.

Generalmente il calcolo è effettuato nel seguente modo. Il fronte d'onda che si propaga con velocità di fase v impiega un tempo $T = 2D/v$ per percorrere, andata e ritorno, la distanza D tra gli specchi R e C. Durante quest'intervallo di tempo lo specchio R ruota di un angolo $\varphi = T\Omega$, dove Ω è la velocità angolare di rotazione dello specchio. Il raggio riflesso dallo specchio R ruota con una velocità angolare due volte più grande e durante lo stesso intervallo di tempo T esso ruota di un angolo $\alpha = 2\varphi = 2T\Omega = (4D/v)\Omega$. Conoscendo lo spostamento

$S_1 S_1'$, è facile calcolare l'angolo α. Dunque,

$$v = 4D\Omega/\alpha. \tag{108.6}$$

Questo ragionamento non tiene conto della variazione per effetto Doppler della frequenza della luce riflessa dallo specchio rotante R e perciò esso non permette di precisare di quale velocità si tratta nella formula (108.6).

Poniamo l'origine delle coordinate sull'asse dello specchio rotante R e dirigiamo l'asse Y lungo la linea d'intersezione del piano di R con il piano della figura. Visto che le velocità lineari dei diversi punti dello specchio R sono differenti, è differente anche la variazione della frequenza dell'onda riflessa dallo specchio, a seconda del punto di riflessione. Grazie a ciò i diversi punti del fronte d'onda si propagano nel mezzo con velocità di fase differenti, il che determina la rotazione del fronte d'onda nel mezzo. Se come senso positivo di rotazione si prende il senso di rotazione dello specchio R, la velocità angolare di rotazione del fronte d'onda nel mezzo si può scrivere

$$\Omega' = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{dv}{d\omega}\frac{d\omega}{dy},$$

dove φ è l'angolo d'incidenza dei raggi luminosi sullo specchio R. Visto che $v = \omega/k$, si ha

$$\frac{dv}{d\omega} = \frac{1}{k} - \frac{\omega}{k^2}\frac{dk}{d\omega} = \frac{v}{\omega} - \frac{v^2}{\omega u},$$

dove u è la velocità di gruppo. Non resta altro che calcolare $d\omega/dy$. Se ω è la frequenza dell'onda riflessa in un punto dello specchio di coordinata y e $\omega + d\omega$ la frequenza dell'onda riflessa in un punto di coordinata $y + dy$, si ha al primo ordine $d\omega/\omega = -\frac{2}{c}\Omega\cos\varphi\, dy$, da cui

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\omega}{dy} = -2\Omega\frac{\omega}{c} = -2\Omega\frac{\omega}{nv},$$

dove n è l'indice di rifrazione. Si ottiene allora

$$\Omega' = \left(\frac{v^2}{\omega u} - \frac{v}{u}\right)2\Omega\frac{\omega}{nv} = \frac{2\Omega}{n}\left(\frac{v}{u} - 1\right).$$

Il fronte d'onda riflesso dallo specchio C ruoterà anch'esso nella sostanza dove si propaga l'onda con velocità angolare Ω' e nello stesso senso del fronte d'onda incidente. D'altra parte, per percorrere uno strato di sostanza di spessore $2D$, il fronte d'onda impiega un tempo $T = 2D/v$. Durante questo tempo il fronte d'onda ruota nel mezzo di un angolo $\Omega' T = \frac{4D\Omega}{nv}\left(\frac{v}{u} - 1\right)$. Dopo essere uscito dal recipiente P nel vuoto il fronte d'onda subisce una rifrazione ed in coseguenza di ciò l'angolo di rotazione aumenta di n volte e diventa uguale a

$$n\Omega' T = \frac{4D\Omega}{v}\left(\frac{v}{u} - 1\right) = \frac{4D\Omega}{u} - \frac{4D\Omega}{v}.$$

Si deve aggiungere quest'angolo di rotazione all'angolo $4D\Omega/v$ che abbiamo calcolato prima senza tener conto dell'effetto Doppler. Di conseguenza, l'angolo di rotazione α misurato è in realtà uguale a

$$\alpha = \frac{4D\Omega}{v} + \left(\frac{4D\Omega}{u} - \frac{4D\Omega}{v}\right) = \frac{4D\Omega}{u},$$

ed al posto della formula (108.6) si trova

$$u = 4D\Omega/\alpha. \tag{108.7}$$

Ne segue che il metodo di specchio rotante di Foucault fornisce la velocità di gruppo.

§ 109. *Dilatazione del tempo nel campo gravitazionale*

1. Le questioni della teoria relativistica della gravitazione appartengono alla *teoria della relatività generale* che non esponiamo in questo corso. Tocchiamo solo in modo breve la questione dell'influenza del campo gravitazionale sul corso del tempo. Baseremo i nostri ragionamenti sul *principio d'equivalenza delle forze gravitazionali e delle forze d'inerzia* che è stato trattato dettagliatamente nel § 71 del primo volume. Supporremo debole il campo gravitazionale (il criterio della debolezza del campo è dato più avanti).

Scegliamo arbitrariamente un sistema di riferimento inerziale S in diversi punti del quale sono fissati orologi sincronizzati conformemente alla regola d'Einstein. Come sempre, indicheremo con t il tempo registrato da questi orologi sincronizzati. Supponiamo che un orologio A si sposti con accelerazione rispetto al sistema di riferimento S. Conveniamo di indicare con t_0 il tempo registrato dall'orologio A in diversi punti del suo tragitto. Poiché l'orologio A viene supposto ideale, la sua accelerazione non esercita alcuna influenza sui processi fisici che determinano il suo funzionamento. Quest'orologio marcia alla stessa andatura degli orologi dei sistemi di riferimento inerziali associati. Gli intervalli di tempo registrati con gli orologi fissi e con l'orologio mobile sono legati dalla relazione

$$dt = dt_0/\sqrt{1 - (v/c)^2}, \tag{109.1}$$

dove v è la velocità dell'orologio A rispetto al sistema di riferimento S. Il sistema di riferimento inerziale S non ha alcun campo gravitazionale e quindi l'unica causa della dilatazione dei tempi t_0 rispetto al tempo t può essere solo il *moto dell'orologio A* rispetto al sistema di riferimento inerziale S.

2. Ma è anche possibile un altro punto di vista. Supponimo dapprima che l'orologio A si muova con accelerazione costante $\boldsymbol{a}$ rispetto al sistema S. Calcoliamo il tempo t a partire dall'istante in cui la velocità v è nulla. Si ha allora $v = \sqrt{2ax}$, dove x è la distanza che l'orologio A percorre nel tempo t. Ne consegue

$$dt = dt_0/\sqrt{1 - 2ax/c^2}. \tag{109.2}$$

Introduciamo ora un sistema di riferimento accelerato S_0 che si sposta insieme con l'orologio A. Rispetto a S_0 l'orologio A è fisso, ma esso è soggetto all'azione di forze d'inerzia. Se tutti i fenomeni si rapportano al sistema di riferimento S_0, la dilatazione del tempo t_0 può essere attribuita alle *forze d'inerzia.* La forza d'inerzia rapportata all'unità di massa di un corpo in moto è $-\boldsymbol{a}$. Secondo il principio d'equivalenza, le azioni fisiche delle forze d'inerzia non si distinguono dall'azione di un campo gravitazionale la cui intensità nel caso considerato è uguale a $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{a}$. Introduciamo ancora il *potenziale gravitazionale* $\varphi = -gx$. La formula (109.2) assumerà allora la

forma

$$dt = dt_0/\sqrt{1 - 2\varphi/c^2} \approx dt_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right), \quad (109.3)$$

o

$$\frac{dt - dt_0}{dt_0} = - \frac{\varphi}{c^2}. \quad (109.4)$$

Si prende come zero del potenziale gravitazionale il potenziale in un punto in cui l'orologio fisso e quello mobile marciano in modo ugualmente rapido. Perciò nelle formule (109.3) e (109.4) l'intervallo di tempo dt si può registrare non sull'orologio del sistema inerziale S, ma sull'orologio che è a riposo nel sistema di riferimento S_0 nel punto B di potenziale nullo. Si può in generale porre lo zero del potenziale gravitazionale in un punto arbitrario, a condizione di scrivere la formula (109.4) nella seguente forma:

$$\frac{dt_{0A} - dt_{0B}}{dt_{0A}} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{c^2}, \quad (109.5)$$

dove gli intervalli di tempo dt_{0A} e dt_{0B} sono registrati su due orologi fissi situati nei punti A e B di potenziali gravitazionali φ_A e φ_B del sistema di riferimento accelerato S_0. Questi potenziali debbono soddisfare il criterio di « campo debole »:

$$\left|\frac{\varphi_B - \varphi_A}{c^2}\right| \ll 1, \quad (109.6)$$

che esprime la condizione di validità della teoria della gravitazione di Newton; solo a questa condizione ha un senso la nozione di potenziale gravitazionale. (Sulla superficie della Terra $\varphi/c^2 \approx 7 \cdot 10^{-10}$, sulla superficie del Sole $\varphi/c^2 \approx 2{,}12 \cdot 10^{-6}$, a condizione che lo zero del potenziale sia all'infinito.) Si può dunque mettere nel denominatore della (109.5) sia dt_{0A}, sia dt_{0B}.

Il significato fisico della formula (109.5) è il seguente. Supponiamo che nei punti A e B di un campo gravitazionale siano posti due orologi identici che sono a riposo nel sistema di riferimento S_0. Per confrontare la marcia di questi orologi invieremo, ad ogni battito dell'orologio A, un segnale luminoso verso l'orologio B. Sia N_A il numero di segnali inviati. Durante il tempo che impiega il segnale per arrivare a B l'orologio B esegue N_B battiti ed inoltre

$$\frac{N_A - N_B}{N_A} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{c^2}. \quad (109.7)$$

Se $\varphi_A < \varphi_B$ (il segnale luminoso si propaga incontro al campo gravitazionale), si ha $N_A > N_B$, cioè l'orologio B marcerà più lentamente dell'orolo-

gio A. Nel caso contrario in cui $\varphi_B < \varphi_A$ è l'orologio A che ritarda. In generale, *un orologio sottoposto all'azione di un campo gravitazionale marcia tanto più lentamente quanto più grande è il potenziale gravitazionale nel punto dove esso si trova.* Quest'effetto, come pure l'effetto di ritardo della marcia di un orologio in moto, deve essere considerato come una *proprietà dello spazio-tempo* e non come l'azione esercitata dal campo gravitazionale sull'evoluzione dei processi fisici negli orologi. Come è stato già detto al § 106, quest'azione esiste sicuramente se si tratta di un orologio reale, ma essa dipende sostanzialmente dalla natura dei fenomeni fisici su cui si basa la costruzione dell'orologio. Se l'orologio è perfetto, quest'azione è nulla e l'effetto di rallentamento gravitazionale della marcia si manifesta allo stato puro. Questa circostanza si ritrova anche nella formula (109.5): il rallentamento gravitazionale del tempo è una *proprietà reciproca dei due orologi* determinata dalla differenza dei potenziali gravitazionali tra i punti in cui si trovano gli orologi, mentre per i processi fisici che si svolgono nell'orologio è, evidentemente, importante non il potenziale ma l'intensità del campo gravitazionale.

Certo, la formula (109.5) è verificata indipendentemente dal fatto se il campo gravitazionale è un campo « fittizio » dovuto alle forze d'inerzia o un campo gravitazionale « vero » creato dalle masse di materia. Tuttavia questa formula è stata stabilita per un campo gravitazionale uniforme. Utilizzando il procedimento usuale, estendiamo questa formula al caso di un *campo gravitazionale non uniforme.* Per farlo immaginiamo che in un sistema di riferimento S_0 lungo una curva arbitraria AB, che collega gli orologi A e B, sia disposto un gran numero di orologi identici 1, 2, 3, ..., n. Si può porre che il campo gravitazionale tra ogni coppia di orologi vicini sia uniforme, il che permette di applicare ad ogni coppia la formula (109.5). Moltiplicando membro a membro tutte queste formule e tenendo conto del fatto che, nei limiti della precisione di calcolo, si può trascurare le differenze tra i denominatori, si ottiene di nuovo il risultato (109.5), il che dimostra la sua validità anche per il caso di un campo non uniforme.

Visto che in presenza di un campo gravitazionale la marcia, persino di orologi identici, è diversa in diversi punti dello spazio, perde senso il procedimento di sincronizzazione degli orologi e di registrazione della simultaneità di eventi spazialmente separati, che è stato utilizzato nei sistemi di riferimento inerziali, cioè in assenza di un campo gravitazionale. Se esiste un campo gravitazionale ha senso soltanto il *tempo locale* che è registrato su orologi identici in ogni punto dello spazio. Si tratta allora non della sincronizzazione degli orologi spazialmente separati ma di un confronto della *loro marcia,* come è stato descritto sopra.

Tenendo conto di quanto esposto sopra, il paradosso dei gemelli si può interpretare da un altro punto di vista. L'orologio del gemello A si trova sempre in un sistema di riferimento inerziale, mentre l'orologio del gemello B subisce un'accelerazione, il che vuol dire che esso è fisso ma si trova in un

campo gravitazionale che lo fa ritardare. Ne segue che quando B ritornerà ad A, l'orologio di B registra un intervallo di tempo più corto che l'orologio A.

Recentemente (1976) la dilatazione gravitazionale dei tempi fu confermata da un gruppo di fisici dell'Università del Maryland (USA). È stata misurata la differenza delle indicazioni di un orologio atomico posto su un aereo ed uno posto in laboratorio sulla Terra. L'aereo volava a 10 km d'altitudine a bassa velocità, per ridurre l'effetto cinematico di dilatazione dei tempi. Il volo durava 15 ore. L'effetto gravitazionale atteso era all'incirca di $+50$ ns e l'effetto cinematico di -7 ns. Gli orologi si confrontavano prima, durante e dopo il volo, il che ha permesso di seguire l'accrescimento monotono della differenza delle loro indicazioni. L'esperienza ha confermato la teoria con precisione dell' 1,6%.

3. Applichiamo i risultati ottenuti all'emissione della luce. Supponiamo che due atomi identici fissi si trovino nei punti A e B di un campo gravitazionale. Ogni atomo emette luce della stessa frequenza ω_0 dal punto dove si trova. Assimilando questi atomi ad orologi ed applicando loro la formula (109.5) o (109.7), si ottiene

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{c^2}, \qquad (109.8)$$

dove ω è la frequenza della luce che arriva al punto d'osservazione B provenendo da A. Se la luce si propaga dal potenziale inferiore φ_A al potenziale superiore φ_B (cioè incontro al campo gravitazionale), la frequenza si sposta *verso il rosso*. Per una luce che viene dalla superficie solare alla Terra questa variazione di frequenza è uguale a $(\omega_0 - \omega)/\omega_0 = 2{,}12 \cdot 10^{-6}$. Al contrario, se la luce si propaga dal potenziale gravitazionale superiore a quello inferiore (cioè nel senso del campo gravitazionale), la frequenza della luce osservata *aumenta*. Questo *fenomeno*, detto *spostamento gravitazionale delle righe spettrali*, fu teoricamente previsto da Einstein e confermato in seguito dall'esperienza. Questo fenomeno è stato inerpretato in un modo diverso nel § 71 del volume I.

§ 110. *Composizione delle velocità nella teoria della relatività*

1. Il problema della composizione (fisica) delle velocità è enunciato come segue (cfr. il vol. I, § 7). Sia $\mathbf{v}'$ la velocità di una particella in moto nel sistema di riferimento S', e sia inoltre V la velocità di traslazione uniforme di S' lungo l'asse X rispetto ad un sistema di riferimento « fisso » S. Vogliamo determinare la velocità $\mathbf{v}$ della particella nel sistema di riferimento S. Indichiamo con x, y, z le coordinate della particella all'istante t nel sistema di riferimento S e con t', x', y', z' le stesse grandezze nel sistema di ri-

ferimento S'. Visto che entrambi questi gruppi caratterizzano *uno stesso evento* (passaggio della particella per uno stesso punto spazio-temporale), essi sono legati dalle formule di trasformazione di Lorentz (105.12). Essendo V = costante, lo spostamento della particella è accompagnato da un incremento delle coordinate e del tempo uguale a

$$dx = \frac{dx' + V\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dividendo le prime tre relazioni per l'ultima e tenendo conto del fatto che $dx/dt = v_x$, $dx'/dt' = v_x'$, si ottiene

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x' V/c^2}, \quad v_y = \frac{v_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_x' V/c^2}, \quad v_z = \frac{v_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_x' V/c^2}. \quad (110.1)$$

Sono queste le formule che esprimono la *regola di composizione delle velocità della cinematica relativistica.* Se i moti sono lenti, si possono trascurare le quantità quadratiche V^2/c^2 e $v_x' V/c^2$, e quindi queste formule si trasformano nelle formule non relativistiche

$$v_x = v_x' + V, \quad v_y = v_y', \quad v_z = v_z',$$

che si ottengono con la trasformazione di Galileo.

2. Per esaminare le formule (110.1) è conveniente prendere come unità la velocità della luce, introducendo le quantità senza dimensione $\beta_x = v_x/c$, $\beta_x' = v_x'/c$, ... Si ha allora

$$\beta_x = \frac{\beta_x' + \beta}{1 + \beta\beta_x'}, \quad \beta_y = \frac{\beta_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\beta_x'}, \quad \beta_z = \frac{\beta_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\beta_x'}. \quad (110.2)$$

Nessuna velocità può essere superiore a c e le corrispondenti quantità senza dimensione non possono essere superiori all'unità. Si può dunque domandarsi se non potrà apparire, in conseguenza di una composizione (fisica) di due velocità, una velocità superiore a c. La risposta è naturalmente negativa.

Per dimostrare quest'affermazione consideriamo dapprima il caso della composizione di due velocità parallele in cui i sensi dei vettori $\boldsymbol{v}'$ e $\boldsymbol{V}$ coincidano o siano opposti. La velocità risultante è in questo caso data dalla prima formula (110.1) o dalla prima formula (110.2) che le è equivalente. Visto che β e β_x' non possono essere superiori all'unità, queste quantità si possono rappresentare nella forma $\beta = \text{th}\,\vartheta$, $\beta_x' = \text{th}\,\vartheta_x'$, dove gli argomenti ϑ e ϑ_x' delle tangenti iperboliche possono assumere qualsiasi valore reale. La prima formula (110.2) si scrive allora

$$\beta_x = \frac{\text{th}\,\vartheta_x' + \text{th}\,\vartheta}{1 + \text{th}\,\vartheta\,\text{th}\,\vartheta_x'}.$$

Confrontandola con la formula d'addizione delle tangenti iperboliche

$$\text{th}\,(\vartheta_x' + \vartheta) = \frac{\text{th}\,\vartheta_x' + \text{th}\,\vartheta}{1 + \text{th}\,\vartheta\,\text{th}\,\vartheta_x'},$$

si vede che la velocità risultante senza dimensione può ugualmente essere rappresentata dalla tangente iperbolica $\beta_x = \text{th}\,\vartheta_x$, ed inoltre

$$\vartheta_x = \vartheta_x' + \vartheta. \tag{110.3}$$

Ciò vuol dire che la composizione (fisica) di velocità parellele si riduce all'addizione algebrica degli argomenti delle corrispondenti tangenti iperboliche. Ma, dato che il valore assoluto della tangente iperbolica non può essere superiore all'unità quale che sia il valore del suo argomento, la composizione (fisica) di due velocità parallele non può produrre una velocità superiore a c. Se una delle velocità da comporre è uguale a c, l'addizione di un'altra velocità qualsiasi non può dare altro che una risultante uguale a c. Questa è la manifestazione dell'esistenza della velocità della luce come velocità limite che non può essere superata, quale che sia l'accelerazione del moto di un corpo.

Per concludere la dimostrazione consideriamo la composizione di due velocità reciprocamente perpendicolari. Senza perdere in generalità si può ammettere che la velocità $\boldsymbol{v}'$ sia diretta lungo l'asse Y'. Ponendo $\beta_x' = \beta_z' = 0$ nella (110.2), si ottiene allora

$$\beta_x = \beta, \quad \beta_y = \beta_y'\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta_z = 0.$$

Il quadrato della velocità (senza dimensione) nel sistema di riferimento S è

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta^2 + \beta_y'^2(1 - \beta^2).$$

Attribuendo a β un valore arbitrario e costante, studiamo la variazione di $(v/c)^2$ in funzione di $\beta_y'^2$. La derivata di questa quantità è $(1 - \beta^2) \geqslant 0$ e perciò la funzione $(v/c)^2$ cresce con il crescere di $\beta_y'^2$. Essa raggiunge il suo massimo uguale all'unità per $\beta_y'^2 = 1$. Per tutti gli altri valori di β_y' il rapporto $(v/c)^2$ non può essere superiore all'unità, il che dimostra che, per composizione di velocità perpendicolari, la velocità risultante non può essere superiore a c.

3. Quando le velocità da addizionare sono parallele, si può omettere l'indice x e scrivere

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}. \tag{110.4}$$

Se $V \ll c$, in questa formula ci si può limitare ai termini di primo grado in V. In quest'approssimazione

$$v \approx (v' + V)\left(1 - \frac{v'V}{c^2}\right) \approx v' + \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)V. \tag{110.5}$$

Applichiamo l'ultima formula alla propagazione della luce in un liquido animato da un moto a velocità costante V. La velocità della luce rispetto al liquido immobile è $v' = c/n$, dove n è l'indice di rifrazione del liquido. Supponendo che la luce si propaghi nel senso della corrente del liquido, calcoliamo la sua velocità v rispetto ad un sistema di riferimento « fisso ». Per farlo sostituiamo nella formula (110.5) $v'/c = 1/n$ e troviamo

$$v = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)V. \tag{110.6}$$

La formula (110.6) fu stabilita da Fresnel già nel 1818, partendo dall'idea che l'etere sia parzialmente trascinato dai corpi in moto. Lorentz ritrovò questa formula nella sua teoria elettronica, ma il vero significato fisico della formula (110.6) fu stabilito solo con la teoria della relatività.
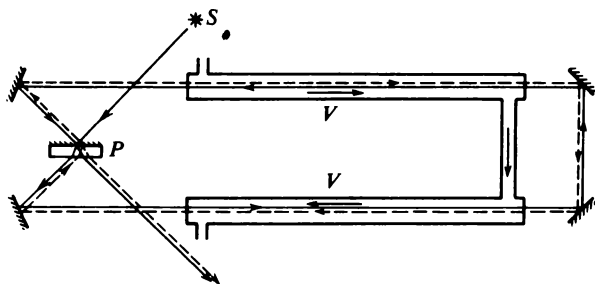
Fig. 336

La formula (110.6) fu sperimentalmente confermata da Fizeau nel 1851. La figura 336 rappresenta lo schema dell'esperimento nella forma perfezionata che Michelson gli diede nel 1886. Un raggio inviato dalla sorgente S si divide in due mediante la lamina P. In figura 336 uno dei raggi è rappresentato con una linea continua e l'altro con una linea tratteggiata. I raggi attraversano poi tubi riempiti d'acqua corrente. Uno dei raggi si propaga nel senso del flusso d'acqua e l'altro in senso opposto. Visto che le velocità dei raggi luminosi rispetto alle pareti fisse dei tubi sono diverse, all'uscita dal dispositivo si ha una differenza di cammino, che varia in funzione della velocità di flusso V. Dapprima si osserva l'interferenza tra i raggi che emergono dall'acqua a riposo, poi tra i raggi che hanno attraversato l'acqua in moto. Misurando lo spostamento delle frange d'interferenza si può determinare la differenza di cammino dovuta alla corrente dell'acqua, ed in base a questo risultato si può poi determinare anche la differenza delle velocità $v - c/n$.

4. Nella teoria elettronica Lorentz ha generalizzato la formula (110.6) tenendo conto della dispersione della luce. La formula di Lorentz è facile

da ottenere anche nella teoria della relatività; è necessario tener conto della variazione della lunghezza d'onda della luce per effetto Doppler nell'acqua corrente. Indichiamo con λ la lunghezza d'onda della luce nel vuoto nel sistema di riferimento « fisso » S e con $\lambda + \delta\lambda$ il suo valore nel sistema di riferimento S' rispetto al quale l'acqua corrente è a riposo. La variazione Doppler della lunghezza d'onda $\delta\lambda$, al primo ordine in V, è definita dall'espressione

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{V}{v'} = \frac{Vn}{c}.$$

Ne segue

$$v'(\lambda + \delta\lambda) = v'(\lambda) + \frac{dv'}{d\lambda}\frac{Vn}{c}\lambda,$$

o

$$v'(\lambda + \delta\lambda) = v'(\lambda) + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{n}\right)\frac{Vn\lambda}{c} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}V.$$

Nella formula (110.5) si deve intendere per v' non $v'(\lambda)$ ma $v'(\lambda + \delta\lambda)$. Con questo il secondo termine del secondo membro della (110.5) nell'approssimazione considerata non dev'essere modificato. Si ottiene dunque

$$v = \frac{c}{n} + \left(-\frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)V. \qquad (110.7)$$

La presenza di un termine supplementare, dovuto alla dispersione, è stata sperimentalmente confermata da Zeeman nel 1914.

È da sottolineare che la variazione Doppler della lunghezza d'onda riguarda il sistema di riferimento S' rispetto al quale l'acqua è fissa. Il flusso dell'acqua nel sistema di riferimento « fisso » S non esercita alcun'influenza sulla lunghezza d'onda, di modo che all'uscita dal dispositivo entrambi i raggi hanno *la stessa lunghezza d'onda* (fig. 336) e possono dunque interferire.

§ 111. *Meccanica relativistica*

1. Se una legge della natura viene espressa nella forma $A = B$ e se le grandezze A e B *non cambiano* nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, queste grandezze e la legge stessa sono dette *invarianti* rispetto a questo passaggio. Più generale è il concetto di *covarianza*. Se nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro le grandezze A e B *si trasformano in ugual maniera* senza restare invariabili, la legge $A = B$ sarà verificata anche nel nuovo sistema di riferimento. In questo caso si dice che la legge $A = B$ è *covariante* rispetto alla trasformazione considerata dei sistemi di riferimento. Il termine « invarianza di una legge » è spesso utilizzato nel senso di covarianza.

Prima dell'apparizione della teoria della relatività, erano ammissibili soltanto *trasformazioni di coordinate di Galileo.* Rispetto a queste trasformazioni le equazioni della meccanica di Newton sono covarianti (invarianti), mentre le equazioni dell'elettrodinamica di Maxwell-Lorentz non lo sono. La teoria della relatività ha dimostrato che era necessario rinunciare alla trasformazione di Galileo e sostituirla con la *trasformazione di Lorentz.* Il principio di relatività impone allora che *le leggi della natura siano covarianti rispetto alla trasformazione di Lorentz.* Le equazioni dell'elettrodinamica sono covarianti rispetto a questa trasformazione, ma le equazioni della meccanica di Newton non lo sono. Perciò la meccanica di Newton dev'essere rivista.

Nella meccanica newtoniana la forza che agisce su un corpo ad un istante dato è definita dalla posizione di tutti i corpi interagenti *allo stesso istante.* Nella teoria della relatività la nozione di simultaneità (« lo stesso istante ») *dipende dalla scelta del sistema di riferimento.* È impossibile trasformare automaticamente nella forma covariante di Lorentz ogni legge di forza newtoniana. Sono ammissibili solo teorie dalle quali *può essere esclusa la nozione di azione a distanza.* Tale possibilità esiste nella *teoria degli urti.* Quest'ultima si basa su una rappresentazione idealizzata che dice: l'interazione ha luogo solo durante un intervallo di tempo in cui la distanza tra i corpi o tra le particelle puntiformi è infinitamente piccola rispetto alle dimensioni dei corpi stessi o ad altre distanze caratteristiche che determinano il carattere dei processi di collisione. Prima e dopo quest'intervallo di tempo infinitesimale i corpi si muovono liberamente. Ai processi di collisione sono applicabili le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia, a condizione di utilizzarle nella forma covariante di Lorentz. Questo è lo scopo del presente paragrafo. Il concetto d'azione a distanza si può eliminare anche nello studio del moto delle particelle cariche nei campi elettromagnetici, ma per esporre in modo chiaro le questioni dell'elettrodinamica concernenti questo problema occorrerebbe molto spazio, e perciò ci limitiamo solo alla considerazione dei processi di collisione.

2. Per risolvere il problema posto, risulta più semplice e più logico utilizzare la nozione di *vettore a quattro dimensioni* (o, in breve, *quadrivettore*) nello spazio-tempo di Minkowski. Ogni evento « puntiforme » in questo spazio-tempo è caratterizzato da un insieme di quattro coordinate $x, y, z, \tau \equiv ct$. Nel passaggio dal sistema di riferimento S a S' le differenze delle coordinate di due punti si trasformano secondo le formule

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \beta\,\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta\tau' = \frac{\Delta\tau - \beta\,\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (111.1)$$

come segue dalla (105.12). Ricordiamo che il quadrato dell'intervallo tra i punti considerati è invariante:

$$\Delta\tau^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \text{Inv.} \qquad (111.2)$$

Abbiamo utilizzato la trasformazione particolare di Lorentz (105.12) che implica che gli assi coordinati X, Y, Z siano paralleli agli assi X', Y', Z' e che il sistema S' si sposti lungo l'asse X rispetto a S. Si potrebbe prendere qualsiasi orientamento degli assi e qualsiasi direzione di moto, ma ciò complicherebbe la scrittura senza cambiare il principio del calcolo.

Si dice quadrivettore un insieme di quattro grandezze A_x, A_y, A_z, A_τ *le quali, nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, si trasformano come le differenze delle coordinate di due punti nell'universo di Minkowski, cioè*

$$A'_{x'} = \frac{A_x - \beta A_\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'_{y'} = A_y, \quad A'_{z'} = A_z, \quad A'_{\tau'} = \frac{A_\tau - \beta A_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (111.3)$$

Le grandezze A_x, A_y, A_z sono dette componenti *spaziali* ed A_τ si dice componente *temporale* del quadrivettore. Uniamo le componenti spaziali in un vettore tridimensionale ordinario A ed indicheremo con (A, A_τ) il quadrivettore. Dall'identità delle leggi di trasformazione (111.1) e (111.3) segue che il quadrivettore (A, A_τ) è *invariante*:

$$A_\tau^2 - A^2 = \text{Inv}. \quad (111.4)$$

Se una legge della natura è espressa nella forma quadrivettoriale da $(A, A_\tau) = (B, B_\tau)$, *essa è covariante, poiché entrambi i membri dell'uguaglianza scritta si trasformano nello stesso modo in una trasformazione di Lorentz*. La forma quadrivettoriale è equivalente a due equazioni: $A = B$ ed $A_\tau = B_\tau$. Questa osservazione ci permetterà di trovare la soluzione del problema seguente. Postuliamo in particolare che *la legge di conservazione dell'impulso e dell'energia si possa scrivere sotto forma di uguaglianza di quadrivettori*. Il problema consiste nel trovare la forma di questi vettori.

3. Consideriamo una particella che si sposta con velocità $\boldsymbol{v}$ rispetto ad un sistema di riferimento fisso S. Sia dr il suo spostamento durante il tempo $dt = d\tau/c$. Queste grandezze formano il quadrivettore $(dr, c\,dt)$. Quest'ultimo resterà evidentemente quadrivettore anche dopo la moltiplicazione delle sue componenti per una stessa quantità costante. Prendiamo per quantità costante m_0/dt_0, dove m_0 è una costante e $dt_0 = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ il tempo proprio che, come è noto, è invariante. Si ottiene allora il quadrivettore

$$m_0\left(\frac{dr}{dt_0}, c\frac{dt}{dt_0}\right) = m(\boldsymbol{v}, c), \quad (111.5)$$

dove viene introdotta la notazione

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (111.6)$$

Supponiamo ora che la particella si muova *lentamente* in modo che si possa

trascurare la quantità v^2/c^2. Prendiamo per m_0 la massa della particella come essa è definita nella meccanica non relativistica. La componente spaziale del quadrivettore (111.5) sarà allora $m_0 \boldsymbol{v}$. Il vettore $m_0 \boldsymbol{v}$ nella meccanica newtoniana si dice *impulso*. È perciò naturale che nella meccanica relativistica l'impulso sia definito dall'espressione

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (111.7)$$

poiché al limite per $\boldsymbol{v}$ piccola essa si trasforma in $m_0 \boldsymbol{v}$. La quantità m_0 si dice *massa a riposo* e la quantità m *massa relativistica*. $(\boldsymbol{P}, mc)$ è quindi un quadrivettore e la quantità $(mc)^2 - P^2$ è il suo invariante. Il valore di quest'invariante è facile da trovare: per $v = 0$ esso si trasforma in $(m_0 c)^2$ e di conseguenza

$$(mc)^2 - P^2 = (m_0 c)^2. \qquad (111.8)$$

Non resta altro che rivelare il significato fisico della componente temporale del quadrivettore (111.5). Per farlo osserviamo che $d\boldsymbol{P}/dt$ è la forza agente sulla particella. Il lavoro di questa forza fornito per spostare la particella di $\boldsymbol{v}\, dt$ è uguale a $dA = \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\, d\boldsymbol{P}/m$ da cui, in base alla (111.8), $dA = c^2\, dm$. Integrando quest'espressione rispetto a m, si ottiene l'energia della particella. Se poniamo la costante d'integrazione uguale a zero, si ottiene la formula

$$\mathscr{E} = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (111.9)$$

La grandezza $\mathscr{E}$ è detta *energia totale della particella*. Per una particella a riposo $m = m_0$, di modo che la (111.9) si trasforma in

$$\mathscr{E}_0 = m_0 c^2. \qquad (111.10)$$

La grandezza $\mathscr{E}_0$ si dice *energia della particella a riposo*.

La formula (111.9), ottenuta per la prima volta nella forma generale da Einstein, stabilisce una *relazione tra la massa e l'energia*. L'energia cinetica di una particella è definita dall'espressione

$$K = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = (m - m_0)c^2. \qquad (111.11)$$

Se i moti sono lenti quest'espressione si trasforma nella formula ordinaria $K = 1/2 m_0 v^2$.

L'impulso e l'energia sono ora riuniti nel quadrivettore

$$(\boldsymbol{P}, mc) = (\boldsymbol{P}, \mathscr{E}/c), \qquad (111.12)$$

detto *quadrivettore impulso-energia*. Il suo invariante rispetto alla trasformazione di Lorentz è la quantità

$$\left(\frac{\mathscr{E}}{c}\right)^2 - P^2 = (m_0 c)^2 = \text{Inv}. \qquad (111.13)$$

Con ciò nella teoria della relatività le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia cessano di essere leggi indipendenti, ma sono associate in una *legge unica di conservazione del quadrivettore energia-impulso,* detta anche *legge della conservazione dell'energia-impulso.*

Non resta altro che rispondere a due domande. La prima è: perché nel calcolo del lavoro la forza è stata definita come nella meccanica non relativistica, cioè come la derivata dP/dt? La seconda è: perché l'energia è sempre definita a meno di una costante arbitraria non essenziale, mentre qui essa è definita in modo *univoco*? A queste due questioni si può dare una risposta *unica.* Essa consiste nel fatto che la grandezza $\mathscr{E}$, calcolata sopra e detta energia totale, deve soddisfare la condizione che dopo la divisione per c essa rappresenti la *componente temporale del quadrivettore* (111.5). Perciò l'energia deve essere definita in modo univoco.

Nel caso di un sistema di particelle non interagenti, o interagenti solo con mutue collisioni, il quadrivettore energia-impulso è uguale alla somma dei quadrivettori energia-impulso delle particelle singole. Con ciò nella teoria della relatività si arriva ad un'interpretazione uguale degli urti elastici e non elastici. Indipendentemente dalla natura degli urti, si conserva il vettore tridimensionale impulso del sistema. Quindi deve anche conservarsi l'energia come componente temporale (moltiplicata per c) del quadrivettore. Insieme con l'energia si conserva anche la massa relativistica, ma nel caso degli urti elastici e non elastici essa è ripartita in modo diverso tra la massa a riposo e la massa legata all'energia cinetica del moto macroscopico. Per esempio, quando si urtano due palline identiche non elastiche che si muovono con la stessa velocità l'una incontro all'altra, la scomparsa dell'energia cinetica di moto macroscopico (cioè la sua trasformazione nei moti molecolari) si manifesta in un aumento equivalente della massa a riposo del sistema: la massa di una pallina riscaldata è più grande di quella di una pallina fredda. Nel caso degli urti elastici restano invariate sia la massa a riposo, sia la massa legata all'energia cinetica di moto macroscopico.

Esistono particelle (*fotoni, neutrino*) la cui massa a riposo è nulla. Per queste particelle la relazione (111.13) tra l'energia e l'impulso è della forma

$$P = \mathscr{E}/c. \tag{111.14}$$

Queste particelle si muovono sempre con velocità c, perché, se così non fosse, come si vede dalle formule (111.7) e (111.9), l'energia e l'impulso di queste particelle si annullerebbero.

Problemi

1. Due particelle indentiche si muovono nel sistema di riferimento del laboratorio incontro l'una all'altra con la stessa velocità v. Calcolare la velocità relativa V di una particella rispetto all'altra. Quale energia $\mathscr{E}'$ nel sistema del laboratorio deve possedere una delle particelle per poter avere la stessa velocità relativa se la seconda particella (targhetta) è fissa? (Questo è il principio di funzionamento dell'*acceleratore a fasci opposti.*)

Soluzione. Secondo il teorema di composizione delle velocità

$$V = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}.$$

L'energia totale che si deve comunicare alla particella mobile è

$$\mathscr{E}' = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

dove $\mathscr{E}_0$ è l'energia della particella a riposo. L'energia reale che possiede la particella mobile è $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Di qui è facile ottenere

$$\mathscr{E}' = 2\frac{\mathscr{E}^2}{\mathscr{E}_0} - \mathscr{E}_0, \tag{111.15}$$

e per l'energia cinetica

$$K' = 2\left(\frac{\mathscr{E}^2}{\mathscr{E}_0} - \mathscr{E}_0\right). \tag{111.16}$$

(Un'altra soluzione è data al vol. I, § 28.)

2. Dedurre la generalizzazione relativistica della formula di Tsiolkovskij (cfr. il vol. I, § 21) per il moto dei razzi. Si ammette che le velocità del razzo e del getto di gas siano dirette lungo una stessa retta.

Soluzione. In base alle leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia

$$mv + m_{gas}v_{gas} = \text{costante}, \qquad m + m_{gas} = \text{costante},$$

dove m e m_{gas} sono le masse relativistiche del razzo e dei gas, e v e v_{gas} le loro velocità ad un istante arbitrario. I gas che sono già usciti dal razzo, non esercitano alcun'influenza sul suo moto, e perciò si può porre che all'istante considerato $m_{gas} = 0$. Non si ha allora l'indeterminazione su ciò che si deve intendere per v_{gas}. Ma visto che i gas sono prodotti costantemente, $dm_{gas} \neq 0$. Derivando le equazioni precedenti, si ottiene

$$m\,dv + (v - v_{gas})dm = 0.$$

Secondo la legge relativistica di composizione delle velocità

$$v_{gas} = \frac{v - u}{1 - vu/c^2},$$

dove u è la velocità del getto di gas rispetto al razzo. Eliminando v_{gas}, si ottiene l'equazione

$$dv + u\frac{1 - v^2/c^2}{1 - vu/c^2}\frac{dm}{m} = 0.$$

Applicando la formula (111.6), si trova dopo trasformazioni semplici

$$\frac{dv}{v^2 - c^2} = \frac{u}{c^2}\frac{dm_0}{m_0}.$$

Supponendo che la velocità u del getto di gas sia costante, si trova dopo integrazione

$$\frac{(m_0)_{iniz}}{m_0} = \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{c/2u}. \tag{111.17}$$

X. IRRAGGIAMENTO TERMICO

§ 112. *Radiazione d'equilibrio in una cavità*

1. L'emissione di luce è la conseguenza delle transizioni degli atomi, delle molecole o di altri sistemi atomici dagli stati di maggior energia in quelli di minore energia. La cosiddetta *radiazione termica* differisce da altri tipi di radiazione solo per il processo di eccitazione dei sistemi che emettono la radiazione. Nei fenomeni di radiazione termica questa transizione è realizzata in conseguenza dei moti termici degli atomi e delle molecole.

Nei problemi di radiazione termica è molto importante la nozione della cosiddetta *radiazione d'equilibrio*. Per definire questa nozione consideriamo una cavità a pareti fisse e opache la cui temperatura è mantenuta costante. Gli atomi e le molecole delle pareti passano agli stati eccitati a spese dell'energia di moto termico; nel corso della transizione inversa allo stato non eccitato le particelle emettono una radiazione che riempie la cavità. Cadendo sulle pareti della cavità, l'energia radiante viene in parte riflessa ed in parte assorbita. Ne risulta una variazione della direzione di propagazione, della composizione spettrale, della polarizzazione e dell'intensità di radiazione. In conseguenza di tutti questi processi, come segue dai principi generali della termodinamica, nella cavità si stabilisce uno stato di radiazione macroscopicamente ben determinato. Questo stato è tale che la quantità d'energia radiante emessa nell'unità di tempo, caratterizzata da una certa composizione spettrale, una polarizzazione ed una direzione di propagazione determinate è in media uguale alla quantità d'energia assorbita di uguali caratteristiche. Come ogni stato d'equilibrio, questo stato è caratterizzato dal fatto che ad ogni processo microscopico che si produce nel sistema corrisponde un processo microscopico inverso avente una probabilità di prodursi uguale a quella del processo diretto (*principio dell'equilibrio dettagliato*). Grazie a ciò lo stato della radiazione nella cavità resta *macroscopicamente costante* nel tempo. Il passaggio allo stato d'equilibrio, come ogni processo statistico, è regolato da *leggi di probabilità*. Nella cavità si stabilisce uno stato di radiazione caotico al quale corrisponde la *probabilità massima*. Questo stato di radiazione si dice radiazione d'equilibrio.

Le proprietà della radiazione d'equilibrio, e cioè la densità d'energia ra-

diante, la sua ripartizione spettrale in frequenze ed in direzioni di propagazione, nonché la polarizzazione *non dipendono assolutamente dalla forma della cavità e dalla natura delle sue pareti.* Queste proprietà, analogamente a quanto avviene in un gas contenuto in un recipiente, dipendono solo dalla *temperatura delle pareti della cavità.* La radiazione d'equilibrio è *omogenea,* cioè la sua densità è la stessa in tutti i punti all'interno della cavità. Essa è *isotropa e non polarizzata*: tutte le direzioni di propagazione possibili sono equiprobabili ed in ogni punto dello spazio le direzioni dei vettori ***E*** e ***B*** variano in modo aleatorio nel corso del tempo. Visto che la radiazione è in equilibrio termico con le pareti, si può parlare sia di temperatura delle pareti, sia di *temperatura della radiazione stessa,* ponendo, per definizione, uguali entrambe le temperature. Si deve però sottolineare che la temperatura della radiazione d'equilibrio è una *proprietà della radiazione stessa* e non quella delle pareti con le quali essa è in equilibrio termico. Si può parlare di temperatura di una radiazione anche se non esiste alcuna parete. In particolare, per esempio, la densità d'energia di radiazione d'equilibrio definisce univocamente la sua temperatura (cfr. il § 115).

Se le pareti della cavità sono assolutamente non assorbenti, per esempio se esse sono perfettamente riflettenti, in questa cavità non avrà luogo assorbimento, né emissione di luce. In una tale cavità si può introdurre una radiazione di composizione spettrale arbitraria. Riflettendosi dalle pareti, la radiazione cambia direzione di popagazione ad ogni riflessione, ma la sua composizione spettrale resta costante. Se la cavità a pareti riflettenti possiede una forma adeguata, sono possibili casi in cui si conservano anche la direzione di propagazione e la polarizzazione della radiazione. Questo si produce, per esempio, quando la cavità ha la forma di un cilindro retto a basi assolutamente riflettenti. In questa cavità un raggio di luce di frequenza qualsiasi e di polarizzazione arbitraria può propagarsi avanti e indietro parallelamente all'asse del cilindro, riflettendosi successivamente sulle basi speculari. Ma tutti i casi simili sono *ideali* e non sono mai realizzati esattamente nella pratica. Nei casi reali la radiazione contenuta in una cavità è *priva d'equilibrio ed instabile.* Perfino se la deviazione, rispetto al caso ideale, è infinitamente piccola, è sufficiente aspettare un certo tempo, e nella cavità si stabilirà obbligatoriamente una radiazione d'equilibrio. I sistemi perfetti presentano tuttavia una grande importanza per le ricerche teoriche. Si può considerare che le pareti siano assolutamente riflettenti e porre però che nella cavità si stabilirà sempre una radiazione d'equilibrio. Per farlo è sufficiente, per esempio, introdurre nella cavità un corpo assorbente e radiante infinitamente piccolo, un *granello di polvere,* per usare l'espressione di Planck. Questo granello di polvere, non giocando praticamente alcun ruolo nel bilancio energetico del sistema, trasforma però qualsiasi stato fuori equilibrio apparso nella cavità in uno stato d'equilibrio.

2. Introduciamo ora qualche grandezza che caratterizzi lo stato della ra-

diazione nello spazio. Queste grandezze s'applicano sia alla radiazione d'equilibrio, che ad una radiazione qualsiasi.

Indichiamo con u la densità d'energia di radiazione, cioè la quantità di energia contenuta nell'unità di volume dello spazio. Questa densità d'energia può essere decomposta secondo le frequenze o le lunghezze d'onda, cioè rappresentata nella forma

$$u = \int_0^\infty u_\omega \, d\omega = \int_0^\infty u_\lambda \, d\lambda. \tag{112.1}$$

Le quantità $u_\omega \, d\omega$ ed $u_\lambda \, d\lambda$ rappresentano la densità di volume d'energia radiante per un intervallo di frequenze (ω, $\omega + d\omega$) o per un intervallo di lunghezze d'onda (λ, $\lambda + d\lambda$). I coefficienti u_ω ed u_λ si dicono *densità spettrali dell'energia radiante*. Se si tratta di uno stesso intervallo spettrale, espresso nelle diverse forme, si ha $u_\omega \, d\omega = u_\lambda \, d\lambda$. Qui $\lambda = 2\pi c/\omega$ e per conseguenza $d\lambda/\lambda = -d\omega/\omega$. Ometteremo il segno meno, poiché esso serve solo ad indicare che la lunghezza d'onda diminuisce con il crescere della frequenza. Ammettendo quindi che le quantità $d\omega$ e $d\lambda$ siano sostanzialmente positive, si può scrivere

$$u_\lambda = \frac{\omega}{\lambda} u_\omega, \qquad u_\omega = \frac{\lambda}{\omega} u_\lambda. \tag{112.2}$$

Nella fisica teorica è generalmente utilizzata la quantità u_ω ed in quella sperimentale la preferenza è data ad u_λ. Per una radiazione d'equilibrio le funzioni u_ω ed u_λ dipendono soltanto dalla frequenza ω (o dalla lunghezza d'onda λ) e dalla temperatura T della radiazione, ma non dipendono dalla forma della cavità e dal materiale delle pareti. Queste funzioni dipendono anche dal mezzo che occupa la cavità. Questa dipendenza sarà stabilita nel § 114. Per il momento supporremo che nella cavità regni il vuoto: *in questo caso u_ω sarà una funzione universale soltanto di ω e di T, ed u una funzione universale soltanto di T*. L'*oggetto principale* della teoria della radiazione termica consiste nel trovare la funzione $u_\omega(\omega, T)$.

Il flusso d'energia radiante che passa nel tempo dt attraverso un elemento di superficie ds entro l'angolo solido $d\Omega$, il cui asse è perpendicolare a ds, si può rappresentare con l'espressione

$$d\Phi = I \, ds \, d\Omega \, dt. \tag{112.3}$$

La grandezza I si dice *intensità specifica della radiazione*. Se decomponiamo questa grandezza in uno spettro, cioè la rappresentiamo con l'integrale

$$I = \int_0^\infty I_\omega \, d\omega, \tag{112.4}$$

la grandezza I_ω è detta *intensità specifica della radiazione di frequenza ω*.

Stabiliamo una relazione tra u ed I (nonché tra u_ω ed I_ω) per il campo di radiazione nel vuoto. Delimitiamo nello spazio un parallelepipedo rettangolo infinitamente piccolo di base ds e d'altezza dl (fig. 337). Isoliamo mentalmente il fascio di raggi penetranti nel parallelepipedo attraverso la sua base ds le cui direzioni sono contenute nei limiti dell'angolo solido $d\Omega$, il cui asse è normale alla base ds. Ognuno di questi raggi raggiunge la seconda base del parallelepipedo in un tempo $dt = dl/c$. Nel corso di questo tempo, dal fascio di raggi isolato, entra nel parallelepipedo attraverso la base ds l'energia radiante $I\, ds\, d\Omega\, dt = (I/c)\, d\Omega\, dV$, dove $dV = dl\, ds$ è il volume del parallelepipedo. Dividendo per dV, troviamo $(I/c)\, d\Omega$, che è la
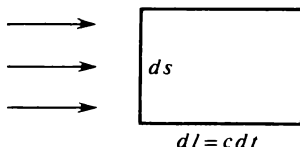
Fig. 337

densità du d'energia radiante che si propaga nell'angolo solido $d\Omega$. Per il suo senso fisico, du può essere funzione di un punto nello spazio, ma non può dipendere dalla forma del parallelepipedo. Ne segue che per trovare la densità totale u d'energia radiante in un punto dato è necessario integrare l'espressione di du su tutte le direzioni spaziali. Nel caso generale in quest'integrazione si deve tener conto del fatto che l'intensità specifica I dipende dalla direzione di radiazione, ma nel caso di una radiazione isotropa, quale è in particolare la radiazione d'equilibrio, I non dipende dalla direzione. L'integrazione si riduce allora ad una semplice sostituzione dell'angolo solido $d\Omega$ con l'angolo solido totale $\Omega = 4\pi$. Si ottiene allora

$$u = \frac{4\pi}{c} I. \tag{112.5}$$

Analogamente,

$$u_\omega = \frac{4\pi}{c} I_\omega. \tag{112.6}$$

Le stesse relazioni sono valide anche quando la cavità è riempita di un mezzo omogeneo, isotropo e non assorbente. Si deve allora sostituire c con la velocità di gruppo della luce nel mezzo considerato.

§ 113. *Legge di Kirchhoff*

1. Passiamo ora allo studio delle *leggi d'emissione e d'assorbimento termici dei corpi*. Limitiamoci al caso particolare in cui i corpi emettenti ed assorbenti siano *opachi*. Questa condizione è verificata quando lo spessore

dei corpi è sufficientemente grande perché ogni raggio che penetra in essi sia assorbito prima di raggiungere la superficie opposta dei corpi. Il flusso d'energia radiante di frequenza compresa tra ω e $\omega + d\omega$ emesso nel tempo dt da un elemento di superficie ds di un corpo in un angolo solido $d\Omega$ può essere rappresentato dall'espressione

$$d\Phi = E_\omega \, ds \cos\varphi \, d\Omega \, d\omega \, dt, \tag{113.1}$$

dove φ è l'angolo tra la direzione della radiazione e la normale all'area ds. Qui è stato introdotto il fattore $\cos\varphi$, poiché è più comodo riferire la radiazione non al valore dell'area ds, ma alla sua parte « visibile », cioè alla proiezione dell'area ds su un piano perpendicolare alla direzione della radiazione (cfr. il § 22). La grandezza E_ω si dice *potere emissivo* della superficie del corpo nella direzione definita dall'angolo φ [1].

Il *potere assorbente* A_ω di una superficie per una radiazione della stessa frequenza, della stessa direzione di propagazione e della stessa polarizzazione è una quantità senza dimensione indicante la parte di energia incidente che viene assorbita dalla superficie considerata.

Si tratta di *radiazione puramente termica* quando tutte le proprietà del corpo emettente ed assorbente dipendono *soltanto dalla temperatura di questi corpi.* Sono esclusi da queste considerazioni tutti i casi di radiazione « fredda » o « priva d'equilibrio » quando il corpo radiante emette radiazioni non perché sia stato riscaldato, ma perché certi livelli energetici sono stati eccitati ed i corpi emettono radiazione fintanto che avvengono transizioni sui livelli normali.

Per quanto riguarda la dipendenza del potere emissivo di un corpo dal mezzo ambiente omogeneo, si può analizzare questa questione da due punti di vista. Da una parte, si può definire E_ω come il *flusso totale* d'energia radiante di frequenza e di direzione data, inviata dalla superficie del corpo *nel mezzo ambiente.* In questo caso il potere emissivo caratterizza le proprietà dei *due mezzi* che si toccano lungo la superficie del corpo radiante. Secondo un altro punto di vista sviluppato da Prévost (1751-1839) all'inizio del secolo scorso, il flusso risultante d'energia radiante attraverso la superficie del corpo è la *differenza di due flussi inviati nel vuoto: il flusso emesso dal corpo* nell'ambiente, ed il flusso *inviato dal mezzo* nello spazio occupato dal corpo. Il primo flusso caratterizza il potere emissivo del *corpo* ed il secondo il potere emissivo del *mezzo.* Ci atteniamo al secondo punto di vista, poiché in questo caso le grandezze E_ω ed A_ω che caratterizzano il *corpo emettente* non dipendono dal mezzo. A parità di tutte le altre condizioni queste grandezze dipendono soltanto dalla *temperatura del corpo.*

---

[1] Qui rinunciamo alla tradizione. Per ragioni storiche il potere emissivo di un corpo è solitamente definito come il *flusso totale* d'energia radiante che l'area ds invia *in tutte le direzioni* esterne, cioè in un angolo solido 2π. Per uno studio più dettagliato si deve scomporre questo potere emissivo secondo tutte le frequenze e direzioni, come infatti faremo.

2. Stabiliamo una relazione tra i poteri emissivo ed assorbente. Visto che queste grandezze caratterizzano soltanto la superficie del corpo e non dipendono assolutamente dalla radiazione ambientale, nei ragionamenti concernenti questa radiazione si può introdurre qualsiasi ipotesi. Supponiamo che il corpo che emette sia circondato da tutte le parti da una radiazione d'equilibrio la cui temperatura sia uguale a quella del corpo. Ciò si può realizzare scegliendo, come superficie che emette radiazioni, una parte della superficie interna di una cavità chiusa le cui pareti sono mantenute a temperatura costante. Consideriamo quella parte di radiazione compresa nell'intervallo di frequenze ω, $\omega + d\omega$, e studiamo le sue trasformazioni durante l'emissione e la riflessione dalle pareti della cavità. Su una area ds della parete (fig. 338) durante il tempo dt entro l'angolo solido $d\Omega$ cade un
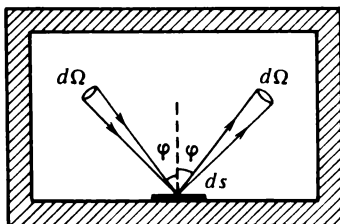
Fig. 338

flusso di radiazione uguale a

$$I_\omega \, ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt.$$

Una parte di questo flusso

$$(1 - A_\omega) I_\omega \, ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt$$

è riflessa e la parte restante è assorbita. Al flusso riflesso si sovrappone il flusso d'emissione propria dell'area ds

$$E_\omega \, ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt.$$

Di conseguenza l'area ds invia nella cavità un flusso uguale a

$$[(1 - A_\omega) I_\omega + E_\omega] ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt.$$

Ma allo stato d'equilibrio questo stesso flusso può essere rappresentato dall'espressione

$$I_\omega \, ds \cos \varphi \, d\omega \, d\Omega \, dt.$$

Uguagliando queste espressioni, si ottiene

$$\frac{E_\omega}{A_\omega} = I_\omega. \tag{113.2}$$

Questa dimostrazione implica che la riflessione sia *speculare*, benché quest'ipotesi non sia essenziale. Se la riflessione è *diffusa*, il flusso incidente è diffuso in tutte le direzioni. Ma allo stato d'equilibrio ciò conduce solo alla sostituzione di certi raggi con altri. Il flusso totale d'energia diffusa, inviato dall'area ds in un qualsiasi angolo solido $d\Omega$ fisso nello spazio, resta costante. Restano valide tutte le relazioni quantitative utilizzate nella dimostrazione, così come il risultato finale (113.2).

La grandezza I_ω non dipende dal materiale delle pareti della cavità, ma è una funzione universale della frequenza ω e della temperatura T del corpo. *Il rapporto tra il potere emissivo ed il potere assorbente è lo stesso per tutti i corpi ed è una funzione universale della frequenza e della temperatura.* Questa è la legge di Kirchhoff stabilita nel 1859. Questa legge è la generalizzazione quantitativa esatta della regola che fu stabilita empiricamente da Prévost nel 1809. Secondo questa regola *se i poteri assorbenti dei corpi sono diversi, lo saranno pure i loro poteri emissivi.*

3. Si dice *corpo nero* un corpo il cui potere assorbente A_ω è uguale all'unità per radiazioni di qualsiasi frequenza. Indichiamo con e_ω il potere emissivo del corpo nero. È evidente che $e_\omega = I_\omega$. Perciò anche la radiazione d'equilibrio è detta *radiazione di corpo nero.* Si può ora enunciare la legge di Kirchhoff come segue: *il rapporto tra il potere emissivo ed il potere assorbente è una funzione universale della frequenza e della temperatura del corpo*; *questo rapporto è uguale al potere emissivo del corpo nero.* Il potere emissivo di un corpo è tanto più grande, quanto più grande è il suo potere assorbente. Poiché la grandezza A_ω non può essere superiore all'unità, *tra tutti i corpi che si trovano ad una stessa temperatura il corpo nero è quello che possiede il maggior potere emissivo.* Dalla legge di Kirchhoff segue anche che *ad una temperatura data ogni corpo emette preferibilmente raggi con la stessa lunghezza d'onda di quelli che assorbe più fortemente alla stessa temperatura.*

In natura non esistono corpi assolutamente neri, come non esiste alcun altro oggetto idealizzato. La migliore approssimazione di un corpo nero è una cavità chiusa nella cui parete è praticato un piccolo foro, attraverso il quale la radiazione può uscire dalla cavità all'esterno. Se le pareti sono opache e il foro sufficientemente piccolo, nella cavità si stabilirà uno stato di radiazione infinitamente vicino allo stato d'equilibrio. La radiazione che esce attraverso il foro è praticamente uguale a quella che verrebbe emessa dalla superficie di un corpo nero della stessa area e della stessa forma.

Si può convincersene anche in un altro modo. Un raggio luminoso, penetrato nella cavità dall'esterno attraverso l'apertura, subirà numerose riflessioni sulle pareti della cavità (fig. 339). Ogni riflessione è accompagnata dall'assorbimento di una parte dell'energia. Dopo tutte queste riflessioni il raggio o non uscirà dalla cavità, o ne uscirà con una parte piccolissima dell'energia radiante entrata. Quasi tutta l'energia viene assorbita dalle pareti. Ciò significa che una cavità munita di un piccolo foro si comporta, dal

punto di vista dell'assorbimento, *come un corpo nero*; in virtù della legge di Kirchhoff, la cavità si comporta allo stesso modo dal punto di vista dell'emissione. Questo procedimento è sempre utilizzato in tutte le misure quantitative precise della radiazione di corpo nero.

Illustriamo queste considerazioni con un esempio. Se le pareti della cavità munita di un piccolo foro sono fortemente illuminate dall'esterno, l'apertura apparirà in nero sullo sfondo chiaro delle pareti. Questo è l'aspetto che ha una finestra aperta su una facciata di una casa. Ciò avrà luogo persino nel caso in cui la superficie esterna delle pareti della cavità sia essa stessa colorata in nero. Se portiamo ad incandescenza le pareti di una
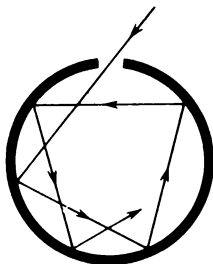
Fig. 339

cavità fabbricata con un materiale di piccolo potere assorbente (per esempio porcellana bianca), il foro brillerà sullo sfondo più scuro della radiazione diretta delle pareti. Se la superficie esterna delle pareti è colorata in nero esse brillano di più; malgrado ciò, la loro brillanza è minore di quella dell'apertura. La colorazione della superficie interna della cavità non esercita alcun'influenza sulla brillanza del foro.

4. Visto che per un corpo nero $e_\omega = I_\omega$ e la radiazione d'equilibrio è isotropa, il potere emissivo del corpo nero è lo stesso in tutte le direzioni. Se si tratta di una radiazione termica (cioè per incandescenza), il potere emissivo coincide con la luminanza superficiale del corpo nero (cfr. il § 22). Ne segue che *il potere emissivo del corpo nero obbedisce alla legge di Lambert* (cfr. il § 22).

È evidente che l'inverso non è vero. La legge di Lambert può essere valida anche per corpi che non sono assolutamente neri. La legge di Kirchhoff permette di precisare questa questione. Secondo questa legge, $E_\omega = A_\omega e_\omega$, e quindi il corpo segue la legge di Lambert se il suo potere assorbente non dipende dalla direzione della radiazione assorbita. Visto che per un corpo opaco l'energia della luce incidente è uguale alla somma delle energie delle luci assorbita e diffusa, la legge di Lambert è applicabile alle radiazioni emesse da tutti i corpi che diffondono uniformemente la luce incidente in tutte le direzioni. Questi corpi sono detti *assolutamente matti*. Quindi, *la*

radiazione termica di un corpo assolutamente matto segue la legge di Lambert. Questo legame della legge di Lambert con la legge di Kirchhoff venne osservato nel 1897 da V.A. Ulianin (1863-1930), benché i suoi ragionamenti fossero un po' più complicati di quelli riportati sopra.

§ 114. *Formula di Kirchhoff-Clausius*

Calcoliamo ora la densità d'energia e l'intensità specifica di una radiazione d'equilibrio in un mezzo trasparente omogeneo ed isotropo d'indice di rifrazione n. Questa radiazione d'equilibrio si stabilisce in una cavità chiusa interamente occupata dal mezzo considerato e le cui pareti sono mantenute a temperatura costante. Esattamente la stessa radiazione esisterà nel mezzo anche nel caso in cui esso occupi solo una parte della cavità. Supponiamo che una parte della cavità sia riempita con il mezzo considerato e che nella parte restante regni il vuoto. La radiazione d'equilibrio nel mezzo e nel vuoto non dipende assolutamente dalla forma e dalle proprietà della superficie di separazione tra il mezzo ed il vuoto. Senza modificare il risultato finale, si può ammettere che questa superficie di separazione sia piana e liscia.

La radiazione nel mezzo non dipende dalle dimensioni di quest'ultimo. Si può dunque ammettere che l'estensione del mezzo sia sufficiente perché ogni raggio luminoso, che penetra in esso, sia interamente assorbito prima di raggiungere le pareti della cavità. Lo scambio d'energia tra il mezzo ed il vuoto avrà allora luogo solo attraverso la riflessione e la rifrazione di radiazione sulla superficie di separazione. Questo scambio d'energia obbedisce al *principio dell'equilibrio dettagliato* e non può alterare lo stato d'equilibrio tra la radiazione nel mezzo e nel vuoto. Partendo da questa considerazione si può stabilire una relazione tra la densità d'energia u^0 e l'intensità specifica I^0 di radiazione nel vuoto da una parte e tra le stesse grandezze u ed I nel mezzo dall'altra. (In questo paragrafo tutte le grandezze concernenti il vuoto hanno lo zero come indice e tutte le grandezze del mezzo sono prive di indice.)

Visto che il principio dell'equilibrio dettagliato è verificato, è sufficiente considerare solo una parte della radiazione totale, quella che occupa l'intervallo di frequenze ω, $\omega + d\omega$. Attraverso un'area unitaria della superficie di separazione arriva dal vuoto, nell'unità di tempo, contenuto entro un angolo solido $d\Omega$, un flusso luminoso $\Phi_1 = I_\omega^0 \, d\Omega_0 \, d\omega \cos \varphi_0$, dove φ_0 è l'angolo d'incidenza (fig. 340). Secondo il principio dell'equilibrio dettagliato deve esistere un flusso d'energia uguale che si propaga in senso inverso. Quest'ultimo è composto di due flussi. Il primo è dovuto alla riflessione del flusso Φ_2 ed è uguale a $(1 - A_\omega) I_\omega^0 \, d\Omega_0 \, d\omega \cos \varphi_0$. Il secondo flusso è dovuto alla rifrazione del flusso Φ_3 proveniente dal mezzo. In virtù delle formule di Fresnel i coefficienti di riflessione sulla superficie di separazione

dei raggi che si propagano in direzioni opposte sono gli stessi. Ne segue che il secondo flusso è $A_\omega I_\omega \, d\Omega \, d\omega \cos\varphi$, dove φ è l'angolo di rifrazione e $d\Omega$ l'angolo solido nel mezzo che, per rifrazione, diventa $d\Omega_0$. Dividendo per $d\omega$, scriviamo la condizione d'equilibrio dettagliato nella forma

$$(1 - A_\omega) I_\omega^0 \cos\varphi_0 \, d\Omega_0 + A_\omega I_\omega \cos\varphi \, d\Omega = I_\omega^0 \cos\varphi_0 \, d\Omega_0,$$

o

$$I_\omega \cos\varphi \, d\Omega = I_\omega^0 \cos\varphi_0 \, d\Omega_0.$$

Prendiamo per $d\Omega_0$ l'angolo solido (non rappresentato in figura 340) delimitato da un cono le cui generatrici formano con la normale alla superficie di
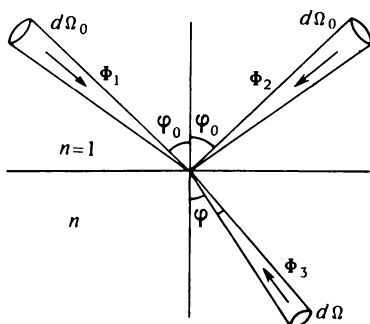
Fig. 340

separazione gli angoli φ_0 e $\varphi_0 + d\varphi_0$, cioè $d\Omega_0 = 2\pi \sin\varphi_0 \, d\varphi_0$. Analogamente, $d\Omega = 2\pi \sin\varphi \, d\varphi$. Si ha allora

$$I_\omega \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = I_\omega^0 \cos\varphi_0 \sin\varphi_0 \, d\varphi_0.$$

Dalla legge di rifrazione $\sin\varphi_0 = n \sin\varphi$, di modo che $\cos\varphi_0 \, d\varphi_0 = n \cos\varphi \, d\varphi$. Per conseguenza

$$I_\omega \sin\varphi = n I_\omega^0 \sin\varphi_0.$$

Ne segue, in virtù della stessa legge, che

$$I_\omega = n^2 I_\omega^0. \tag{114.1}$$

Questa formula risolve il problema; essa fu trovata nel 1860 da Kirchhoff ed indipendentemente nel 1864 da Clausius e viene chiamata *formula di Kirchhoff-Clausius.*

Nel vuoto le grandezze I_ω^0 ed u_ω^0 sono legate dalla relazione (112.6), cioè $cu_\omega^0 = 4\pi I_\omega^0$. Nel mezzo la relazione corrispondente è $v_{gr} u_\omega = 4\pi I_\omega$, dove v_{gr} è la velocità di gruppo. Da queste relazioni, otteniamo che

$$u_\omega = u_\omega^0 n^2 \frac{c}{v_{gr}}. \tag{114.2}$$

Per i mezzi non dispersivi

$$u_\omega = n^3 u_\omega^0. \qquad (114.3)$$

Alle relazioni (114.1) e (114.3) si può dare una forma più facile da ricordare ed il cui significato fisico profondo diventa chiaro quando il problema è trattato con i metodi della fisica statistica (cfr. il § 117). Notando che $n = \lambda_0/\lambda$, le formule (114.1) e (114.3) si scrivono

$$\lambda^2 I_\omega = \lambda_0^2 I_\omega^0, \qquad (114.4)$$

$$\lambda^3 u_\omega = \lambda_0^3 u_\omega^0. \qquad (114.5)$$

La relazione (114.4) significa che *in una radiazione d'equilibrio i flussi d'energia che attraversano una superficie rettangolare di lato uguale alla lunghezza d'onda* λ (*nel mezzo considerato*) e *rapportati all'unità d'angolo solido nel senso della normale alla superficie sono gli stessi per tutti i mezzi e dipendono solo dalla loro temperatura.* Quest'asserzione è valida sia per il flusso totale, sia per le sue costituenti monocromatiche. Analogamente, la relazione (114.5) afferma che *l'energia di una radiazione d'equilibrio localizzata in un cubo di spigolo uguale alla lunghezza d'onda* λ, *è la stessa in tutti i mezzi isotropi non dispersivi e dipende solo dalla temperatura del mezzo.* Quest'asserzione si applica non solo alla densità totale d'energia, ma anche alle sue componenti monocromatiche.

§ 115. *Legge di Stefan-Boltzmann*

1. Nel XIX secolo sono state intraprese numerose ricerche sulla dipendenza tra il *potere emissivo integrale* (emettenza energetica integrale) e la temperatura dei corpi riscaldati, cioè sulla grandezza che caratterizza l'*energia totale* di tutte le lunghezze d'onda emesse dai corpi. I risultati ottenuti erano contradditori. La principale causa delle divergenze fu definitivamente chiarita dopo che Kirchhoff ebbe stabilito la sua legge, poiché la radiazione dipende non soltanto dalla temperatura, ma anche dalla composizione dei corpi e dalle proprietà fisiche della superficie radiante. E proprio quest'aspetto della questione era stato trascurato dai ricercatori. La sola legge empirica che merita di essere menzionata à la legge stabilita da Stefan (1835-1898) nel 1879. Stefan scoprì che *per i corpi neri il potere emissivo è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura assoluta.* Cinque anni più tardi Boltzmann ritrovò questo risultato teoricamente partendo da considerazioni termodinamiche e dimostrò che esso è *rigorosamente vero per i corpi neri.* Questo risultato detto *legge di Stefan-Boltzmann* ha ricevuto numerose verifiche sperimentali.

La dimostrazione della legge di Stefan data da Boltzmann così come tutte le ricerche ulteriori sulla teoria della radiazione termica sono basati sui risultati di Maxwell che previde e calcolò la *pressione di radiazione* (cfr.

il vol. II, § 61; vol. III, § 145, il problema 2 del § 84 di questo volume). Per una radiazione isotropa questa pressione è uguale a $\mathscr{P} = 1/3u$, dove u è la densità integrale di energia radiante. A quest'espressione deve portare *ogni teoria relativistica della luce,* indipendentemente se questa teoria sia corpuscolare o ondulatoria. Prima dell'apparizione della teoria della relatività questo risultato non poteva essere conosciuto ed i risultati di Maxwell non erano sempre ritenuti veri. In particolare, secondo la teoria corpuscolare non relativistica, dovrebbe essere $\mathscr{P} = 2/3u$, conformemente alla teoria cinetica dei gas (cfr. il vol. II, § 59). Perciò gli esperimenti di P.N. Lebedev, che per la prima volta misurò nel 1900 la pressione della luce e confermò le previsioni di Maxwell, hanno giocato un ruolo determinante per tutta la termodinamica dell'energia radiante.

2. Effettueremo la dimostrazione della legge di Stefan-Boltzmann utilizzando il *metodo dei cicli,* poiché in questo modo saranno ottenute importanti relazioni che utilizzeremo in seguito. Supponiamo che una radiazione isotropa di composizione spettrale qualsiaisi sia racchiusa in un involucro adiabatico a pareti perfettamente riflettenti. Sottoponiamo questa radiazione ad una trasformazione adiabatica quasi-statica, durante la quale il volume V delimitato dall'involucro varia in modo infinitamente lento. Per essere sicuri che nel corso di questa trasformazione la radiazione resti sempre isotropa, si può prendere un involucro sferico (nel paragrafo che segue mostreremo che questa precauzione è inutile). L'energia interna della radiazione nell'involucro è uguale a uV. Se il volume aumenta di dV, una parte di quest'energia è utilizzata per produrre il lavoro $\mathscr{P}dV = -d(uV)$. Poiché per una radiazione isotropa $\mathscr{P} = 1/3u$, quest'equazione si può scrivere nella forma $4/3u\, dV + V\, du = 0$. Ne segue che durante la trasformazione

$$uV^{4/3} = \text{costante} \tag{115.1}$$

o

$$\mathscr{P}V^{4/3} = \text{costante.} \tag{115.2}$$

Quest'è l'*equazione dell'adiabatica* della radiazione isotropa che è assolutamente analoga all'equazione dell'adiabatica di Poisson per un gas perfetto. La costante adiabatica è $\gamma = 4/3$.

A causa dell'effetto Doppler, durante una compressione o una dilatazione adiabatica della radiazione deve variare la sua composizione spettrale. Supponiamo, per esempio, che la radiazione isotropa occupi l'intervallo spettrale ω, $\omega + d\omega$. In conseguenza della riflessione sulla parete in moto la frequenza ω e la larghezza $d\omega$ dell'intervallo spettrale varieranno e diventeranno uguali a ω' e $d\omega'$. Dovrà essere verificata la seguente relazione:

$$u_\omega d\omega \cdot V^{4/3} = u'_{\omega'} d\omega' \cdot V'^{4/3} = \text{costante,} \tag{115.3}$$

dove V' ed $u'_{\omega'}$ sono il volume e la densità spettrale di energia della radiazione di frequenza ω' alla fine della trasformazione.

3. Dimostriamo ora la legge di Stefan-Boltzmann. A questo scopo sottoponiamo la radiazione di corpo nero ad un *ciclo di Carnot*. Supponiamo che la radiazione sia contenuta in un cilindro le cui pareti laterali ed il pistone siano perfettamente riflettenti, mentre il suo fondo sia nero e possa essere messo in contatto termico con una sorgente calda alla temperatura T_1 e con una sorgente fredda di temperatura T_2. La radiazione può essere adiabaticamente isolata mediante un coperchio a saliscendi perfettamente riflettente introdotto di lato in modo da ricoprire il fondo nero del cilindro. In assenza del saliscendi, quando il fondo nero del cilindro è messo in contatto termico con la sorgente calda o fredda, la radiazione contenuta nel cilindro è all'equilibrio. Per essere sicuri che la radiazione sarà sempre all'equilibrio nel corso della trasformazione adiabatica quando è inrodotto il saliscendi, introduciamo all'interno del cilindro un granello di polvere nera il cui ruolo è stato chiarito al punto 1 del § 112. Lungo l'isoterma 1-2 (fig. 341) il fondo del cilindro è in contatto con la sorgente calda. La quan-
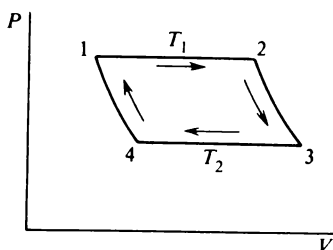
Fig. 341

tità di calore ceduta dalla sorgente calda lungo questa isoterma è uguale a

$$Q_1 = u_1(V_2 - V_1) + \mathscr{P}_1(V_2 - V_1) = \frac{4}{3}u_1(V_2 - V_1).$$

La quantità di calore fornita dal cilindro alla sorgente fredda lungo l'isoterma 3-4 è $Q_2 = 4/3u_2(V_3 - V_4)$. Secondo il teorema di Carnot

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{u_1(V_2 - V_1)}{u_2(V_3 - V_4)} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Lungo le adiabatiche 2-3 e 4-1 in virtù della (115.1) sono verificate le seguenti relazioni

$$u_1^{3/4}V_2 = u_2^{3/4}V_3, \quad u_1^{3/4}V_1 = u_2^{3/4}V_4.$$

Ne segue che

$$\frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_4} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{3/4},$$

e perciò $u_1/T_1^4 = u_2/T_2^4 =$ costante. Di conseguenza

$$u = aT^4, \tag{115.4}$$

dove a è una costante universale. Ma questa è un'altra forma della legge di Stefan-Boltzmann.

Il risultato (115.4) si può ottenere in modo più semplice se alla radiazione d'equilibrio applichiamo la formula termodinamica generale

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial T}\right)_V - \mathscr{P}. \tag{115.5}$$

Sostituendo qui $U = Vu(T)$, $\mathscr{P} = 1/3u(T)$, si ottiene la stessa equazione differenziale, integrando la quale è stata ottenuta la formula (115.4). Ma non volevamo utilizzare la formula (115.5).

§ 116. *Teorema e legge di spostamento di Wien*

1. Importanti risultati nella termodinamica delle radiazioni sono stati ottenuti da W. Wien (1864-1928) nel 1893-1894. Wien dimostrò che *una radiazione d'equilibrio contenuta in un involucro a pareti perfettamente riflettenti resta d'equilibrio durante una compressione o una dilatazione quasi-statica dell'involucro.*

Per dimostrare questo teorema ci limitiamo ad un involucro di forma sferica. In questo caso, data la simmetria del sistema, non è necessario dimostrare che nel corso della trasformazione l'isotropia della radiazione resta sempre costante. Comprimiamo la radiazione in modo quasi-statico dal volume iniziale V_1 a quello finale V_2. Per ottenere questo, viene eseguito un lavoro contro la pressione di radiazione e l'energia della radiazione contenuta nell'involucro aumenterà. La composizione spettrale della radiazione varierà per effetto Doppler. Supponiamo che in conseguenza di ciò la radiazione cessi di essere d'equilibrio. Introduciamo all'interno dell'involucro, nello stato finale, un granello di polvere nero infinitamente piccolo che assorbe ed emette luce. Dopo un periodo di tempo sufficientemente lungo, questo granello ristabilirà la radiazione d'equilibrio mediante un processo irreversibile e spontaneo. È evidente che il processo inverso, che faccia passare la radiazione d'equilibrio ad uno stato fuori equilibrio, non può essere spontaneo.

Quando la radiazione all'interno dell'involucro avrà raggiunto l'equilibrio, lasciando il granello di polvere al suo posto, cominciamo ad aumentare adiabaticamente il volume dell'involucro in modo infinitamente lento finché esso non ritorni al suo valore iniziale V_1. Fatto ciò togliamo il granello di polvere. L'energia del granello è infinitamente piccola e perciò la sua presenza modificherà l'energia totale della radiazione contenuta

nell'involucro di una quantità infinitamente piccola. D'altra parte, la pressione di una radiazione isotropa dipende soltanto dalla densità integrale u dell'energia della radiazione e non dipende dalla sua composizione spettrale. Perciò il lavoro prodotto dalla pressione di radiazione durante la dilatazione sarà uguale, a meno di una quantità infinitesima, al lavoro esterno eseguito durante la compressione della radiazione. Ne segue che in conseguenza della compressione e dell'ulteriore dilatazione l'energia e con essa anche la temperatura della radiazione non cambiano.

Il sistema ha eseguito un ciclo di trasformazioni nel corso del quale esso non cede e non riceve alcun calore, ed il lavoro risultante è uguale a zero. Quindi, i corpi circostanti non hanno subìto alcun cambiamento, e perciò il ciclo è reversibile. Ma ciò è impossibile, poiché una delle tappe di questo ciclo è, per ipotesi, irreversibile. Per conseguenza, questa ipotesi è falsa ed il teorema di Wien è dimostrato.

2. Il teorema di Wien ha un grande valore metodologico. Infatti, facendo variare in modo adiabatico e quasi-statico il volume di una radiazione d'equilibrio contenuta in un involucro a pareti perfettamente riflettenti, si può produrre una radiazione d'equilibrio di densità qualsiasi e per conseguenza con una temperatura qualsiasi. Si può calcolare l'energia e la temperatura di questa radiazione, calcolando il lavoro applicato alla radiazione nel corso della trasformazione. La composizione spettrale della radiazione si ottiene calcolando la variazione della sua frequenza per effetto Doppler durante la riflessione della radiazione sulla parete mobile dell'involucro. Si stabilisce così una relazione ben determinata tra i parametri della radiazione d'equilibrio all'inizio della trasformazione e ad un istante qualsiasi di quest'ultima.

Applichiamo questo metodo alla radiazione d'equilibrio contenuta in un involucro sferico a pareti perfettamente riflettenti. Durante una compressione o una dilatazione adiabatica infinitamente lenta dell'involucro, la radiazione in esso contenuta sarà sempre d'equilibrio, di modo che questa radiazione può essere in qualsiasi istante caratterizzata da una temperatura T ben determinata. Consideriamo all'interno dell'involucro un raggio arbitrario che cada sulla parete con un angolo ϑ (fig. 342). Il tempo tra due riflessioni successive di questo raggio è uguale a $\Delta t = (2r/c) \cos \vartheta$. Nel corso di questo intervallo il raggio r dell'involucro riceve un incremento $\Delta r = \dot{r} \Delta t$. Ad ogni riflessione si produce una variazione di frequenza per effetto Doppler definita dalla formula

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{2\dot{r}\cos\vartheta}{c} = -\frac{2\Delta r\cos\vartheta}{c\,\Delta t} = -\frac{\Delta r}{r},$$

dove si trascura il quadrato della velocità radiale $\dot{r}$ della dilatazione dell'involucro, che è infinitamente piccola. La variazione relativa della frequenza $\Delta\omega/\omega$ dipende solo dalla variazione relativa $\Delta r/r$ del raggio dell'involucro. La stessa formula si ottiene anche nel caso in cui, durante il tempo di varia-

zione del raggio dell'involucro di Δr, avvengano numerose riflessioni successive del raggio luminoso, a condizione che $\Delta r \ll r$. Se la dilatazione è infinitamente lenta, le quantità Δr e $\Delta\omega$ si possono sostituire con i corrispondenti differenziali, cioè scrivere

$$\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dr}{r} = 0. \qquad (116.1)$$

Quest'equazione significa che il processo reale in cui le riflessioni successive si susseguono ad intervalli di tempo piccoli ma finiti è sostituito nei calcoli da un processo idealizzato in cui le riflessioni si susseguono *in modo*
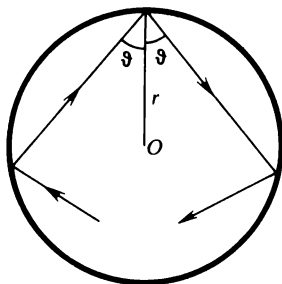
Fig. 342

continuo nel tempo. Integrando l'equazione (116.1), si ottiene

$$\omega r = \text{costante}. \qquad (116.2)$$

Visto che $r \sim V^{1/3}$, questo risultato si può anche scrivere nella forma

$$\omega^3 V = \text{costante}. \qquad (116.3)$$

In questa forma la (116.3) è valida per una cavità di forma arbitraria e siccome essa è stata ottenuta per una trasformazione infinitamente lenta, la quantità $\omega^3 V$ è l'*invariante adiabatico*. Combinandolo con gli invarianti adiabatici (115.1) e (115.3), si ottengono nuovi invarianti adiabatici. Per esempio, dalle formule (115.1) e (116.3) segue che

$$\frac{\omega^4}{u} = \text{costante}, \qquad (116.4)$$

o, in base alla legge di Stefan-Boltzmann,

$$\frac{\omega}{T} = \text{costante}. \qquad (116.5)$$

Analogamente, le formule (115.3) e (116.3) forniscono

$$\frac{u_\omega \, d\omega}{\omega^4} = \text{costante}. \qquad (116.6)$$

Questo significa che durante una compressione o una dilatazione quasi-statica di una radiazione d'equilibrio contenuta in una cavità a pareti perfettamente riflettenti, ogni componente quasi-monocromatica della radiazione si comporta *indipendentemente da tutte le altre componenti* e varia in modo che le quantità $\omega^3 V$, u/ω^4 ed $u_\omega d\omega/\omega^4$ restino costanti, cioè siano invarianti adiabatici. Secondo il teorema di Wien, nel corso di questa trasformazione la radiazione resta sempre d'equilibrio. Si potrebbe ottenere lo stesso stato di radiazione in una cavità indeformabile, riscaldando o raffreddando le sue pareti. Perciò i risultati ottenuti si possono considerare come *proprietà della radiazione d'equilibrio* che non dipendono dalla natura della trasformazione messa in opera. Enunciamo questi risultati come segue. *Facciamo variare la temperatura di una radiazione d'equilibrio da T a T' in modo che la radiazione sia sempre d'equilibrio. Facciamo corrispondere ad ogni frequenza ω della radiazione allo stato iniziale una frequenza ω' della radiazione allo stato finale, tale che $\omega/T = \omega'/T'$ e quindi $d\omega/T = d\omega'/T'$. Le densità dell'energia radiante in questi due stati sono allora legate dalle relazioni*

$$\frac{u}{\omega^4} = \frac{u'}{\omega'^4}, \qquad (116.7)$$

$$\frac{u_\omega d\omega}{\omega^4} = \frac{u'_{\omega'}\, d\omega'}{\omega'^4}. \qquad (116.8)$$

Questi risultati esprimono la *legge dello spostamento di Wien nella sua forma più generale.*

3. Dalla formula (116.8) si ottiene

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\omega^4}{\omega'^4}\frac{d\omega'}{d\omega} u'_{\omega'}(\omega', T') = \frac{T^3}{T'^3} u'_{\omega'}\left(\frac{T'}{T}\omega, T'\right).$$

Questa relazione è verificata per qualsiasi valore della temperatura T', e perciò la quantità che compare a secondo membro non dipende da T'. A T' si può attribuire un *valore qualsiasi,* rappresentando la relazione menzionata sopra come segue:

$$u_\omega(\omega, T) = T^3\varphi\left(\frac{\omega}{T}\right), \qquad (116.9)$$

dove $\varphi(\omega/T)$ è una *funzione universale* dell'argomento ω/T. Essendo $\omega/T = \omega'/T'$, lo stesso risultato si può scrivere nella forma

$$u_\omega(\omega, T) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right), \qquad (116.10)$$

dove $f(\omega/T) \equiv (T'/\omega')^3\varphi(\omega/T)$ è una nuova *funzione universale* dello stesso argomento ω/T. Così, la ricerca della funzione universale $u_\omega(\omega, T)$

a due argomenti è ridotta alla ricerca della funzione universale $\varphi(\omega/T)$ o $f(\omega/T)$ *a un solo argomento* ω/T. Ne segue che *se è conosciuta la ripartizione spettrale delle frequenze in una radiazione d'equilibrio ad una temperatura data* T', *le formule* (116.9) *e* (116.10) *permettono di calcolare questa ripartizione spettrale ad ogni altra temperatura* T.

Se vengono utilizzate le variabili λ e T, la relazione (112.2) consente di scrivere le formule (116.9) e (116.10) nella forma

$$u_\lambda = T^5 \varphi_1(\lambda T), \tag{116.11}$$

$$u_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} f_1(\lambda T), \tag{116.12}$$

dove $\varphi_1(\lambda T)$ e $f_1(\lambda T)$ sono nuove *funzioni universali.* A temperatura T costante, la grandezza u_λ è funzione della sola lunghezza d'onda λ. Questa funzione non può crescere monotonamente e deve presentare un massimo, altrimenti la densità integrale di energia

$$u = \int_0^\infty (u_\lambda)_{T=\text{costante}}\, d\lambda \tag{116.13}$$

non potrebbe restare finita. Indichiamo con λ_m la lunghezza d'onda corrispondente al massimo. Se introduciamo la notazione $x = \lambda T$, la posizione del massimo è definita dall'equazione

$$d\varphi_1/d\lambda = T\, d\varphi_1/dx = 0, \quad \text{cioè} \quad d\varphi_1/dx = 0.$$

Dunque, a tutte le temperature il massimo corrisponde ad uno stesso valore dell'argomento x. Ne segue che *se la temperatura aumenta, il massimo della funzione* $u_{\lambda,\, T=\text{costante}}$ *si sposta verso le onde più corte in modo che sia verificata la relazione*

$$\lambda_m T = b = \text{costante}. \tag{116.14}$$

Le misure forniscono: $b = 0{,}2898\ \text{cm}\cdot\text{K}$. Questo risultato, che caratterizza lo spostamento del massimo di radiazione quando la temperatura T varia, è una *forma particolare della legge di Wien.* Ai punti corrispondenti ai massimi le funzioni $u_\lambda(T)$ e $u_{\lambda'}(T')$ stanno tra loro come le temperature assolute T e T' elevate alla *quinta potenza.*

A temperatura T costante la funzione $u_\omega(\omega, T)$ è massima per una certa frequenza $\omega = \omega_m$. La frequenza ω_m non è uguale a $2\pi c/\lambda_m$, poiché si tratta dei massimi di due *funzioni diverse* $u_\omega(\omega)$ ed $u_\lambda(\lambda)$. Quando la temperatura della radiazione varia, la posizione del massimo si sposta, ma la relazione

$$\frac{\omega_m}{T} = \text{costante} \tag{116.15}$$

resta verificata. Quest'è ancora un'*altra forma della legge dello spostamento di Wien* (116.14).

4. La legge di Stefan-Boltzmann, dedotta sopra, è una conseguenza della formula generale (116.9). Infatti, introducendo la notazione $x = \omega/T$, a temperatura T costante, da questa formula si ottiene

$$u = \int_0^\infty u_\omega \, d\omega = T^3 \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = T^4 \int_0^\infty \varphi(x) dx = aT^4,$$

dove $a \equiv \int_0^\infty \varphi(x)\, dx$ è una costante universale.

§ 117. *Formula di Rayleigh-Jeans*

1. I risultati, che sono stati presentati nei paragrafi precedenti, esauriscono tutto quello che si poteva trarre dalla termodinamica fenomenologica per trattare il problema della radiazione termica. Ma la termodinamica non può risolvere il principale problema della teoria della radiazione termica: trovare la forma della funzione $u_\omega(\omega, T)$ o della funzione $I_\omega(\omega, T)$ che è legata alla precedente dalla relazione (112.6). Per farlo risultò necessario fare appello ai *metodi statistici* e tener conto delle *proprietà quantiche delle sostanze e delle radiazioni*. Il primo tentativo di risolvere questo problema è stato intrapreso nel 1887 da V.A. Michelson (1860-1927). Come ha mostrato lo sviluppo ulteriore della fisica, l'impresa era destinata al fallimento poiché in quei tempi era impossibile una soluzione vera di questo problema. Il merito di Michelson sta nel fatto di aver attirato l'attenzione dei fisici su quell'importante problema, la cui soluzione diede l'avvio alla *fisica quantistica*.

Il metodo generale di determinazione teorica della funzione $u_\omega(\omega, T)$, nel quadro della fisica classica e senza utilizzare alcun modello, fu suggerito nel 1900 da Rayleigh ed elaborato cinque anni più tardi da Jeans (1877-1946). Rayleigh e Jeans applicarono alla radiazione d'equilibrio, contenuta in una cavità, il teorema della meccanica statistica classica sull'*equipartizione dell'energia cinetica tra i gradi di libertà* del sistema. Secondo questo teorema, *allo stato d'equilibrio statistico ogni grado di libertà possiede in media un'energia cinetica uguale a $1/2kT$*, dove $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg/K è la costante di Boltzmann.

Se il grado di libertà è vibratorio, si deve ancora tener conto dell'*energia potenziale*. Nel caso di *vibrazioni armoniche* il valore medio dell'energia potenziale è anch'esso uguale a $1/2kT$ (cfr. il vol. II, § 63). Quindi, *in uno stato d'equilibrio statistico ad ogni grado di libertà vibrazionale corrisponde un'energia media uguale a kT.*

Questo teorema riduce il problema della determinazione della funzione $u_\omega(\omega, T)$ al calcolo del *numero di gradi di libertà esistenti nella cavità.* Visto che la radiazione d'equilibrio contenuta in una cavità non dipende dalla forma e dal materiale con il quale è fabbricata questa cavità, si può supporre che la cavità sia a forma di cubo a pareti perfettamente riflettenti. Perché la radiazione nella cavità sia d'equilibrio, si può introdurre all'interno della cavità un granello di polvere nero infinitamente piccolo, come abbiamo fatto nel paragrafo precedente, dimostrando il teorema di Wien.

2. Per meglio comprendere il metodo di determinazione del numero di gradi di libertà, consideriamo questo problema non per un campo elettromagnetico vettoriale, ma per un *campo d'onda scalare,* per esempio per le onde acustiche longitudinali. Questo problema presenta d'altra parte anche un proprio interesse, per esempio per la teoria della capacità termica dei solidi di Debye. Caratterizziamo il campo d'onda con una funzione $V(\mathbf{r}, t)$ che verifica l'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \tag{117.1}$$

Supponiamo che sulle pareti della cavità la funzione V s'annulli. Secondo il teorema di Fourier (che vale anche adottando altre condizioni al contorno) la funzione $V(\mathbf{r}, t)$ può essere rappresentata da una sovrapposizione di onde stazionarie. Gli assi coordinati X, Y, Z siano diretti parallelamente agli spigoli della cavità cubica. Visto che le condizioni al contorno debbono essere verificate sulle facce $x = 0, y = 0, z = 0$ e sulle facce loro parallele, ogni onda stazionaria deve essere rappresentata da una funzione *a variabili separabili,* cioè

$$V = X(x)Y(y)Z(z)\exp(i\omega t).$$

Ne segue che

$$\frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}, \ldots, \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione (117.1), si ottiene

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Il primo membro di quest'equazione è una somma di funzioni di x, y, z rispettivamente, cioè di funzioni di variabili diverse. La somma è uguale alla costante ω^2/c^2. Questo è possibile se e solo se ognuna di queste funzioni è costante, cioè

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = q_x^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = q_y^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = q_z^2,$$

dove q_x, q_y, q_z sono costanti che verificano la condizione

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = q^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2}. \qquad (117.2)$$

Scriviamo la prima soluzione nella forma $X = \sin(q_x x + \delta_x)$, dove δ_x è la costante d'integrazione. La seconda costante d'integrazione è l'ampiezza che può essere omessa senza perdere di generalità. Sulla faccia $x = 0$ della cavità cubica la funzione X deve annullarsi, cioè $\sin \delta_x = 0$. Senza perdere di generalità si può anche porre $\delta_x = 0$. Sulla faccia opposta $x = l$, dove l è la lunghezza dello spigolo della cavità cubica, la funzione X deve annullarsi e perciò $\sin k_x l = 0$. Risultati analoghi si ottengono anche per le coordinate y e z. Di conseguenza

$$V = \sin q_x x \sin q_y y \sin q_z z e^{i\omega t} \qquad (117.3)$$

dove

$$q_x l = m_x \pi, \qquad q_y l = m_y \pi, \qquad q_z l = m_z \pi, \qquad (117.4)$$

dove m_x, m_y, m_z sono numeri interi che si possono considerare positivi, poiché con l'introduzione dei numeri negativi non si ottengono nuove soluzioni linearmente indipendenti. Si potrebbe introdurre nell'espressione (117.3) un'ampiezza costante dipendente da m_x, m_y, m_z, ma ciò non è necessario per i nostri scopi. L'espressione (117.3) è la rappresentazione generale di un'*onda stazionaria* nella cavità. Ad ogni triade di interi positivi m_x, m_y, m_z che verificano le condizioni (117.4) corrisponde un'onda stazionaria. Il numero di onde stazionarie è infinitamente grande.

Consideriamo q_x, q_y, q_z come le coordinate ortogonali di un punto dello spazio tridimensionale dei vettori d'onda $\boldsymbol{q}$. Questi punti rappresentativi sono situati ai nodi di un reticolo cubico la cui cellula elementare è un cubo di spigolo $\Delta q_x = (\pi/l)\Delta m_x = \pi/l$ e di volume $(\pi/l)^3$. Il reticolo occupa solo l'ottante positivo dello spazio dei vettori d'onda, dato che tutte le coordinate q_x, q_y, q_z sono positive. Il volume della porzione di sfera di raggio q, contenuta in quest'ottante, è uguale a $1/8(4\pi/3)q^3 = (\pi/6)q^3$. Il numero di punti rappresentativi in questa porzione di sfera è uguale al numero Z di onde stazionarie i cui numeri d'onda non sono superiori a $q = 2\pi/\lambda$. La maggior parte di queste onde sono molto corte, ed i loro q sono molto grandi rispetto alla lunghezza π/l dello spigolo del cubo elementare. Ne segue che il numero di onde stazionarie contenute in quest'ottante di sfera si ottiene per divisione del suo volume per il volume della cellula elementare. In questo modo si ottiene la formula asintotica

$$Z = \frac{(\pi/6)q^3}{\pi^3/l^3} = \frac{V}{6\pi^2} q^3 = \frac{V}{6\pi^2} \frac{\omega^3}{c^3}, \qquad (117.5)$$

dove $V = l^3$ è il volume della cavità. Questa formula è verificata quando lo spigolo della cavità cubica è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda

$\lambda = 2\pi/q$. Si può dimostrare che la formula (117.5) è verificata anche per una cavità di forma arbitraria, benché in questo caso le onde stazionarie non saranno descritte da espressioni della forma (117.3).

Differenziando la (117.5), si ottiene

$$dZ = \frac{V}{2\pi^2} q^2 \, dq = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \, d\omega. \tag{117.6}$$

Questa formula asintotica dà il numero di onde stazionarie nell'intervallo di frequenza ω, $\omega + d\omega$. S'intende che essa è verificata solo per intervalli $d\omega$ sufficientemente larghi, quando $dZ \gg 1$.

3. I ragionamenti non varieranno in modo sostanziale quando si passa allo studio di un campo vettoriale (elettromagnetico). In questo caso il vettore $\boldsymbol{E}$ e le sue componenti E_x, E_y, E_z verificano la precedente equazione (117.1). Per una cavità a pareti perfettamente riflettenti, le condizioni al contorno impongono che le componenti tangenziali del vettore $\boldsymbol{E}$ siano nulle sulle pareti della cavità. Perché questa condizione sia soddisfatta, è necessario e sufficiente che siano verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} E_y &= E_z = 0 \quad \text{per} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = l, \\ E_z &= E_x = 0 \quad \text{per} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad y = l, \\ E_x &= E_y = 0 \quad \text{per} \quad z = 0 \quad \text{e} \quad z = l. \end{aligned}$$

L'onda stazionaria che soddisfa queste condizioni è della forma

$$\begin{aligned} E_x &= \sin (q_x x + \varphi_x) \sin q_y y \sin q_z z \, e^{i\omega t}, \\ E_y &= \sin q_x x \sin (q_y y + \varphi_y) \sin q_z z \, e^{i\omega t}, \\ E_z &= \sin q_x x \sin q_y y \sin (q_z z + \varphi_z) e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

dove q_x, q_y, q_z sono definite dalle formule (117.4). Quanto alle fasi φ_x, φ_y, φ_z, si possono calcolare per mezzo delle condizioni al contorno che debbono verificare le componenti normali del vettore elettrico $\boldsymbol{E}$ sulle pareti della cavità. Ma qui questo calcolo è inutile poiché per trovare Z e dZ è sufficiente conoscere soltanto i valori che possono assumere le componenti q_x, q_y, q_z. Rispetto al caso precedente le espressioni (117.5) e (117.6) debbono essere moltiplicate per due, essendo le onde elettromagnetiche *vettoriali* ed inoltre *trasversali*. Ad ogni direzione di propagazione corrispondono *due onde* polarizzate in piani reciprocamente perpendicolari; la loro sovrapposizione può produrre un'onda di polarizzazione qualsiasi che si propaga nella stessa direzione. Dunque, per un campo elettromagnetico

$$dZ = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \, d\omega. \tag{117.7}$$

Ogni onda che si trova in uno stato d'equilibrio statistico possiede in media un'energia $\bar{\mathscr{E}} = kT$: la metà di quest'energia è elettrica e l'altra me-

tà è magnetica. Scrivendo l'energia di radiazione d'equilibrio, contenuta nella cavità ed appartenente all'intervallo spettrale $d\omega$, nella forma $Vu_\omega d\omega$, si ottiene dalla (117.7)

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{\mathscr{E}} = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2. \tag{117.8}$$

Quest'è la *formula di Rayleigh-Jeans,* benché lo stesso risultato fosse stato ottenuto in modo indipendente e praticamente allo stesso tempo da Planck, che si basava su considerazioni diverse ma altrettanto generali (si veda il punto 6).

4. Prima di discutere la formula di Rayleigh-Jeans, osserviamo che, nel caso di una cavità riempita con un mezzo isotropo, il numero di onde stazionarie che si trovano in questo mezzo sarà dato dalle formule precedenti (117.5) e (117.6), a condizione di sostituire c con la velocità della luce v nel mezzo considerato (si suppone che il mezzo sia isotropo). Ne segue che i numeri Z e dZ in uno stesso intervallo di frequenza, e con essi anche la funzione u_ω, sono proporzionali a c^3/v^3, cioè al cubo dell'indice di rifrazione n del mezzo. Ma quest'è la *legge di Kirchhoff-Clausius* dimostrata nel § 114. La dimostrazione è valida per ipotesi più generali di quelle menzionate nel testo. Non è necessario riferirsi al teorema classico sull'equipartizione dell'energia tra i gradi di libertà, poiché è sufficiente che l'energia media dell'oscillatore armonico sia funzione solo della frequenza ω, come avviene in teoria quantistica.

5. La formula di Rayleigh-Jeans non soltanto concorda con la formula termodinamica generale di Wien (116.9) o (116.10), ma può essere direttamente dedotta dalla formula di Wien nel caso limite di frequenze basse. Osserviamo a questo proposito che nella formula (116.10) la funzione $f(\omega/T)$ deve crescere con la temperatura T ed annullarsi per $T = 0$. È preferibile considerarla come funzione dell'argomento T/ω e svilupparla in serie di potenze di quest'argomento. Se ci limitiamo al primo termine di questo sviluppo, si ottiene

$$u_\omega(\omega, T) = CT\omega^2. \tag{117.9}$$

Ma per la sua forma questo risultato coincide con la formula (117.8) e solo il coefficiente C resta indeterminato. Ma la formula (117.9) è basata su ipotesi più generali della formula (117.8). Dunque, nel caso limite di *frequenze basse* si può essere certi che la forma della (117.9) è corretta. Infatti, per onde sufficientemente lunghe (il criterio esatto è dato nel paragrafo seguente) la formula di Rayleigh-Jeans è in eccellente accordo con i risultati sperimentali e può essere utilizzata con successo nell'infrarosso e nella gamma delle onde radio.

Tuttavia la statistica classica impone che la formula di Rayleigh-Jeans (117.8) sia verificata *a tutte le frequenze.* Ma ciò è impossibile, poiché allo-

ra la densità integrale dell'energia sarebbe infinita:

$$u = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 \, d\omega = \infty .$$

Ne segue che *secondo la teoria di Rayleigh-Jeans l'equilibrio termico tra la materia e la radiazione è impossibile.* Ma questa conclusione contraddice l'esperienza e perciò P.S. Ehrenfest la chiamò *catastrofe ultravioletta.* La ragione della catastrofe ultravioletta consiste nel fatto che, nella teoria di Rayleigh-Jeans, la radiazione contenuta nella cavità possiede un numero *infinito* di gradi di libertà, mentre le sostanze ne posseggono solo un numero *finito.* Perciò, se fosse giusta la legge di equipartizione dell'energia tra i gradi di libertà, all'equilibrio termico tutta l'energia sarebbe concentrata nella radiazione.

6. Si potrebbe obiettare che la meccanica statistica classica, di cui il teorema di equipartizione dell'energia cinetica tra i gradi di libertà è una conseguenza, sia inapplicabile a sistemi che possiedono un numero infinito di gradi di libertà. Ma questa obiezione non è convincente. La meccanica statistica classica si basa sulle equazioni della meccanica classica nella forma che diede loro Hamilton (1805-1865). Benché queste equazioni siano state stabilite per sistemi meccanici con un numero finito di gradi di libertà, si può dimostrare che *la radiazione contenuta in una cavità può essere descritta da un numero infinito ma numerabile di coordinate generalizzate che verificano anch'esse le equazioni di Hamilton.* Ne segue che un sistema composto di materia e di radiazioni, può essere descritto dalle equazioni di Hamilton.

Ci si può domandare perché il teorema dell'equipartizione dell'energia sia verificato per certi gradi di libertà e non lo sia per altri.

Inoltre, la formula di Rayleigh-Jeans venne ottenuta indipendentemente anche da Planck, applicando questo teorema *solo alla materia.* Planck studiò un oscillatore armonico unidimensionale, per esempio un elettrone legato in modo quasi-elastico e messo in una cavità contenente una radiazione d'equilibrio. Sotto l'azione delle variazioni disordinate del campo elettromagnetico della radiazione, l'oscillatore esegue vibrazioni di ampiezza e fase variabili, emettendo ed assorbendo onde elettromagnetiche. In queste condizioni l'energia dell'oscillatore effettua fluttuazioni disordinate attorno al valore medio $\bar{\mathscr{E}}$. In conseguenza di calcoli semplici in linea di principio, ma molto laboriosi, Planck stabilì la formula

$$u_\omega = \frac{\bar{\mathscr{E}}}{\pi^2 c^3} \omega^2. \tag{117.10}$$

Se si applica all'oscillatore cioè alla materia il teorema dell'equipartizione dell'energia cinetica tra i gradi di libertà, dalla (117.10) si ottiene la formula di Rayleigh-Jeans.

§ 118. *Formula di Planck*

1. Una formula corretta della densità spettrale dell'energia di una radiazione d'equilibrio, confermata da tutti i risultati sperimentali, fu scoperta da Planck dapprima mediante un procedimento semiempirico. Poco tempo dopo Planck stabilì una dimostrazione teorica di questa formula che espose il 14 dicembre del 1900 alla seduta della Società di Fisica di Germania. Questa è considerata la data di nascita di una nuova fisica, la fisica *quantistica*. La nozione di quanto, che Planck formulò con molta precauzione, si sviluppò in seguito e costituì una teoria che conquistò tutta la fisica. Planck non sarebbe certo riuscito a risolvere il problema della radiazione d'equilibrio, se nei suoi studi non fosse stato a stretto contatto con sperimentatori. Tra i lavori sperimentali dedicati alle ricerche sulla radiazione di corpo nero si devono citare le ricerche di Langley (1834-1906), Rubens (1865-1922), Paschen (1865-1947), Wien, Lummer (1860-1925), E. Pringsheim (1859-1917), Kurlbaum.

2. L'ipotesi di Planck consiste nel pensare che la sostanza emetta e assorba luce non in modo continuo, ma per porzioni finite dette *quanti di luce* o *quanti d'energia*. Stabiliamo la formula di Planck mediante lo stesso metodo utilizzato per stabilire la formula di Rayleigh-Jeans. È allora comodo formulare l'ipotesi di Planck nel seguente modo: l'energia di un oscillatore armonico può assumere soltanto certi valori che formano una serie discreta: 0, $\mathcal{E}_0$, $2\mathcal{E}_0$, $3\mathcal{E}_0$, ..., dove $\mathcal{E}_0$ è una certa quantità elementare dipendente solo dalla frequenza propria ω dell'oscillatore. Qui per oscillatore s'intende non soltanto una particella che può eseguire vibrazioni armoniche libere, ma anche un'onda stazionaria di frequenza data contenuta in una cavità.

Se l'oscillatore è isolato, dopo un periodo di tempo sufficientemente lungo esso perderà in radiazione tutta la sua energia ed occuperà il più basso livello energetico d'energia $\mathcal{E} = 0$. Ma se l'oscillatore si trova in una cavità le cui pareti sono mantenute a temperatura costante, insieme con l'emissione di radiazione avranno luogo anche atti d'assorbimento, in conseguenza dei quali vengono eccitati livelli energetici superiori. Si stabilisce allora uno stato d'equilibrio dettagliato ben determinato in cui il numero di atti d'emissione è in media uguale al numero di atti d'assorbimento. In questo stato sono eccitati tutti i livelli energetici, ma con probabilità diverse. Per trovare la funzione $u_\omega(\omega, T)$ è sufficiente calcolare l'energia media $\overline{\mathcal{E}}$ dell'oscillatore in questo stato d'equilibrio statistico. Abbiamo già risolto questo problema (cfr. il vol. II, § 85). Riportiamo ancora una volta questa soluzione in una forma un po' modificata. Secondo il teorema di Boltzmann le probabilità d'eccitazione dei livelli energetici di un oscillatore sono proporzionali alle quantità

$$1, \quad e^{-\mathcal{E}_0/kT}, \quad e^{-2\mathcal{E}_0/kT}, \quad \ldots$$

Di conseguenza

$$\bar{\mathscr{E}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\mathscr{E}_0 e^{-n\mathscr{E}_0/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\mathscr{E}_0/kT}} = \mathscr{E}_0 \frac{\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}},$$

dove è stata introdotta la notazione $x = \mathscr{E}_0/kT$. Il denominatore ha come valore

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Il numeratore si trova per derivazione di questa formula rispetto a x

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2},$$

e quindi

$$\bar{\mathscr{E}} = \frac{\mathscr{E}_0}{e^x - 1} = \frac{\mathscr{E}_0}{e^{\mathscr{E}_0/kT} - 1}. \qquad (118.1)$$

Sostituendo questo valore nella formula (117.8), si ottiene

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\mathscr{E}_0}{e^{\mathscr{E}_0/kT} - 1}. \qquad (118.2)$$

Passiamo in questa formula al limite $\mathscr{E}_0 \to 0$. Si ha allora $e^{\mathscr{E}_0/kT} \approx 1 + \mathscr{E}_0/kT$ e quindi $\bar{\mathscr{E}} = kT$. Si ottiene l'espressione classica per l'energia media dell'oscillatore. Dunque, la formula (118.2) in questo caso limite si trasforma nella formula di Rayleigh-Jeans. Lo si poteva immaginare, poiché il passaggio al limite $\mathscr{E}_0 \to 0$ corrisponde infatti ad un ritorno alla meccanica classica nella quale l'energia dell'oscillatore varia in modo continuo e nòn per quanti. Planck si pose la domanda su cosa può succedere se non si passa al limite $\mathscr{E}_0 \to 0$ e ciò l'ha condotto ad una grande scoperta. Definiì la grandezza $\mathscr{E}_0$ con la condizione che l'espressione (118.2) verifichi la formula termodinamica generale di Wien (116.10). Uguagliando le (118.2) e (116.10), si vede che questa condizione si riduce alla verifica della relazione

$$\frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\mathscr{E}_0/\omega}{e^{\mathscr{E}_0/kT} - 1} = f\left(\frac{\omega}{T}\right). \qquad (118.3)$$

Poiché $\mathscr{E}_0$ è una caratteristica *solo dell'oscillatore,* non può dipendere dalla temperatura T, parametro macroscopico che determina lo stato della materia e della radiazione. L'energia $\mathscr{E}_0$ può dipendere *solo dalla frequenza propria* ω *dell'oscillatore.* In questo caso, perché il primo membro dell'uguaglianza (118.3) sia funzione del solo argomento ω/T, è necessario e sufficiente che

$$\mathscr{E}_0 = \hbar\omega, \tag{118.4}$$

dove $\hbar$ è una costante che è *universale* poiché nel secondo membro della (118.3) figura la funzione universale $f(\omega/T)$ di argomento ω/T. $\hbar$ è la *costante di Planck* il cui valore numerico è, secondo i dati moderni,

$$\hbar = (1{,}0545887 \pm 0{,}0000057)\cdot 10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s} = \\ = (1{,}0545887 \pm 0{,}0000057)\cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}. \tag{118.5}$$

Planck stesso utilizzava la costante

$$h \equiv 2\pi\hbar = (6{,}626176 \pm 0{,}000036)\cdot 10^{-27}\ \text{erg}\cdot\text{s} = \\ = (6{,}626176 \pm 0{,}000036)\cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}. \tag{118.5a}$$

Se sostituiamo ora l'espressione (118.4) nella (118.2), si ottiene la formula di Planck

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{118.6}$$

La formula di Planck è scritta generalmente in funzione delle variabili ν e T

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \tag{118.7}$$

o anche in funzione di λ, T

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \tag{118.8}$$

A basse frequenze quando

$$\hbar\omega/kT \ll 1, \tag{118.9}$$

la formula (118.6) diventa la formula di Rayleigh-Jeans (117.8). Nell'altro caso limite, cioè ad alte frequenze quando

$$\hbar\omega/kT \gg 1, \tag{118.10}$$

si ottiene la formula

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/kT}. \tag{118.11}$$

Wien stabilì una formula di questa forma nel 1896, basandosi su ipotesi arbitrarie.

Alle frequenze elevate (ultravioletto) la formula di Wien è in buon accordo con l'esperienza, ma alle basse frequenze (infrarosso) essa fornisce risultati assolutamente sbagliati: in questo caso è applicabile la formula di Rayleigh-Jeans. All'inizio Planck cercava di stabilire una formula empirica che, a basse frequenze, coincidesse con la formula di Rayleigh-Jeans e passasse in modo continuo alla formula di Wien a frequenze elevate.

Se introduciamo la variabile senza dimensione $x = \hbar\omega/kT$, la formula (118.6) può essere scritta nella forma

$$u_\omega = \frac{k^3T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^2} \frac{x^3}{e^x - 1}. \qquad (118.6a)$$

Introducendo invece un'altra variabile senza dimensione $x = \lambda kT/hc$ si ottiene

$$u_\lambda = \frac{8\pi k^5 T^5}{h^4 c^4} \frac{1/x^5}{e^{1/x} - 1}. \qquad (118.8a)$$

Le curve delle funzioni

$$y_\omega = \frac{x^3}{e^x - 1} \quad \text{e} \quad y_\lambda = \frac{1/x^5}{e^{1/x} - 1}$$

sono rappresentate nelle figure 343 e 344. Le linee tratteggiate rappresentano le stesse funzioni, definite dalle formule di Rayleigh-Jeans e di Wien.

3. Utilizzando la formula di Planck precisiamo i valori delle costanti che compaiono nelle leggi di Stefan-Boltzmann (115.4) e di Wien (116.14) e nella formula (116.15). È evidente che queste leggi debbono essere deducibili dalla formula di Planck, poiché quest'ultima è un caso particolare della formula termodinamica generale di Wien (116.9). Secondo la formula di Planck, la densità integrale d'energia della radiazione d'equilibrio nel vuoto è

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3\, d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}\, dx}{1 - e^{-x}}$$

(viene introdotta la variabile d'integrazione senza dimensione $x = \hbar\omega/kT$). Sviluppando in serie il denominatore $1 - e^{-x}$ ed integrando, si ottiene per l'ultimo integrale

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}(1 + e^{-x} + e^{-2x} + \ldots)dx = 6\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right) = \frac{\pi^4}{15},$$
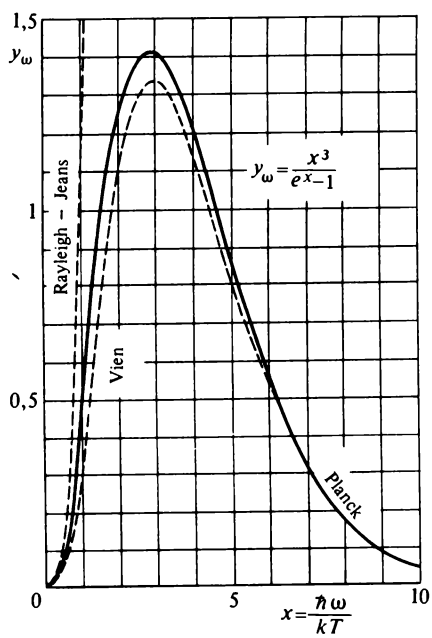
Fig. 343
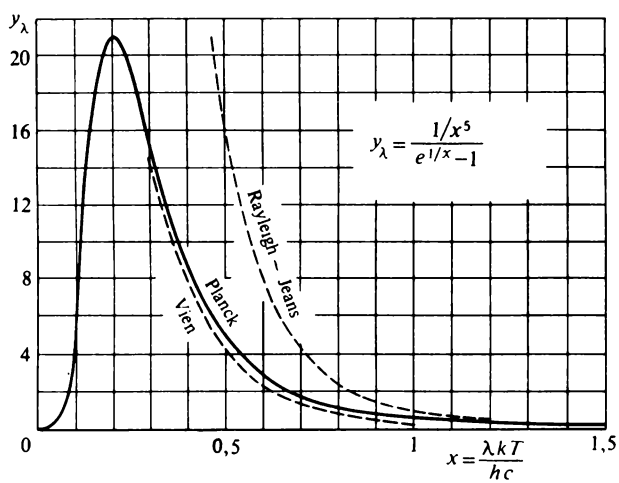
Fig. 344

poiché secondo una formula nota la somma dell'ultima serie tra parentesi è uguale a $\pi^4/90$. Si ottiene dunque

$$u = \frac{\pi^2 k^4}{15c^3\hbar^3}T^4 = \frac{8}{15}\frac{\pi^5 k^4}{c^3 h^3}T^4, \tag{118.12}$$

che esprime la legge di Stefan-Boltzmann (115.4) dove la costante a è espressa in termini delle costanti fondamentali c, h e k.

In pratica è preferibile utilizzare la formula della brillanza energetica S di una superficie assolutamente nera, che definisce il flusso integrale emesso verso l'esterno in tutte le direzioni (cioè in un angolo solido 2π) dall'unità di superficie nera per unità di tempo. La brillanza energetica è legata alla luminanza B della superficie radiante dalla relazione $S = \pi B = \pi I$ (cfr. il § 22) o ancora, in base alla formula (112.5), $S = cu/4$. (Questa formula è completamente analoga all'espressione del numero medio di molecole gassose che cadono per unità di tempo contro l'unità d'area della parete del recipiente contenente gas, cfr. il vol. II, § 75.) Sostituendo qui le espressioni (118.12), si ottiene

$$S = \sigma T^4, \tag{118.13}$$

dove

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2\hbar^3} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = (5{,}67032 \pm 0{,}00071)\cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}. \tag{118.14}$$

La quantità σ è detta *costante di Stefan-Boltzmann.*

4. Calcoliamo ora la costante b della legge dello spostamento di Wien (116.14). Per farlo si deve calcolare il valore $\lambda = \lambda_m$ per il quale la funzione (118.8) presenta un massimo a $T =$ costante. Introduciamo la variabile senza dimensione $\beta = hc/\lambda kT$ ed esprimiamo la formula (118.8) in termini di questa variabile. In questo caso, come è facile capire, il problema si riduce alla determinazione del minimo della funzione $(e^\beta - 1)/\beta^5$. Uguagliando a zero la derivata prima di questa funzione rispetto a β, si ottiene l'equazione

$$e^{-\beta} + \frac{\beta}{5} - 1 = 0, \tag{118.15}$$

la cui radice è $\beta = 4{,}9651142$. Ne segue che

$$b = \lambda_m T = hc/(k\beta) = (2{,}897790 \pm 0{,}000090)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\cdot K}. \tag{118.16}$$

Se sostituiamo λ con la frequenza ω, la legge di Wien si deve scrivere nella forma (116.15). La posizione del massimo è allora definita dall'equazione

$$(3 - \beta)e^\beta - 3 = 0, \tag{118.17}$$

dove $\beta = \hbar\omega/kT = hc/\lambda kT$, cioè β è lo stesso del caso precedente. La ra-

dice di quest'equazione è $\beta' = 2{,}8214393$. Se passiamo di nuovo alle lunghezze d'onda, il massimo di u_ω corrisponde alla lunghezza d'onda λ_m' definita dalla condizione

$$\lambda_m' T = hc/(k\beta'). \tag{118.18}$$

Quindi, il massimo della curva di frequenza è spostato verso le grandi lunghezze d'onda rispetto al massimo della curva delle lunghezze d'onda, di modo che $\lambda_m'/\lambda_m = \beta/\beta' \approx 1{,}76$.

Notiamo ancora che dopo aver misurato sperimentalmente le quantità c, σ e b, si possono calcolare, mediante le formule (118.14) e (118.16), le costanti universali k e h, il che è stato fatto per la prima volta da Planck. Fatto ciò, si può calcolare il numero d'Avogadro $N = R/k$ e la carica elementare $e = F/N$, dove R è la costante universale dei gas e F è il numero di Faraday. Quando Planck faceva questi calcoli, i valori di k, N, e erano conosciuti con una precisione insufficiente. Tuttavia Planck trovò per k, N, e ed h, valori poco differenti da quelli moderni.

5. La formula di Planck può anche essere stabilita assimilando la radiazione d'equilibrio contenuta in una cavità ad un *gas di fotoni* al quale è applicabile la *statistica di Bose-Einstein* (cfr. il vol. II, § 82). Questo gas presenta la seguente particolarità: per interazione con la materia fotoni possono essere creati o annichilati. Il loro numero N nella cavità non resta dunque costante. All'equilibrio il numero N è tale che, per T e V dati, l'energia libera $F(T, V, N)$ è minima e di conseguenza $\partial F/\partial N = 0$. Ma $\partial F/\partial N$ è il *potenziale chimico* μ del gas. Quindi per i fotoni dev'essere $\mu = 0$, e la formula generale di Bose-Einstein

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[(\mathscr{E}_i - \mu)/kT] - 1}, \tag{118.19}$$

che determina il numero medio di particelle in uno stato quantico i dato, si scrive per i fotoni

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{118.20}$$

Il numero di stati quantici contenuti nell'intervallo di frequenza $(\omega, \omega + d\omega)$ è dato dall'espressione (117.7). Moltiplicando $\bar{n}$ per questo numero e per l'energia del fotone $\hbar\omega$ e dividendo il risultato per il volume V della cavità, si ottiene la formula di Planck (118.6).

§ 119. *Radiazione spontanea ed indotta*

1. Nel 1916 Einstein diede una nuova dimostrazione della formula di Planck basata sulle concezioni di Bohr per quanto riguarda il meccanismo di emissione. In quest'opera fu introdotta la nozione d'*emissione indotta,* fenomeno su cui è basato il funzionamento dei laser.

Siano $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, ... i valori dell'energia che può possedere un atomo o più generalmente ogni sistema di atomi. L'atomo può passare spontaneamente da un livello energetico superiore $\mathscr{E}_n$ a quello inferiore $\mathscr{E}_m$, con una emissione di luce che si chiama *emissione spontanea*. Se l'atomo si trova in un campo luminoso, quest'ultimo può provocare transizioni da un livello energetico superiore $\mathscr{E}_n$ ad uno inferiore $\mathscr{E}_m$, oppure la transizione inversa dal livello $\mathscr{E}_m$ ad $\mathscr{E}_n$. Le transizioni $\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m$ sono accompagnate da emissione di luce; quest'emissione si dice *emissione indotta* o *stimolata*. Le transizioni inverse sono accompagnate da un assorbimento di luce dall'atomo.

Ci sono fenomeni analoghi anche in fisica classica. Se l'atomo viene assimilato ad un sistema oscillante, quest'ultimo effettuerà oscillazioni forzate nel campo dell'onda luminosa. Secondo il rapporto delle fasi delle vibrazioni di questo sistema e di quelle del campo luminoso, l'ampiezza delle vibrazioni dell'atomo può aumentare (assorbimento di luce) o diminuire (emissione stimolata).

Einstein applicò alla descrizione dei processi d'emissione spontanea e stimolata i *metodi probabilistici*. Per il problema della radiazione d'equilibrio poco importa che le probabilità riguardino l'insieme degli oggetti fisici o le leggi elementari che regolano il comportamento di questi oggetti.

Consideriamo una moltitudine di atomi identici sottoposti all'azione di un campo luminoso che è supposto isotropo e non polarizzato. In queste condizioni non ci dovremo preoccupare del problema della dipendenza dei coefficienti, che dovremo introdurre, dalla polarizzazione e dalla direzione della radiazione. Siano N_m e N_n i numeri di atomi che si trovano negli stati $\mathscr{E}_m$ ed $\mathscr{E}_n$, essendo questi ultimi stati qualsiasi presi dalla successione degli stati permessi $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, ... Il numero medio di transizioni dallo stato $\mathscr{E}_n$ nello stato $\mathscr{E}_m$ per unità di tempo, dovuto all'emissione spontanea, è proporzionale al numero iniziale N_n di atomi. Rappresentiamolo nella forma $A_n^m N_n$. Einstein postulò che, per emissione indotta, il numero medio di transizioni tra gli stessi livelli sarà come prima proporzionale a N_n ed anche alla densità spettrale $u\ (\omega_{mn})$ della radiazione, alla frequenza della radiazione emessa durante la transizione considerata. Indichiamo questo numero con $B_n^m N_n u\ (\omega_{mn})$. Analogamente, il numero medio di transizioni dal livello $\mathscr{E}_m$ al livello $\mathscr{E}_n$, dovuto all'assorbimento della luce, sarà rappresentato nella forma $B_m^n N_m u\ (\omega_{mn})$. Le quantità A_n^m, B_n^m, B_m^n sono dette *coefficienti di Einstein*. Esse sono caratteristiche dell'*atomo considerato* e dipendono soltanto dalla frequenza ω_{mn}.

2. Supponiamo ora che il campo di radiazione, in cui si trovano gli atomi, sia un campo d'equilibrio di temperatura T. Si ha allora un equilibrio dettagliato e quindi

$$A_n^m N_n + B_n^m N_n u(\omega_{mn}) = B_m^n N_m u(\omega_{mn}). \tag{119.1}$$

Se i livelli energetici $\mathscr{E}_m$ ed $\mathscr{E}_n$ sono *semplici* e non multipli, i coefficienti di

Einstein sono legati dalla relazione

$$B_m^n = B_n^m. \tag{119.2}$$

Infatti, eleviamo la temperatura del sistema. I coefficienti di Einstein in questo caso non variano poiché essi non dipendono dalla temperatura. La parte di radiazione dovuta all'emissione spontanea diminuisce e quella dell'emissione stimolata aumenta. Se trascuriamo l'emissione spontanea, la condizione d'equilibrio dettagliato assumerà la forma $B_n^m N_n = B_m^n N_m$. Ma secondo la formula di Boltzmann, quando $T \to \infty$ le popolazioni dei livelli N_n e N_m diventano uguali e quindi $B_m^n = B_n^m$.

Supponiamo ora che il livello $\mathscr{E}_m$ sia composto di g_m sottolivelli semplici sovrapposti ed il livello $\mathscr{E}_n$ sia composto di g_n sottolivelli semplici. Questi livelli sono detti multipletti ed i numeri interi g_m e g_n caratterizzano la loro *molteplicità*. La probabilità di transizione di un atomo dal livello $\mathscr{E}_m$ ad ogni sottolivello semplice $\mathscr{E}_n$ è minore di g_n volte della probabilità di transizione sul livello multiplo $\mathscr{E}_n$, cioè essa è uguale ad uB_m^n/g_n. Analogamente, la probabilità di transizione dal livello $\mathscr{E}_n$ ad uno dei sottolivelli $\mathscr{E}_m$ semplici è uB_n^m/g_m. Ma abbiamo già dimostrato che queste probabilità sono uguali. Perciò per livelli multipli la relazione (119.2) dev'essere sostituita con la relazione $B_m^n/g_n = B_n^m/g_m$ ossia

$$g_m B_m^n = g_n B_n^m. \tag{119.3}$$

Visto che la densità spettrale di radiazione $u(\omega)$ non dipende dagli atomi utilizzati, per semplificare il calcolo i livelli energetici $\mathscr{E}_n$, $\mathscr{E}_m$ si possono considerare semplici. Tenendo conto della formula di Boltzmann

$$\frac{N_m}{N_n} = \exp\left(\frac{\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m}{kT}\right)$$

otteniamo dalla (119.1)

$$u(\omega_{mn}) = \frac{\alpha(\omega_{mn})}{\exp[(\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m)/(kT)] - 1}, \tag{119.4}$$

dove $\alpha(\omega_{mn}) = A_n^m/B_n^m$. Il confronto di quest'espressione con la formula di Wien mostra che la differenza $\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m$ dev'essere una funzione lineare della frequenza, cioè

$$\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_m = \hbar\omega_{mn}. \tag{119.5}$$

Al limite delle basse frequenze (o delle temperature elevate)

$$u(\omega_{mn}) = \frac{\alpha(\omega_{mn})kT}{\hbar\omega_{mn}}.$$

Ma in questo caso è applicabile la formula di Rayleigh-Jeans e quindi

$$\alpha(\omega_{mn}) = \frac{\hbar\omega_{mn}^3}{\pi^2 c^3}. \tag{119.6}$$

Sostituiamo ora le espressioni (119.5) e (119.6) nella formula (119.4). Visto che nella nostra dimostrazione i livelli energetici $\mathcal{E}_m$ ed $\mathcal{E}_n$ si possono prendere ad arbitrario, si possono omettere gli indici m e n e si ottiene allora la formula di Planck (118.6).

Visto che la funzione (118.6) è universale, la costante $\hbar$ definita dalla relazione (119.5) è anch'essa universale. La formula (119.5) che determina la frequenza della luce emessa durante le transizioni tra i livelli energetici si dice *regola di selezione delle frequenze di Bohr.*

Notiamo anche che se non avessimo tenuto conto dell'emissione indotta, cioè se ponessimo $B_n^m u(\omega_{mn}) = 0$, al posto della formula di Planck si otterrebbe il suo caso limite — la formula di Wien (118.11). Ne segue che *la formula di Planck dimostra l'esistenza dell'emissione indotta di radiazioni.* A basse temperature l'emissione indotta non è evidentemente sostanziale rispetto all'emissione spontanea. Ecco perché nella regione di basse temperature quando $\hbar\omega/kT \gg 1$ è valida la formula di Wien.

Problemi

1. Calcolare il numero medio n di fotoni contenuti nell'unità di volume di una cavità occupata da una radiazione d'equilibrio (nera) alla temperatura T.

Risposta.

$$n = \frac{k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \frac{2k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) \approx 1{,}202\,\frac{2k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3} = 20{,}5\,T^3,$$

dove T è la temperatura in gradi Kelvin.

2. Una cavità a pareti perfettamente riflettenti contiene una radiazione isotropa la cui densità media di fotoni è uguale ad n per unità di volume. Calcolare il numero medio z di fotoni che in un secondo urtano l'unità di superficie della parete.

Risposta. $z = \dfrac{1}{4}nc.$

3. Risolvere il problema precedente supponendo che la radiazione sia d'equilibrio e che la temperatura delle pareti della cavità sia T. Calcolare il numero medio N di fotoni che escono per secondo dalla cavità attraverso un foro d'area $s = 1\ \text{cm}^2$, se la temperatura delle pareti è $T = 1000$ K.

Risposta. $n \approx 2{,}404\,\dfrac{k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^3}$, $\quad N = 0{,}6\,\dfrac{k^3T^3}{\hbar^3\pi^2c^2} \approx 1{,}5\cdot 10^{20}$.

4. In quale parte dello spettro di una radiazione d'equilibrio (di corpo nero) alla temperatura $T = 300$ K, l'intensità di radiazione indotta è superiore a quella spontanea?

Risposta. Se $\lambda \geqslant hc/(kT \ln 2)$, l'intensità della radiazione indotta diventa uguale o superiore a quella della radiazione spontanea. Per $T = 300$ K si ottiene $\lambda \geqslant 692\ \mu$m.

5. Quale dev'essere la temperatura di una radiazione d'equilibrio (nera) perché nello spettro visibile ($\lambda = 550$ nm) l'emissione indotta sia più grande di quella spontanea?

Risposta. $T > hc/(k\lambda \ln 2) \approx 3{,}8\cdot 10^4$ K.

6. Il numero medio di fotoni per unità di volume di una radiazione d'equilibrio (nera) corrispondente ad un intervallo di frequenza $(\omega, \omega + d\omega)$ o ad un intervallo di lunghezze d'onda $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ può essere rappresentato nella forma $dN = f(\omega, T)d\omega = \varphi(\lambda, T)d\lambda$, dove T è

la temperatura di radiazione. Determinare le posizioni dei massimi delle funzioni $f(\omega, T)$ e $\varphi(\lambda, T)$ per una temperatura T data.

Risposta. Il massimo della funzione $f(\omega, T)$ si ottiene per $\hbar\omega/(kT) = x$, dove x è la radice dell'equazione $(x - 2)e^x + 2 = 0$, cioè $x = 1{,}593624$. La corrispondente lunghezza d'onda λ_1 è data dalla relazione

$$\lambda_1 T = \frac{2\pi\hbar c}{kx} = \frac{hc}{kx} = 0{,}902867 \text{ cm}\cdot\text{K}.$$

Il massimo della funzione $\varphi(\lambda, T)$ si ottiene per $\lambda = \lambda_2$ con $\frac{hc}{\lambda kT} = \xi$, dove ξ è la radice dell'equazione $(\xi - 4)e^\xi + 4 = 0$, cioè $\xi = 3{,}920690$. Quindi, $\lambda_2 T = 0{,}368967$ cm·K. Per conseguenza $\lambda_2 < \lambda_1$.

7. Una radiazione d'equilibrio è contenuta in una cavità le cui pareti sono mantenute ad una temperatura costante T (temperatura assoluta). Calcolare le fluttuazioni dell'energia $\mathscr{E}$ di questa radiazione in un volume V ed in un intervallo spettrale $(\omega, \omega + d\omega)$ utilizzando le formule di 1) Wien, 2) Rayleigh-Jeans, 3) Planck ed interpretare i risultati ottenuti dal punto di vista delle concezioni corpuscolare ed ondulatoria della natura della luce.

Soluzione. Applicando alla (97.15) le formule di Wien, di Rayleigh-Jeans e di Planck, si ottiene

$$\overline{\Delta\mathscr{E}^2} = \bar{\mathscr{E}}\hbar\omega \quad \text{(Wien)}, \tag{119.7}$$

$$\overline{\Delta\mathscr{E}^2} = \bar{\mathscr{E}}kT = \frac{\pi^2 c^3}{V\omega^2\, d\omega}\bar{\mathscr{E}}^2 \quad \text{(Rayleigh-Jeans)}, \tag{119.8}$$

$$\overline{\Delta\mathscr{E}^2} = \bar{\mathscr{E}}\hbar\omega + \frac{\pi^2 c^3}{V\omega^2\, d\omega}\bar{\mathscr{E}}^2 \quad \text{(Planck)}. \tag{119.9}$$

La formula (119.7) è dello stesso tipo della formula (97.7) che esprime le fluttuazioni del numero di particelle di un gas perfetto. Questa formula si potrebbe ottenere da concezioni corpuscolari, assimilando la radiazione ad un gas di particelle indipendenti. Al contrario, la formula (119.8) corrisponde a concezioni ondulatorie. Qui le fluttuazioni sono dovute alla sovrapposizione di onde di frequenze diverse. La formula (119.9) corrisponde alla sintesi di entrambe le concezioni.

8. L'illuminamento E che produce una stella di prima grandezza sulla superficie terrestre sotto incidenza normale è all'incirca di 10^{-6} lux. Dire se si possono spiegare le scintillazioni delle stelle con le fluttuazioni quantiche della luce.

Soluzione. Il numero medio di fotoni che la stella invia per secondo nella pupilla dell'occhio è

$$\bar{N} = \frac{EAs}{h\lambda/c} \approx 6\cdot 10^{34} \sim 10^{34},$$

dove A è l'equivalente meccanico della luce; l'area s della pupilla dell'occhio è posta uguale a 0,5 cm^2, e la lunghezza d'onda $\lambda = 550$ nm. Nella regione di spettro considerata si può con buona approssimazione utilizzare la formula di Wien, il che conduce a

$$\overline{\Delta N^2} = \bar{N}, \quad \frac{1}{\bar{N}}\sqrt{\overline{\Delta N^2}} \sim 10^{-17}.$$

Questo risultato mostra che le fluttuazioni quantiche della luce non possono produrre scintillazioni delle stelle.

XI. LASER ED OTTICA NON LINEARE

§ 120. *Principi di funzionamento del laser*

1. L'emissione spontanea è incoerente, poiché in questo caso gli atomi della sorgente emettono radiazioni indipendentemente gli uni dagli altri. Le fasi delle onde emesse da atomi diversi, le loro polarizzazione e direzioni di propagazione sono indipendenti. Le sorgenti di luce ordinarie, le fiamme, le lampade a incandescenza, i tubi a scarica, i tubi luminescenti, ecc. emettono una luce incoerente. In tutti i casi citati l'emissione di luce è dovuta sia ad urti tra atomi animati da moti d'agitazione termica, sia all'impatto di elettroni. In queste sorgenti, oltre all'emissione spontanea, si produce anche un'emissione stimolata di radiazione, ma visto che quest'ultima è eccitata dalla radiazione spontanea che è incoerente, la radiazione stimolata è anch'essa incoerente. La luce emessa è più o meno disordinata. Lo stato più disordinato si ha nella radiazione d'equilibrio contenuta in una cavità. In questa radiazione d'equilibrio sono rappresentate tutte le fasi e le frequenze possibili, direzioni delle vibrazioni di ogni specie e tutte le direzioni di propagazione della luce possibili. Per analogia con l'acustica e la radiotecnica, si può dire che queste sorgenti non emettono onde regolari, ma rumori e possono essere utilizzate solo per l'illuminazione, per una segnalazione rudimentale, per la produzione di immagini e di fotografia, ecc. Queste onde disordinate non possono essere utilizzate né per la trasmissione delle parole, né per la televisione.

Si possono però realizzare sorgenti di luce che emettono radiazioni coerenti; in queste sorgenti gli atomi emettono onde nello stesso modo delle stazioni radiotrasmittenti, cioè onde aventi la stessa frequenza, la stessa polarizzazione e la stessa direzione di propagamento. L'invenzione di queste sorgenti di luce coerente ha permesso lo sviluppo di numerose applicazioni scientifiche e tecniche. Queste sorgenti sono dette *generatori quantici di luce* o *laser*. La parola « laser » è la sigla della denominazione inglese « Light amplification by stimulated emission of radiation » (« amplificazione di luce per emissione stimolata della radiazione »). La creazione dei laser è stata preceduta dall'invenzione dei *maser* che sono amplificatori di onde radio di lunghezza d'onda molto corta, basati sul princi-

pio dell'emissione stimolata. Perciò all'inizio i laser sono stati detti *maser ottici.* Uno studio dettagliato della concezione e del funzionamento dei laser e dei maser viene dato nei corsi di elettronica quantistica. Qui, nell'ottica, ci limiteremo solo ad una breve esposizione dei principi di funzionamento dei laser.

Il funzionamento dei laser è basato sul principio dell'*emissione stimolata* di una radiazione. Supponiamo che su un atomo cada un fotone d'energia $\hbar\omega = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$, dove $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$ sono due livelli energetici qualsiasi dell'atomo. Se l'atomo si trova sul livello inferiore $\mathscr{E}_1$, il fotone incidente può essere assorbito dall'atomo. Se, invece, l'atomo occupa il livello superiore $\mathscr{E}_2$, può avvenire una transizione stimolata sul livello inferiore $\mathscr{E}_1$ con emissione di un altro fotone; quest'ultimo fotone possiede *la stessa frequenza* ω (come in un'emissione spontanea), *la stessa fase, la stessa polarizzazione* e *la stessa direzione di propagazione* del fotone incidente. Al posto di un solo fotone incidente si ottengono *due fotoni identici.* È questa particolarità dell'emissione stimolata che viene utilizzata nei laser.

2. Consideriamo ora non un solo atomo, ma un *mezzo composto di atomi.* Indichiamo con N_1 e N_2 il numero di atomi per unità di volume che occupano i livelli $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$ rispettivamente. Supponiamo che nel mezzo si propaghi un'onda monocromatica piana la cui frequenza è definita da $\hbar\omega = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$. In un tempo $dt = dx/v$, dove v è la velocità di propagazione e dx la distanza percorsa dall'onda, un numero medio di atomi uguale ad $u(\omega)\, B_1^2 N_1\, dt$ passa dal livello energetico inferiore a quello superiore e lo stesso numero di fotoni è assorbito dagli atomi. L'emissione stimolata determina la transizione di $u(\omega)\, B_2^1 N_2\, dt$ atomi dal livello superiore a quello inferiore e l'emissione dello stesso numero di fotoni con la stessa polarizzazione e la stessa direzione di propagazione dell'onda considerata. I fotoni emessi spontaneamente, come i fotoni indotti da altre onde, si possono trascurare, poiché tra questi fotoni solo un numero insignificante si propaga nella direzione necessaria e possiede la polarizzazione richiesta. L'aumento del numero di fotoni nell'unità di volume che risulta dal percorso dell'onda di una distanza $dx = v\, dt$ è dato dall'espressione

$$dN_{\text{fot}} = (B_2^1 N_2 - B_1^2 N_1) u(\omega) \frac{dx}{v}.$$

I coefficienti di Einstein B_2^1 e B_1^2 sono legati tra loro dalla relazione $g_2 B_2^1 = g_1 B_1^2$, dove g_1 e g_2 sono le molteplicità dei livelli $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$. Utilizzando questa relazione, riscriviamo l'equazione precedente nella forma

$$dN_{\text{fot}} = \left(\frac{N_2}{g_2} - \frac{N_1}{g_1}\right) g_1 B_1^2 u(\omega) \frac{dx}{v}. \tag{120.1}$$

Perché l'onda possa amplificarsi durante la sua propagazione nel mezzo, è

necessario che sia verificata la condizione

$$\frac{N_2}{g_2} > \frac{N_1}{g_1}. \tag{120.2}$$

Questa condizione può anche essere scritta nella forma

$$n_2 > n_1, \tag{120.3}$$

dove $n_1 = N_1/g_1$ e $n_2 = N_2/g_2$ sono i numeri di atomi che occupano i livelli semplici che costituiscono i livelli composti $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$.

In condizioni ordinarie, quando il mezzo è *in uno stato d'equilibrio termodinamico, $n_2 < n_1$, cioè ogni livello semplice superiore è occupato da un numero di atomi più piccolo del numero di atomi che si trovano sul livello semplice inferiore.* Questo risultato segue direttamente dalla formula di Boltzmann

$$n = n_0 e^{-\mathscr{E}/kT}.$$

Si può artificialmente realizzare un *mezzo fuori equilibrio termodinamico* per il quale le disuguaglianze (120.3) e (120.2) siano rovesciate. Tale mezzo si dice *mezzo attivo* o *mezzo a popolazione inversa rispetto ai livelli energetici $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$*. Ne segue che *per amplificare un'onda luminosa è necessario che il mezzo dove si propaga quest'onda sia attivo.* L'idea dell'utilizzazione dell'emissione stimolata per amplificare le onde è stata per la prima volta formulata nel 1939 nella tesi di dottorato di V.A. Fabrikant (nato nel 1907) che ottenne nel 1951 un brevetto d'invenzione. Ma a quell'epoca non è stata prestata grande attenzione all'idea di Fabrikant. Sembrava che l'elaborazione di sistemi a popolazione inversa dei livelli energetici non presentasse alcun interesse.

3. L'amplificazione della luce in un mezzo attivo è di solito confrontata con una valanga nella quale i fotoni sono assimilati a palline. Un fotone-pallina incidente fa apparire un secondo fotone-pallina e questo è accompagnato dalla transizione dell'atomo da un livello energetico superiore a quello inferiore. Si ottengono due fotoni-palline che si muovono nella stessa direzione; questi due fotoni ne producono altri due che producono quattro fotoni-palline, ecc. Ma quest'analogia grossolana non può spiegare come l'insieme di tutti questi fotoni faccia apparire un'onda monocromatica che si propaga in una direzione ben determinata. Quest'aspetto del problema diventa più comprensibile se questi fenomeni sono confrontati con l'interpretazione classica della propagazione di un'onda monocromatica piana in un mezzo omogeneo. L'onda genera vibrazioni degli atomi e delle molecole del mezzo. Queste ultime riemettono onde specifiche, coerenti tra loro e con l'onda incidente. Le interferenze delle onde sferiche ricostituiscono il fronte d'onda piano che si propaga nel mezzo. Queste onde sferiche esercitano un'influenza soltanto sulla velocità di fase dell'onda. Se il mezzo è perfettamente trasparente, l'ampiezza dell'onda deve rimanere costante,

conformemente alla legge di conservazione dell'energia. Nei mezzi assorbenti una parte dell'energia dell'onda si trasforma in calore e l'ampiezza dell'onda decresce. Ma in un mezzo attivo gli atomi e le molecole si trovano in stati eccitati. A spese dell'energia d'eccitazione le onde secondarie emesse dagli atomi e dalle molecole risultano amplificate, ma le loro fasi ed il loro stato di polarizzazione restano gli stessi. Perciò restano uguali la fase e la polarizzazione dell'onda risultante dall'interferenza di queste onde secondarie. È amplificata soltanto l'ampiezza dell'onda.

4. La radiazione stimolata è stata utilizzata per *generare onde luminose coerenti.* Il principio di quest'effetto è stato suggerito nel 1957 da A.M. Prochorov (nato nel 1916) e N.G. Basov (nato nel 1922) ed indipendentemente da loro da Ch. Townes (nato nel 1915). Perché una sostanza attiva si possa trasformare in un generatore di vibrazioni luminose, è necessario realizzare un *accoppiamento di reazione.* È necessario che una parte
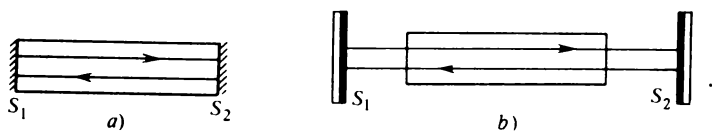
Fig. 345

della luce emessa si trovi sempre nella zona della sostanza attiva per provocare la radiazione stimolata di sempre nuovi atomi. A questo scopo la sostanza attiva viene messa tra due specchi paralleli. Supponiamo, per esempio, che questa sostanza abbia forma di cilindro, mentre i piani degli specchi S_1 e S_2 sono perpendicolari all'asse di questo cilindro (fig. 345). In questo caso un raggio di luce, che subisce numerose riflessioni dagli specchi S_1 e S_2, attraverserà molte volte la sostanza attiva, amplificandosi ad ogni passaggio a causa delle transizioni stimolate degli atomi da un livello energetico superiore $\mathscr{E}_2$ ad un livello inferiore $\mathscr{E}_1$. Si ottiene un *risonatore aperto,* che in sostanza si può assimilare ad un interferometro di Fabry-Pérot riempito di sostanza attiva.

Questo risonatore *non solo amplifica la luce,* ma *la collima* e *la monocromatizza.* Per semplificare, supponiamo che gli specchi S_1 e S_2 siano perfetti. In questo caso i raggi paralleli all'asse del cilindro, attraverseranno la sostanza attiva un numero infinito di volte. Invece, tutti i raggi che incidono in modo inclinato cadranno prima o poi sulla parete laterale del cilindro, dove saranno diffusi o usciranno. Ne segue che i raggi propagantisi parallelamente all'asse del cilindro vengono amplificati al massimo e proprio a ciò è dovuta la collimazione dei raggi. S'intende che non si possono produrre raggi rigorosamente paralleli: questo è impedito dalla diffrazione della luce. L'angolo di divergenza dei raggi non può in linea di principio es-

sere inferiore al *limite di diffrazione* $\delta\vartheta \approx \lambda/D$, dove D è la larghezza del fascio. Nei migliori laser a gas tale limite è praticamente ottenuto.

5. Esaminiamo ora come si realizza la *monocromatizzazione della luce.* Per semplificare, consideriamo il sistema illustrato in figura 345,*a,* dove gli specchi S_1 e S_2 sono le basi stesse, lisciate ed argentate, del cilindro retto di sostanza attiva, perpendicolari al suo asse geometrico. Sia L la lunghezza del cilindro. Se $2L = m\lambda$, cioè la lunghezza L è uguale ad un numero intero di semionde m, l'onda luminosa emessa da S_1, dopo un tragitto di andata e ritorno, raggiungerà S_1 con la stessa fase. In queste condizioni l'onda sarà amplificata ad ogni passaggio (a partire dal secondo) attraverso la sostanza attiva. La più vicina lunghezza d'onda $\lambda \pm \Delta\lambda$ per la quale si ottiene la stessa amplificazione, é data dalla condizione $2L = (m \pm 1)(\lambda \mp \Delta\lambda)$. Ne segue che $\Delta\lambda = \lambda/m$, cioè $\Delta\lambda$, come ci si doveva aspettare, coincide con la regione spettrale dell'interferometro di Fabry-Pérot.

Teniamo ora conto del fatto che i livelli energetici $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$ ed anche le righe spettrali corrispondenti alle transizioni tra questi livelli hanno una *larghezza finita.* Supponiamo dapprima che la larghezza della riga spettrale emessa dagli atomi, sia inferiore alla regione di dispersione dello strumento. In questo caso tra tutte le lunghezze d'onda emesse dagli atomi la condizione $2L = m\lambda$ può essere verificata da una sola lunghezza d'onda λ. Quest'onda è amplificata al massimo, e questo implica una diminuzione di larghezza delle righe spettrali generate dal laser, e quindi l'emissione di una radiazione monocromatica.

Il grado di monocromaticità è facile da calcolare. Supponiamo che la luce attraversi la sostanza attiva con percorsi di andata e ritorno N volte. Per la lunghezza d'onda λ abbiamo $2LN = Nm\lambda$. Prendiamo la più vicina lunghezza d'onda λ' che verifica la condizione $2LN = (Nm \pm 1)\lambda'$. Per questa lunghezza d'onda ogni treno di onde, che si è formato nell'attraversare la sostanza attiva avanti e indietro, avrà una fase differente dai treni d'onda precedente e successivo; questa differenza di fase è uguale a $\pm 2\pi/N$. In queste condizioni tutti gli N treni d'onda si distruggono reciprocamente e l'intensità luminosa sarà minima per λ'. Ne segue che la larghezza della riga spettrale amplificata dal laser è $\delta\lambda = |\lambda - \lambda'| \sim \lambda/(Nm)$, cioè essa dipende dal potere risolutivo dello strumento. Per $N \to \infty$ si ottiene $\delta\lambda \to 0$, cioè una riga spettrale infinitamente stretta. In realtà, a causa delle imperfezioni delle superfici riflettenti degli specchi, $\delta\lambda$ resta finita. Ma se le superfici riflettenti sono di buona qualità, il laser genera una riga spettrale molto fine, quindi una radiazione praticamente monocromatica. Supponiamo ora che le righe spettrali emesse dagli atomi di un mezzo attivo siano più larghe della regione dispersiva $\Delta\lambda$ dello strumento. In questo caso al posto dell'amplificazione di una riga spettrale può aver luogo un'amplificazione di parecchie righe. La luce emessa dal laser sarà composta di molte righe ravvicinate praticamente monocromatiche.

6. Nei ragionamenti citati non si è tenuto conto del fatto che nel risonatore di Fabry-Pérot si possono amplificare le onde che si propagano non solo parallelamente al suo asse, ma anche *sotto piccoli angoli* φ rispetto a quest'asse. La condizione d'amplificazione ha la forma $2L \cos \varphi = m\lambda$. Questo, come in qualsiasi cavità risonante, fa apparire un sistema di onde stazionarie con ventri e nodi. Ad ognuna di queste onde corrisponde un *modo di vibrazione determinato.* Questa circostanza influisce sulla ripartizione dell'intensità nella sezione trasversale del fascio dei raggi emessi dal laser. Qui si osserva un sistema di macchie chiare separate da linee nodali scure. Senz'altro, ciò complica il problema, ma non considereremo queste complicazioni. Osserviamo solo che insieme con gli specchi piani, nei risonatori si utilizzano anche gli *specchi sferici* a fuochi lunghi, per esempio specchi concavi i cui fuochi coincidono al centro del sistema. Come mostrano l'esperienza ed i calcoli, l'utilizzazione di questi specchi permette di ridurre notevolmente le perdite di luce e di rendere più semplice la regolazione dei laser.

7. Teniamo ora conto del fatto che in un laser reale una parte della luce, per poterla utilizzare, deve essere lasciata uscire dal mezzo verso l'esterno. A questo scopo uno degli specchi, per esempio S_2, è *semitrasparente.* Inoltre, anche lo specchio S_1 riflette la luce solo parzialmente, benché il suo coefficiente di riflessione sia vicino al 100%. Ciò implica l'indebolimento del fascio luminoso. Perché il laser sia un generatore di luce, è necessario che l'amplificazione del fascio luminoso nel mezzo attivo superi un certo valore minimo, detto *valore di soglia*; per questo deve essere verificata la seguente condizione. Un fascio luminoso emesso da S_1, dopo aver fatto un tragitto di andata e ritorno attraverso il mezzo attivo ed una riflessione su S_1, deve ritornare nella posizione iniziale con un'intensità almeno uguale a quella iniziale. Altrimenti, in conseguenza della ripetizione successiva di questi processi, l'intensità del fascio luminoso diminuirà continuamente ed il laser cesserà di generare luce. Ne segue che, affinché il laser generi luce, non è sufficiente che la condizione (120.3) sia esattamente verificata, essa dev'essere verificata con un certo margine, cioè il numero di atomi N_2 nel livello superiore, per unità di volume del mezzo attivo, deve superare un certo valore minimo.

È evidente che l'intenistà dell'onda non può crescere indefinitamente nel mezzo attivo, poiché la popolazione nel livello superiore è limitata. A misura che il livello superiore $\mathscr{E}_2$ si spopola, la velocità d'incremento dell'intensità luminosa diminuisce e l'onda comincerà a smorzarsi ancor prima che cessi d'essere verificata la condizione (120.3).

§ 121. *Laser a rubino*

1. Esistono molti materiali che possono essere utilizzati come mezzo attivo nei laser: cristalli dielettrici, vetri, gas, semiconduttori e persino il pla-

sma. La questione dei materiali è dettagliatamente studiata nell'elettronica quantistica. Ci limitiamo alla descrizione della costruzione e del principio di funzionamento solo di due laser: il laser *a rubino* ed il laser *a elio-neon.*

Il primo generatore quantistico è stato realizzato nel 1961 da Maiman (nato nel 1927) ed era un laser a rubino. Il rubino è un cristallo d'ossido d'alluminio (Al_2O_3) in cui una piccola parte d'alluminio (lo 0,05% circa) è stata sostituita da ioni Cr^{+++}. Gli ioni Cr^{+++} sono essenziali per l'effetto di generazione. Il corindone (cristallo di Al_2O_3) è una sostanza dielettrica a grande larghezza di banda interdetta (cfr. il vol. III, § 100). I livelli energetici degli ioni Cr^{+++}, incorporati nel corindone, sono situati in questa banda interdetta. Questi livelli sono stati studiati molto prima dell'invenzione dei laser. $\mathcal{E}_1$ è il livello fondamentale non eccitato (fig. 346). Esso
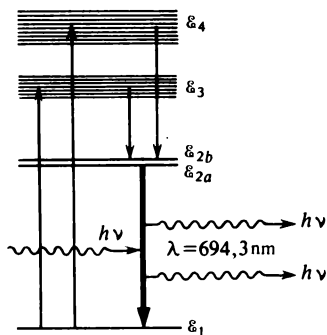
Fig. 346

possiede una struttura complicata che non gioca però alcun ruolo nel funzionamento del generatore quantistico. Al di sopra di $\mathcal{E}_1$ si trovano due livelli eccitati ravvicinati $\mathcal{E}_{2a}$ ed $\mathcal{E}_{2b}$. Questi sono livelli stretti e nella transizione da questi livelli al livello fondamentale $\mathcal{E}_1$ viene emessa una luce rossa di lunghezze d'onda $\lambda = 694,3$ e $692,9$ nm. Proprio queste transizioni conferiscono al rubino la sua colorazione rosa o rossa (a seconda del tenore in ioni di cromo). La riga $\lambda = 694,3$ nm è la più intensa e perciò solo questa riga è amplificata durante il funzionamento del laser. L'altra riga non gioca alcun ruolo. Al di sopra dei livelli $\mathcal{E}_{2a}$ ed $\mathcal{E}_{2b}$ si trovano due bande d'energia $\mathcal{E}_3$ ed $\mathcal{E}_4$ relativamente larghe. Le transizioni tra queste bande ed il livello fondamentale $\mathcal{E}_1$ sono accompagnate dall'emissione di luce verde e blu rispettivamente.

2. L'inversione di popolazione è creata tra i livelli $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ per mezzo del procedimento di *pompaggio ottico* che consiste nell'illuminare il cristallo di rubino con un potente lampo di luce. Il rubino è tagliato a forma di cilindro da 0,1 a 2 cm di diametro e da 2 a 20 cm di lunghezza. Le base del cilindro sono minuziosamente levigate e possono servire da specchi dopo ar-

gentatura (fig. 345,*a*). Si possono utilizzare anche specchi esterni (fig. 345,*b*) ed in questo caso le basi del cilindro non hanno più bisogno di essere argentate. Per illuminare il cristallo vengono utilizzate lampade a scarica allo xeno pulsanti (*lampade flash*) eccitate dalla scarica di una batteria di condensatori ad alta tensione (2-3 kV). La durata dell'impulso luminoso è dell'ordine di un millisecondo. Queste lampade hanno la forma di tubi a spirale arrotolati attorno all'asta di rubino (fig. 347). Sono utilizzate anche lampade flash rettilinee completate da riflettori a forma di cilindri ellittici a pareti interne riflettenti; la lampada flash è disposta lungo una delle linee focali del cilindro e la luce riflessa è concentrata sul rubino disposto lungo un'altra linea focale.

Se lo spettro energetico del rubino fosse composto di soli due livelli $\mathscr{E}_1$
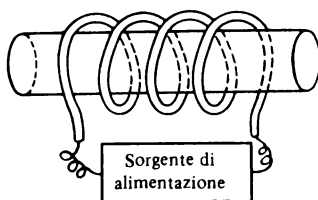
Fig. 347

ed $\mathscr{E}_2$, non sarebbe possibile creare l'inversione delle popolazioni per mezzo del pompaggio ottico. Infatti, come segue dalla (119.2), le velocità delle transizioni stimolate tra un livello inferiore ed un livello superiore sono uguali nei due sensi. Ne segue che l'accensione della lampada flash potrebbe solo rendere uguali le popolazioni dei due livelli, mentre l'esistenza dell'emissione spontanea avrebbe ridotto ben presto la popolazione del livello superiore.

La situazione cambia grazie alla presenza di un terzo livello energetico di grande larghezza composto dalle bande d'energia $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$ che permette di utilizzare il rubino come corpo di lavoro del laser. La lampada flash eccita gli atomi di cromo che vanno ad occupare i livelli $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$. La grande larghezza di queste bande ha una grande importanza pratica. La lampada flash produce una luce quasi bianca. Se i livelli $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$ fossero molto stretti, solo una parte insignificante dell'energia della lampada flash potrebbe essere utilizzata per la loro eccitazione. Ma visto che queste sono bande d'energia larghe, per l'eccitazione di questi livelli viene utilizzato il 10-15% dell'energia radiante della lampada flash. Gli atomi di cromo eccitati sui livelli $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$ hanno vita molto breve ($\sim 10^{-8}$ s) dopo di che decadono su uno dei livelli $\mathscr{E}_2$. Durante questa transizione gli atomi di cromo non irradiano e dissipano la loro energia per mettere in vibrazione il reticolo cristallino. L'eventualità di una transizione dai livelli $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$ al livello $\mathscr{E}_1$ è tra-

scurabile rispetto alla probabilità di transizione ai livelli $\mathscr{E}_2$. I livelli $\mathscr{E}_2$ sono metastabili e la durata di vita dell'atomo su questi livelli è dell'ordine di 10^{-3} s, che rappresenta una durata lunga su scala atomica. Ciò permette di accumulare un gran numero di atomi sui livelli $\mathscr{E}_2$. Se gli atomi sono eccitati in modo sufficientemente rapido dal livello $\mathscr{E}_1$ ai livelli $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$, si può far passare più della metà di questi atomi nei livelli $\mathscr{E}_2$, che avranno allora una popolazione superiore a quella del livello $\mathscr{E}_1$, il che corrisponde ad un'inversione delle popolazioni.

3. Calcoliamo la potenza che deve possedere la lampada flash per realizzare un'inversione delle popolazioni nei livelli $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$. La lunghezza d'onda media dell'onda emessa durante la transizione delle bande $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$ al livello $\mathscr{E}_1$ è di 450 nm circa. Ne segue che per far passare un atomo di cromo dal livello $\mathscr{E}_1$ ai livelli $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$, è necessaria un'energia media uguale a $h\nu = hc/\lambda \approx 4{,}4 \cdot 10^{-12}$ erg. I cristalli di rubino utilizzati nei laser contengono all'incirca 10^{19} atomi di cromo per cm^3. Si deve far passare non meno di metà di questo numero di atomi nelle bande $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$, il che esige un'energia $\sim 2{,}2 \cdot 10^7$ erg $= 2{,}2$ J. Questo numero di atomi deve essere trasferito sui livelli eccitati $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$ in un intervallo di tempo inferiore alla durata di vita degli atomi di cromo sul livello $\mathscr{E}_2$ ($\sim 2 \cdot 10^{-3}$ s). In caso contrario l'inversione di popolazione non si ottiene. Dunque, la potenza minima necessaria per l'eccitazione degli atomi dev'essere dell'ordine di $2{,}2/10^{-3} = 2200$ $W/cm^3 = 2{,}2$ kW/cm^3. Ponendo che il rendimento luminoso di un flash sia uguale al 10-15%, la sua potenza d'alimentazione dev'essere ~ 20 kW/cm^3. Per un cristallo di rubino di 10 cm^3 la potenza da fornire è ~ 200 kW. Questa potenza si può ottenere in modo relativamente facile. Sotto una tensione di 2000 V, la capacità della batteria dei condensatori dev'essere superiore a 100 μF. Generalmente la capacità è ~ 1000 μF.

Più della metà dell'energia radiante, assorbita dal cristallo di rubino, è dissipata in calore. Ma ad una temperatura superiore a 1000 K, il laser a rubino cessa di generare. Perciò in alcune costruzioni dei laser è previsto il raffreddamento del cristallo con acqua corrente e perfino con azoto liquido.

4. Il rubino è un *cristallo uniassico*. Gli indici ordinario e straordinario del rubino rosa utilizzato nei laser sono rispettivamente uguali a: $n_o = 1{,}7653$ e $n_e = 1{,}7573$ (per $\lambda = 656$ nm). Il laser a rubino può fornire una *luce polarizzata* senza alcun dispositivo polarizzatore. Per farlo, l'asse ottico del cristallo di rubino non deve coincidere con il suo asse geometrico. La polarizzazione lineare ottenuta non può essere dovuta alla differenza tra i coefficienti di riflessione dei raggi ordinario e straordinario, poiché la differenza $(n_o - n_e)$ è troppo piccola. La polarizzazione della luce è dovuta al fatto che nell'onda ordinaria le direzioni della normale d'onda e del raggio coincidono, e non coincidono in un'onda straordinaria. Perché gli specchi del laser si comportino efficacemente in qualità di risonatore, è ne-

cessario che le normali d'onda siano ad essi perpendicolari. Ma nel rubino solo il raggio ordinario si propaga parallelamente all'asse geometrico dell'asta, mentre quello straordinario è inclinato su quest'asse e cade sulla superficie laterale del rubino. Perciò il risonatore amplificherà in modo più efficace i raggi ordinari di quelli straordinari, e dal laser emergono soprattutto raggi ordinari il cui vettore elettrico è perpendicolare agli assi ottico e geometrico del cirstallo. Se questi assi coincidono, non si ha polarizzazione. Se invece, come segue dalle osservazioni, l'angolo tra essi è compreso tra 60 e 90°, la luce è tutta polarizzata linearmente.

5. Generalmente il laser a rubino viene usato in *regime d'impulso*. La lampada flash produce un impulso di luce di una durata $\sim 10^{-3}$ s. La durata dell'impulso coerente generato dal laser è un po' più corta. Questo è dovuto al fatto che è necessario un certo tempo perché la popolazione del livello $\mathcal{E}_2$ raggiunga il valore di soglia, dopo di che il laser comincia a generare. Inoltre, la generazione laser cessa quando l'intensità della lampada flash diminuisce e diventa insufficiente per poter mantenere una popolazione, nel livello $\mathcal{E}_2$, superiore al valore di soglia. L'impulso laser stesso ha una struttura complicata ed è composto di un gran numero di impulsi isolati di una durata di 10^{-6} s che si succedono ad intervalli di $\sim 3 \cdot 10^{-6}$-10^{-5} s. La potenza dell'impulso emesso da un laser a rubino può raggiungere decine di kW per un cristallo di rubino di diametro di 1,5 cm e di lunghezza di 20-30 cm.

Questa potenza può essere aumentata fino a parecchie decine di megawatt diminuendo la durata dell'impulso generato. A questo scopo sul livello $\mathcal{E}_2$ si deve portare non una metà, ma la maggior parte degli atomi di cromo, rendendo praticamente vuoto il livello $\mathcal{E}_1$. In questo caso, come segue dai calcoli, per una lunghezza del cristallo di 10-20 cm l'impulso di luce generata può formarsi in $\sim 10^{-8}$ s. La lampada flash potrebbe facilmente realizzare una tale transizione, se nel rubino non si producesse una generazione di luce che riporta gli atomi di cromo al livello iniziale $\mathcal{E}_1$. Bisogna tener conto che la generazione incomincia non appena si supera il valore di soglia della popolazione nel livello $\mathcal{E}_2$. Il problema può essere risolto se per un breve periodo di tempo si sopprime l'accoppiamento realizzato dagli specchi. In questo intervallo di tempo si possono far passare tutti gli atomi di cromo al livello eccitato $\mathcal{E}_2$. Se sono eliminati gli specchi, la durata di vita media degli atomi di cromo sul livello $\mathcal{E}_2$ è di 0,002 s circa. Se durante quest'intervallo di tempo si mettono momentaneamente in circuito gli specchi, si produce quasi istantaneamente una transizione stimolata degli atomi eccitati al livello non eccitato $\mathcal{E}_1$ accompagnata dall'emissione di un potente impulso di radiazione laser.

6. Per poter innestare e disinnestare rapidamente gli specchi o per modificare il fattore di qualità del risonatore, uno degli specchi è sostituito da un prisma P a riflessione totale ruotante con una velocità angolare ~ 500 giri/s (fig. 348). Il laser può generare soltanto quando il prisma oc-

cupa la posizione illustrata in figura 348 (o una posizione molto vicina). In tutte le altre posizioni l'accoppiamento a reazione è soppresso ed il laser non genera. Durante quest'intervallo di tempo si realizza il pompaggio ottico del cristallo di rubino R. Quando il prisma occuperà la posizione indicata in figura 348, viene emesso un potente impulso di radiazione laser. Benché il prisma continui a ruotare rapidamente, nel corso di un periodo di tempo corto ($\sim 10^{-8}$ s), necessario per la formazione dell'impulso laser, la sua posizione non cambia sensibilmente. Quando l'energia accumulata è stata dissipata, il prisma continua a ruotare, ricomincia il pompaggio del cristallo e quando il prisma avrà ruotato di 360°, sarà emesso un nuovo impulso. Ma quando il cristallo è attraversato da un impulso di luce potente,
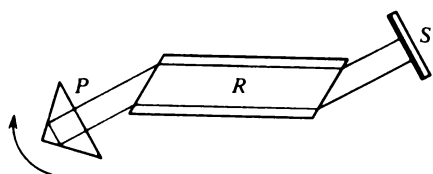
Fig. 348
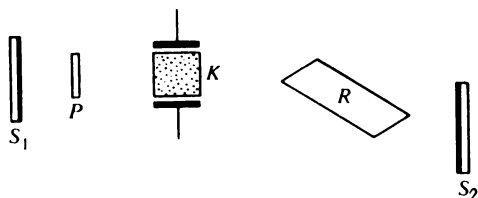
Fig. 349

il disinnesto del prisma non è sempre sufficiente per sopprimere l'azione dell'accoppiamento a reazione, che può essere mantenuto dalla riflessione della luce sulle basi del cilindro cristallino (per il rubino il coefficiente di riflessione $(n - 1)^2/(n + 1)^2 \approx 7{,}6\%$). Per eliminare quest'inconveniente le estremità del cilindro sono tagliate oblique; l'angolo d'incidenza è generalmente preso uguale all'*angolo limite di Brewster* (all'interfaccia rubino-aria $\varphi_B \approx 30°$). In queste condizioni la luce generata è polarizzata linearmente ed il suo vettore elettrico è situato nel piano d'incidenza.

7. Il più rapido innesto e disinnesto dell'accoppiamento a reazione è effettuato per mezzo di una valvola ottica: una *cella di Kerr* al nitrobenzene o una *cella di Pockels* a cristallo anisotropo (fig. 349). La cella insieme con il suo condensatore è ruotata di un angolo di 45° rispetto all'asse del dispositivo laser. Il polarizzatore P (polaroid o prisma polarizzatore) è orientato in modo da trasmettere integralmente la radiazione laser polarizzata linearmente. Prima dell'accensione della lampada flash, alla cellula K viene applicata una tensione sufficiente per poter ruotare il piano di polarizzazione della radiazione laser di 90°. In queste condizioni il polarizzatore P non trasmette alcuna luce e l'accoppiamento a reazione è soppresso. Accesa la lampada flash, il cristallo di rubino subisce un pompaggio ottico, e togliendo rapidamente la tensione applicata al condensatore, la radiazione polarizzata linearmente del laser comincerà a propagarsi liberamente tra gli specchi S_1 e S_2 e produrrà un potente impulso di radiazione stimolata di una durata dell'ordine di 10^{-8} s.

8. Le celle di Kerr e di Pockels sono spesso sostituite da *filtri saturabili* (il polarizzatore *P* diventa in questo caso superfluo). Il principio di funzionamento di questi filtri consiste nel fatto che la loro trasparenza aumenta quando l'intensità della luce raggiunge valori molto grandi, caratteristici per la radiazione laser (cfr. il § 89, punto 6). Quando l'intensità è piccola, il filtro assorbe quasi completamente la luce incidente ed elimina in larga misura l'accoppiamento a reazione. Non appena la popolazione del livello superiore aumenta, il rubino incomincia a generare, l'assorbimento del filtro diminuisce, l'accoppiamento a reazione aumenta e provoca una valanga di radiazione laser. A misura che l'intensità di radiazione generata aumenta, il filtro diventa sempre più trasparente. Quando l'intensità di radiazione comincia a diminuire, la trasparenza del filtro diminuisce rapidamente e l'accoppiamento a reazione diventa sempre più debole. Visto che tutto il sistema funziona in modo automatico, il laser a filtri saturabili può generare una successione di impulsi di luce.

9. L'innesto rapido dell'accoppiamento a reazione permette di ridurre la durata degli impulsi di luce fino a 10^{-7}-10^{-8} s. Visto che l'energia dell'impulso fornita da un cristallo di rubino, lungo 20 cm e di diametro 1,5 cm, è uguale a 1-2 J, la potenza sviluppata è da 10 a 200 MW. Un incremento ulteriore della potenza degli impulsi laser può essere assicurata per amplificazione della luce per mezzo di una batteria di parecchi laser disposti gli uni dopo gli altri. Il primo laser funziona come *generatore* e tutti gli altri da *amplificatori di luce.* Se la potenza dell'impulso generato è sufficientemente grande, una piccola frazione di quest'impulso in prossimità del fronte d'onda è sufficiente per provocare transizioni stimolate al livello inferiore di tutti gli atomi di cromo eccitati nei cristalli degli amplificatori. Giò diminuisce la durata dell'impulso ed aumenta la sua potenza. In questo modo si è riusciti a produrre *impulsi giganti* di durata $2 \cdot 10^{-9}$ s con un'energia totale dell'impulso uguale a ~ 20 J il che corrisponde ad una potenza di $\sim 10^4$ MW. Si possono produrre impulsi di potenza ancor più grandè. Un laser a filtro saturabile produce un impulso di durata $\sim 10^{-8}$ s, composto da una successione di impulsi di durata compresa tra 10^{-11} e 10^{-12} s. Isolando uno di questi impulsi ed amplificandolo, si arriva ad una potenza di $\sim 10^7$ MW.

10. Tra gli altri materiali utilizzati nei laser si deve citare prima di tutto il *vetro al neodimio* ed il *fluoruro di calcio* (CaF_2) drogati con atomi di un metallo delle terre rare *disprosio* (Dy), *samario* (Sm), ecc. Il mezzo è reso attivo grazie alla presenza di ioni Nd^{+++}, Dy^{++}, Sm^{++}, ecc. Il vetro al neodimio genera una radiazione infrarossa di lunghezza d'onda $\lambda = 1{,}06$ μm ed il fluoruro di calcio drogato con disprosio, una radiazione di lunghezza d'onda $\lambda = 2{,}36$ μm. È più facile costruire cristalli di vetro al neodimio che quelli di rubino. Le aste in vetro al neodimio possono avere una lunghezza da 0,5 a 1 m con un diametro uguale a 5 cm. La larghezza delle bande di livello del vetro al neodimio è più grande di quella del rubi-

no, il che permette di ottenere un rendimento più grande. Ma il rubino possiede una maggior resistenza meccanica. Per impulsi di durata da 10^{-8} a 10^{-9} s il rubino sopporta potenze di $(3\text{-}4)\cdot 10^3$ MW per cm^2 di sezione trasversale, mentre per il vetro al neodimio la potenza ammissibile è $(1\text{-}1{,}5)\cdot 10^3$ MW.

A differenza del laser a rubino, il cui funzionamento fa intervenire *tre livelli energetici,* il laser a fluoruro di calcio, con piccole impurità di disprosio, fa intervenire *quattro livelli energetici.* Ciò permette di fabbricare laser sufficientemente potenti funzionanti *in continuo,* il che è necessario per certe applicazioni. Tra il livello fondamentale $\mathscr{E}_1$ del disprosio e la banda energetica $\mathscr{E}_2$ si trovano due livelli intermedi $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$ (fig. 350), tra i quali viene realizzata l'inversione di popolazione di atomi di disprosio. La lampada flash fa passare gli atomi di disprosio, attraverso la banda energetica
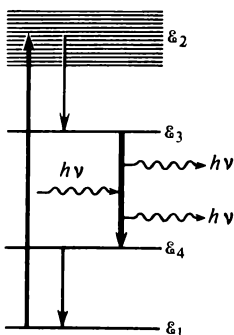
Fig. 350

larga $\mathscr{E}_2$, sul livello $\mathscr{E}_3$. Il livello $\mathscr{E}_4$ nella scala delle energie è situato tanto alto al di sopra del livello $\mathscr{E}_1$ che, alla temperatura dell'azoto liquido, la sua popolazione N_4 è praticamente nulla. Perciò non è necessario far passare sul livello $\mathscr{E}_3$ più della metà degli atomi di disprosio; è sufficiente che la differenza delle popolazioni $N_3 - N_4$ dei livelli $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_4$ sia superiore al valore di soglia. Quest'ultimo è uguale ad una piccola parte del numero totale di atomi di disprosio. È sufficiente una potenza di pompaggio moderata ($\approx$ 15-20 W) per assicurare un funzionamento continuo del laser. Inoltre, il pompaggio ottico continuo permette di generare impulsi giganti che si succedono ad una cadenza elevata (fino a parecchi kHz). La potenza di luce di ogni impulso è di $\approx$ 1-2 MW.

Problemi

1. La potenza in un impulso di un laser a rubino è W = 100 MW. L'area della sezione retta del cristallo di rubino è S = 1 cm^2. Stimare l'intensità E del campo elettrico e la pressione di radiazione nel fascio laser ammettendo che sia rigorosamente piano-parallelo

(λ = 694,3 nm). Calcolare la variazione di queste grandezze risultanti della focalizzazione del fascio mediante una lente perfetta di distanza focale f = 5 cm.

Soluzione. L'intensità E_0 del campo elettrico nel fascio iniziale è data dalla formula

$$W = \frac{c}{4\pi}\overline{EHS} = \frac{c}{4\pi}\overline{E^2}S,$$

e la pressione $\mathscr{P}_0$ di radiazione è $\mathscr{P}_0 = W/(cS)$. Si trova così

$$E_0 \approx \sqrt{\overline{E^2}} = \sqrt{\frac{4\pi W}{cS}} = 647 \text{ un. CGSE} = 1{,}94\cdot 10^5 \text{ V/cm},$$

$$\mathscr{P}_0 \approx 3{,}3\cdot 10^4 \text{ dine/cm}^2 \approx 0{,}033 \text{ atm}.$$

Per calcolare le corrispondenti grandezze nel fuoco della lente si possono utilizzare le stesse formule avendo calcolato prima la larghezza del fascio di luce. Ammetteremo che tutta la luce sia concentrata nella macchia centrale brillante di raggio $R = 0{,}61f\lambda/r$ e d'area

$$\pi R^2 = \pi(0{,}61\, f\lambda/r)^2 = (0{,}61\pi f\lambda)^2/S,$$

dove r è il raggio della sezione retta del fascio incidente. È quest'area che si deve sostituire nelle formule precedenti al posto di S. Si ottiene dunque

$$E \approx \sqrt{\overline{E^2}} \approx \frac{S}{0{,}61\pi f\lambda}E_0 = 1{,}5\cdot 10^3 E_0 = 2{,}9\cdot 10^8 \text{ V/cm},$$

$$\mathscr{P} = \left(\frac{S}{0{,}61\pi f\lambda}\right)^2 \mathscr{P}_0 = 2{,}25\cdot 10^6 \mathscr{P}_0 \approx 7{,}4\cdot 10^4 \text{ atm}.$$

La pressione calcolata è quella che si otterrebbe se il fascio di radiazione laser fosse focalizzato nel vuoto. Se, invece, questo fascio cade su una sostanza qualunque, a causa della grande concentrazione d'energia vicino al fuoco, la sostanza si vaporizza istantaneamente e passa allo stato di plasma. A ciò è dovuto un ulteriore aumento della pressione della luce.

2. Si dice temperatura efficace T_{eff} della radiazione laser la temperatura del corpo nero alla quale quest'ultimo emette una radiazione della stessa luminanza I_ν e della stessa frequenza ν di quella del laser. Stimare la temperatura efficace di un laser a elio-neon che genera in continuo una luce di lunghezza d'onda λ = 632,8 nm ($\nu \approx 5\cdot 10^{14}$ Hz). La larghezza della riga spettrale della luce generata è $\delta\nu \approx 10^4$ Hz, la divergenza del fascio di luce è $\delta\vartheta \approx 1' \approx 3\cdot 10^{-4}$ rad, la potenza di radiazione è W = 10 mW.

Soluzione. La luminanza della radiazione laser $I_\nu = W/(\delta\nu\cdot\delta\Omega)$, dove $\delta\Omega = (\delta\vartheta)^2 \approx 10^{-7}$ sr è l'angolo solido corrispondente alla divergenza del fascio. Secondo la formula di Rayleigh-Jeans

$$I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2}T_{eff}.$$

Identificandola con la formula precedente, si ottiene

$$T_{eff} \approx \frac{c^2 W}{2k\nu^2\delta\nu\cdot\delta\Omega} \approx 10^{15} \text{ K},$$

cioè una temperatura di 10^{11} volte superiore alla temperatura del Sole.

§ 122. *Laser a elio-neon*

1. Lo spettro energetico di un gas, almeno alle pressioni che esistono nei tubi luminescenti e nei laser a gas, coincide quasi perfettamente con quello degli *atomi* e delle *molecole isolati* che lo costituiscono. Perciò le righe spettrali dei gas sono *più strette* delle righe delle impurità contenute nei corpi solidi. I gas possiedono una *maggiore omogeneità ottica ed una densità minore,* e perciò diffondono e deformano poco le onde che vi si propagano. Tutto ciò permette di utilizzare nei laser a gas distanze più grandi tra gli specchi e di ottenere una *grande direttività,* un *grande grado di monocromaticità* ed una *frequenza d'emissione stabile.* Per esempio, in un laser a elio-neon la divergenza del fascio dei raggi realmente ottenuta è generalmente di 1-2′ e nei casi migliori raggiunge il limite teorico $\delta\vartheta \sim \lambda/D \sim 20''$. La larghezza relativa della riga spettrale della radiazione di questo tipo di laser è $\delta\omega/\omega \sim 10^{-11}$-$10^{-12}$, e la frequenza stessa ω nelle condizioni di massima efficacia è mantenuta con una precisione relativa nei limiti di $\sim 10^{-14}$ (generalmente $\sim 10^{-10}$).
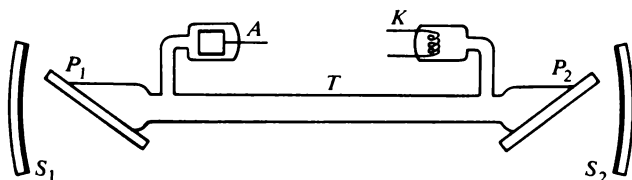
Fig. 351

Ma se la densità dei gas è piccola, in essi non si può ottenere una grande concentrazione di atomi eccitati e per conseguenza le potenze in impulso non possono essere grandi quanto lo sono nei corpi solidi. Per esempio, la potenza d'uscita in continua di un laser a elio-neon è di solito da dieci a parecchi centinaia di milliwatt. Ma, visto che la radiazione è altamente monocromatica e direzionale, questa potenza è enorme rispetto a quella delle sorgenti di luce termiche. Essa corrisponde ad una temperatura efficace di radiazione che è superiore alla temperatura del Sole all'incirca di 10^{11}-10^{12} volte (si veda il problema 2 del § 121). Osserviamo però che il laser a CO_2 può emettere in continua una radiazione infrarossa di potenza fino a 10 kW ed il laser ad argon ionico emette una radiazione visibile di potenza fino a ~ 1 kW. In regime d'impulso la potenza di questi laser può raggiungere alcune centinaia di kilowatt.

2. Il primo laser a gas fu il *laser a elio-neon* elaborato nel 1960 da Javan (nato nel 1926), Bennett (nato nel 1903) e Herriott. Lo schema di principio della versione moderna di questo laser è rappresentato in figura 351. Il laser è composto di un tubo a scarica T di 7-10 mm di diametro interno e di lunghezza compresa tra alcune decine di centimetri e 1,5-2 metri. Il tubo è

riempito di una miscela d'elio (pressione ~ 1 mm Hg) e di neon (pressione ~ 0,1 mm Hg). Le estremità del tubo sono chiuse da lamine a facce parallele P_1 e P_2 in vetro o in quarzo, poste sull'asse sotto l'angolo di Brewster. Ciò contribuisce alla polarizzazione lineare della radiazione laser con il vettore elettrico parallelo al piano d'incidenza. Gli specchi S_1 e S_2, tra i quali è posto il tubo, sono generalmente di forma sferica a rivestimenti dielettrici a molti strati, a grande coefficiente di riflessione, e sono praticamente non assorbenti. La trasparenza dello specchio attraverso il quale esce la maggior parte della radiazione laser è di solito del 2%, e quella dell'altro specchio è inferiore all'1%. Tra gli elettrodi del tubo è applicata una tensione costante da 1 a 2 kV. Il catodo K del tubo può essere freddo, ma per aumentare la corrente di scarica sono anche utilizzati tubi ad anodo cilindrico vuoto il cui catodo è riscaldato da una sorgente di corrente a bassa tensione. L'intensità della corrente di scarica nel tubo è uguale ad alcune decine di milliampere. Il primo modello di laser a elio-neon costruito da Maiman utilizzava un tubo senza elettrodi in cui le scariche erano create da induzione ad alta frequenza. Il laser a elio-neon può funzionare in regime continuo ed in regime d'impulso e genera una radiazione rossa di lunghezza d'onda
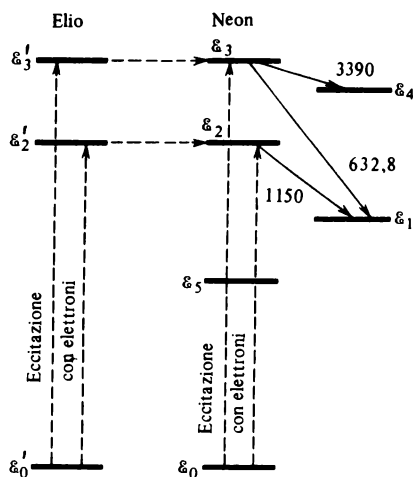
Fig. 352

632,8 nm. Esso può anche generare una radiazione infrarossa di lunghezze d'onda 1,150 e 3,390 μm, ma in questo caso le finestre alle estremità del tubo debbono essere trasparenti per l'infrarosso, e gli specchi debbono avere grandi coefficienti di riflessione nell'infrarosso.

3. Consideriamo ora come si realizza l'inversione di popolazione degli atomi di neon. Uno schema semplificato dei livelli del neon è rappresentato in figura 352. Al di sopra del livello $\mathscr{E}_4$ si trovano ancora 28 livelli di energia

inferiore a $\mathscr{E}_3$, ma visto che essi non intervengono nei processi che ci interessano, questi livelli non sono rappresentati in figura. L'eccitazione degli atomi di neon è dovuta *alle loro collisioni con gli elettroni del plasma a scarica gassosa.* Per un certo regime di scarica questo processo provoca un'inversione di popolazione dei livelli $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_2$. Ma le popolazioni dei livelli $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_3$, così come per i livelli $\mathscr{E}_4$ ed $\mathscr{E}_3$ non sono invertite. L'inversione di popolazione è ostacolata dal livello metastabile $\mathscr{E}_5$ di lunga durata di vita, che si trova un po' al di sotto del livello $\mathscr{E}_1$ di corta durata. La popolazione del livello $\mathscr{E}_5$ è grande, il che contribuisce al rifornimento del livello $\mathscr{E}_1$, che è rapidamente svuotato, e quindi non si produce l'inversione di popolazione tra i livelli $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_3$.

L'addizione d'elio modifica totalmente la situazione. Di tutti i livelli energetici dell'elio, oltre a quello normale $\mathscr{E}_0'$, per il funzionamento del laser sono importanti i livelli metastabili $\mathscr{E}_2'$ ed $\mathscr{E}_3'$ di energie uguali rispettivamente a 19,82 e 20,61 eV. La transizione spontanea con emissione di radiazione da questi livelli al livello fondamentale $\mathscr{E}_0'$ è interdetta, il che significa che la probabilità di queste transizioni è molto piccola. Perciò la durata di vita degli atomi sui livelli $\mathscr{E}_2'$ ed $\mathscr{E}_3'$ è molto grande. Sotto l'azione degli urti elettronici, su questi livelli metastabili s'accumulano moltissimi atomi d'elio. Ma visto che i livelli $\mathscr{E}_2'$ ed $\mathscr{E}_3'$ dell'elio quasi coincidono con i livelli $\mathscr{E}_2$ ed $\mathscr{E}_3$ del neon, le collisioni tra gli atomi d'elio eccitati e gli atomi di neon non eccitati danno luogo a *transizioni non radiative* degli atomi d'elio a livelli non eccitati con trasferimento della loro energia per risonanza agli atomi di neon. Questo processo d'eccitazione degli atomi di neon è indicato in figura 352 da frecce tratteggiate orizzontali. Grazie a questo processo le concentrazioni degli atomi di neon sui livelli $\mathscr{E}_2$ ed $\mathscr{E}_3$ crescono tanto che si ha l'inversione di popolazione rispetto ai livelli $\mathscr{E}_1$ ed $\mathscr{E}_3$, e addirittura si ha che la differenza di popolazione dei livelli $\mathscr{E}_2$ ed $\mathscr{E}_1$ aumenta di parecchie volte.

Per concludere, esaminiamo il ruolo che giocano gli *urti* degli atomi di neon contro le pareti del tubo. Questi urti non esercitano praticamente alcun'influenza sulla popolazione dei livelli $\mathscr{E}_2$ ed $\mathscr{E}_3$ né su quella del livello $\mathscr{E}_1$, poiché le durate di vita su questi livelli sono molto *corte.* Nel corso della durata di vita degli atomi eccitati su questi livelli, questi atomi non possono praticamente raggiungere le pareti del tubo, poiché si diseccitano molto prima. Al contrario, la durata di vita degli atomi eccitati occupanti il livello $\mathscr{E}_5$ è molto lunga, e gli atomi subiscono numerose collisioni con le pareti del tubo. Queste collisioni spopolano il livello $\mathscr{E}_5$ ed in conseguenza di ciò gli atomi di neon passano dal livello $\mathscr{E}_1$ al livello $\mathscr{E}_5$. Il livello $\mathscr{E}_1$ si spopola allora più rapidamente di quando il livello $\mathscr{E}_5$ ha una grande popolazione. La differenza tra le popolazioni $\mathscr{E}_3$ ed $\mathscr{E}_1$ aumenta, il che aumenta a sua volta l'efficacia di funzionamento del laser. Il processo di spopolamento del livello $\mathscr{E}_1$ si svolge in modo particolarmente efficace per un certo *diametro ottimale del tubo.* Secondo i dati sperimentali la potenza del laser a elio-

neon è massima per un diametro del tubo uguale a ~ 7 mm. Se si prende un tubo di maggior diametro la potenza diminuisce, malgrado il grande aumento del volume di gas di lavoro (il volume del tubo è proporzionale al quadrato del suo diametro). Ciò è dovuto al fatto che lo spopolamento efficace del livello $\mathscr{E}_1$ avviene solo per quegli atomi che si trovano *in prossimità delle pareti del tubo,* mentre gli atomi che si trovano nella parte centrale *non partecipano praticamente al processo di generazione.*

§ 123. *Polarizzazione non lineare del mezzo*

1. L'invenzione dei laser ha permesso di sperimentare con fasci di luce di grande intensità, in cui l'intensità del campo elettrico non è trascurabile rispetto a quella dei campi interatomici ed intermolecolari (cfr. il punto 3 del § 5). Con questi fasci si provocano *fenomeni ottici non lineari,* non semplici correzioni agli ordinari effetti lineari, ma *fenomeni di notevole rilievo* che hanno trovato applicazioni pratiche. Di alcuni fenomeni non lineari in ottica (aumento della trasparenza del mezzo a misura che aumenta l'intensità della luce, diffusione stimolata di Mandelštam-Brillouin, diffusione combinatoria stimolata) abbiamo già parlato nel capitolo VIII (cfr. i §§ 91, 99, 100).

Quando la luce si propaga in un mezzo, tutti questi fenomeni sono legati prima di tutto all'esistenza di una *relazione non lineare* tra il vettore polarizzazione $\boldsymbol{P}$ del mezzo e l'intensità $\boldsymbol{E}$ del campo elettrico dell'onda di luce. Supponiamo che il mezzo sia *omogeneo* e trascuriamo le sue proprietà magnetiche e la sua dispersione spaziale. Finché il campo $\boldsymbol{E}$ non è ancora molto intenso, si può svillupare il vettore $\boldsymbol{P}$ in serie di potenze delle componenti del vettore $\boldsymbol{E}$ fermandosi ai primi termini. Nel caso generale di un mezzo anisotropo si può allora scrivere

$$P_j = \alpha_{jk}E_k + \alpha_{jkl}E_kE_l + \alpha_{jklm}E_kE_lE_m + \dots, \tag{123.1}$$

dove, conformemente alle notazioni in uso nel calcolo tensoriale, si sottintende che la ripetizione di due indici implica una sommatoria. Il tensore α_{jk} rappresenta qui la *polarizzabilità ordinaria* (*cioè lineare*) *del mezzo* ed i tensori di rango superiore α_{jkl}, α_{jklm}, ... rappresentano rispettivamente le *polarizzabilità quadratica, cubica,* ecc., del mezzo. Il campo $\boldsymbol{E}$ è supposto *monocromatico* e le polarizzabilità α *dipendono dalla frequenza* ω. Per un mezzo isotropo tutti i tensori α_{jk}, α_{jkl}, ... *degenerano in scalari.*

Se ogni punto del mezzo è centro di simmetria, tutte le polarizzabilità di ordine pari s'annullano. (La parità è determinata dal numero degli indici, escluso il primo.) Infatti, se invertiamo i sensi di tutti gli assi coordinati, cambieranno di segno E_k ed E_l, ma non cambierà α_{jkl}, poiché l'origine delle coordinate è centro di simmetria, come ogni altro punto del mezzo. Non cambierà neanche il termine quadratico $\alpha_{jkl}E_kE_l$, ma il segno di P_j sarà in-

vertito. Perché la relazione (123.1) sia verificata anche nel nuovo sistema di coordinate, dev'essere $\alpha_{jkl} = 0$. Nello stesso modo si dimostra che anche tutte le altre polarizzabilità di ordine pari sono nulle.

L'esistenza di una polarizzabilità quadratica determina numerosi fenomeni ottici non lineari. Dalla dimostrazione precedente segue che nei mezzi isotropi i fenomeni quadratici non lineari *sono impossibili.* Tuttavia, anche nella considerazione di questi fenomeni si può utilizzare il modello di mezzo isotropo ponendo

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E} + \alpha_2 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} + \alpha_3 \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{E} + \ldots, \tag{123.2}$$

dove le polarizzabilità α, α_2, α_3, .. sono *scalari.** Quest'approccio semplificato è utilizzabile per uno *studio qualitativo* dei possibili fenomeni ottici non lineari. Si deve solo tener conto del fatto che nei cristalli, lungo una direzione data, si possono propagare solo onde di *certe polarizzazioni.* La relazione (123.2) si applica in modo approssimato a ciascuna di queste onde, ma per le diverse onde le polarizzabilità α, α_2, ... hanno valori diversi. Inoltre, le onde di polarizzazioni diverse possono scambiare energia attraverso *interazioni non lineari.* Un'interazione non lineare può manifestarsi quando $\boldsymbol{P}$ ed $\boldsymbol{E}$ sono legati da una relazione tensoriale della forma (123.1), ma essa è impossibile se la relazione è scalare della forma (123.2). È evidente che nell'approccio utilizzato l'influenza delle interazioni non lineari può essere apprezzata solo in modo qualitativo.

2. Scomponiamo la polarizzazione $\boldsymbol{P}$ in una parte *lineare* $\boldsymbol{P}_l$ ed una parte *non lineare* $\boldsymbol{P}_{nl}$: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_l + \boldsymbol{P}_{nl}$. La parte non lineare è definita dall'espressione

$$\boldsymbol{P}_{nl} = \alpha_2 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} + \alpha_3 \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{E} + \ldots \tag{123.3}$$

e la parte lineare da $\boldsymbol{P}_l = \alpha \boldsymbol{E}$. Conformemente a ciò anche l'induzione $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}$ è rappresentata dalla somma di una *parte lineare* $\boldsymbol{D}_l = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}_l$ e di una parte *non lineare* $\boldsymbol{D}_{nl} = 4\pi \boldsymbol{P}_{nl}$. La parte lineare è evidentemente uguale a $\boldsymbol{D}_l = \varepsilon \boldsymbol{E}$, dove ε è la permettività dielettrica ordinaria del mezzo, come essa è definita nell'elettrodinamica lineare. Scriviamo ora il sistema di equazioni fondamentali di Maxwell nella seguente forma:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \boldsymbol{P}_{nl}}{\partial t}, \\
&\operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0, \\
&\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = -4\pi \operatorname{div} \boldsymbol{P}_{nl}, \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.
\end{aligned} \tag{123.4}$$

Per risolvere questo sistema applichiamo il *metodo delle approssimazioni successive.* Nell'approssimazione di ordine zero omettiamo i secondi

membri delle equazioni (123.4). Si ottengono così le *equazioni ordinarie dell'elettrodinamica lineare.* Prendiamo come approssimazione di ordine zero l'onda piana definita dall'espressione

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A} \cos(\omega t - \boldsymbol{kr}), \qquad (123.5)$$

dove il vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ verifica la relazione ordinaria $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$. Per trovare l'approssimazione di ordine uno, omettiamo nella (123.3) i termini cubici ed i termini di ordine superiore e sostituiamo nel termine quadratico $\alpha_2 \boldsymbol{EE}$ il campo $\boldsymbol{E}$ con la sua espressione (123.5) nell'approssimazione di ordine zero. Fatto ciò, si ottengono di nuovo *equazioni lineari* che però *non sono omogenee* ed i cui secondi membri sono conosciuti. Questi secondi membri possono essere interpretati come *sorgenti supplementari di onde* determinate dalla parte non lineare della polarizzazione del mezzo. Ogni elemento di volume dV del mezzo *riemette le onde* come farebbe un dipolo di Hertz avente un momento dipolare supplementare $\boldsymbol{P}_{\text{nl}}dV$. La sovrapposizione di queste onde sull'onda (123.5) crea il campo d'onda $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1$ corrispondente all'*approssimazione di ordine uno.* Per ottenere l'approssimazione di ordine due si procede in modo identico; per farlo arrestiamo lo sviluppo (123.3) ai termini di terzo grado, sostituendo nell'espressione troncata il vettore $\boldsymbol{E}$ con $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1$, dopo di che calcoliamo il campo $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ corrispondente all'*approssimazione di ordine due,* ecc.

Si deve ancora aggiungere a quanto esposto che cosa si intende con ε nelle equazioni (123.4) nel caso di un mezzo *dispersivo.* La risposta è la seguente. Se si prende un'approssimazione qualsiasi, il secondo membro delle equazioni (123.4) contiene termini nei quali compaiono non solo la frequenza iniziale ω, ma anche le frequenze 2ω, 3ω, ... Possono anche apparire altre frequenze, come nel caso di una generazione parametrica della luce (cfr. il § 126). Si deve cercare $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ sotto forma di una somma di campi monocromatici *di ugual frequenza.* L'equazione (123.4) si deve scrivere per *ogni frequenza separatamente,* conservando nel secondo membro solo i termini contenenti questa stessa frequenza ed intendendo per ε il valore della funzione ε *a questa stessa frequenza.* Tale è il *senso simbolico* del sistema di equazioni (123.4).

§ 124. *Prima approssimazione. Rivelazione ottica. Generazione delle seconde armoniche, corrispondenti alla somma ed alla differenza delle frequenze*

1. Nell'approssimazione di ordine zero la parte non lineare (123.3) che viene aggiunta alla polarizzazione del mezzo è uguale a

$$\boldsymbol{P}_{\text{nl}} = \alpha_2 \boldsymbol{E}_0^2 = \frac{\alpha_2 \boldsymbol{A}^2}{2} + \frac{\alpha_2 \boldsymbol{A}^2}{2} \cos 2(\omega t - \boldsymbol{kr}). \qquad (124.1)$$

Il primo termine del secondo membro non dipende dal tempo ed è la sua esistenza che determina la *rivelazione ottica,* cioè l'apparizione in un mezzo non lineare, attraversato da un'onda di luce di grande potenza, di una polarizzazione elettrica costante. Questo fenomeno è analogo alla *rivelazione (raddrizzamento) di una corrente elettrica sinusoidale.* Per osservare questo fenomeno, si pone tra le armature di un condensatore, una delle quali viene messa a terra attraverso una grande resistenza, un cristallo (per esempio un cristallo di quarzo) e si fa passare attraverso questo cristallo un fascio di luce fornito da un laser a rubino. In conseguenza della rivelazione il fascio luminoso eccita nel circuito del condensatore un *impulso di corrente elettrica* che può essere rivelato sullo schermo di un oscillografo.

2. Il secondo termine della (124.1) varia secondo una legge armonica in funzione del tempo e determina la *generazione nel mezzo non lineare di una seconda armonica,* cioè di un'onda di frequenza doppia $\omega_2 = 2\omega$. Per trovare il campo di quest'armonica, si procede nel modo indicato al paragrafo precedente. Passando alla forma complessa, si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{\varepsilon(2\omega)}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= i\omega\frac{4\pi\alpha_2}{c}AAe^{i2(\omega t - kr)}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned} \tag{124.2}$$

Cerchiamo dapprima una *soluzione particolare* di questo sistema del tipo

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1 e^{i2(\omega t - kr)}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}_1 e^{i2(\omega t - kr)},$$

corrispondente alle *vibrazioni forzate* di frequenza 2ω. Risolvendo la seconda equazione mediante il procedimento ordinario, si trova che i vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ sono *reciprocamente perpendicolari.* Analogamente, la soluzione delle due ultime equazioni mostra che $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}_1) = (\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}_1) = 0$, il che significa che l'onda piana considerata è *trasversale rispetto ad ambedue i vettori* $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$. Tenendone conto e tenendo anche presente che $k^2c^2 = \omega^2\varepsilon(\omega)$, le due prime equazioni (124.2) forniscono il seguente risultato:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)}AA.$$

È ancora necessario che sia verificata la condizione che all'entrata del mezzo non lineare, dove si pone l'origine delle coordinate, l'intensità della seconda armonica sia nulla. Per farlo, si deve aggiungere alla soluzione particolare indicata sopra la *soluzione generale* del corrispondente sistema di equazioni omogenee, adottando un valore dell'ampiezza tale che la condizione menzionata sia verificata. Ritornando alla forma reale di scrittura, si

ottiene

$$E_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)} AA\,[\cos(\omega_2 t - 2kr) - \cos(\omega_2 t - k_2 r)], \quad (124.3)$$

dove

$$k_2^2 = \omega_2^2 \varepsilon(\omega_2)/c^2.$$

3. Questo risultato mostra che la seconda armonica rappresenta il risultato della sovrapposizione di due onde di uguale frequenza $\omega_2 = 2\omega$: di un'*onda forzata* $\cos(\omega_2 t - 2kr)$ e di un'*onda propagantesi liberamente* $-\cos(\omega_2 t - k_2 r)$. Entrambe le onde si propagano nella stessa direzione, ma con *velocità di fase differenti.* Ne segue che nel corso della loro propagazione la differenza di fase tra le onde varia, il che si traduce nell'apparizione di *battimenti.* Per calcolare l'intensità I_1 della seconda armonica, è necessario elevare al quadrato ed eseguire una successiva operazione di media rispetto al tempo sull'espressione (124.3). Omettendo i fattori numerici ed indicando con I l'intensità dell'onda iniziale, si ottiene così

$$I_1 \sim \frac{\alpha_2^2 \omega^2 x^2 I^2}{n^2 c^2} \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \quad (124.4)$$

dove x è la distanza percorsa dall'onda e dove viene introdotta la notazione

$$\beta = \frac{(2k - k_2)r}{2} = \frac{(2k - k_2)x}{2}. \quad (124.5)$$

Inoltre, nel denominatore della forma (124.4) abbiamo trascurato la differenza tra gli indici di rifrazione $n(\omega)$ e $n(2\omega)$.

Se si ha $\beta = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, l'intensità della prima armonica si annulla. I massimi d'intensità si trovano press'a poco al centro tra i minimi. Dunque, con il crescere di x, aumenta l'intensità della seconda armonica se β è compreso tra 0 e $\pi/2$, tra π e $3\pi/2$, ecc. In questi casi *l'energia dell'onda incidente è trasferita alla seconda armonica.* Se, invece, β è compreso tra $\pi/2$ e π, tra $3\pi/2$ e 2π, ecc., con il crescere di x, l'intensità della seconda armonica diminuisce. In questi casi *l'energia è nuovamente trasferita all'onda iniziale.* Questo processo di *trasferimento d'energia* si ripete periodicamente a misura che l'onda progredisce.

La condizione $\beta = \pi/2$ determina la distanza x alla quale si produce il trasferimento d'energia dall'onda iniziale alla seconda armonica ed il trasferimento inverso. Questa distanza si dice *lunghezza di coerenza* e dalla condizione menzionata è facile ottenere

$$l_{\text{coer}} = \frac{\lambda}{4|n(\omega) - n(2\omega)|}, \quad (124.6)$$

dove λ è la lunghezza d'onda iniziale, $n(\omega)$ il suo indice di rifrazione e $n(2\omega)$ l'indice di rifrazione della seconda armonica. *Più grande è la lun-*

ghezza di coerenza, più intenso è il trasferimento d'energia dall'onda iniziale alla seconda armonica.

Quando

$$n(\omega) = n(2\omega), \text{ e di conseguenza } 2k = k_2, \tag{124.7}$$

la lunghezza di coerenza l_{coer} diventa infinita. In questo caso il trasferimento d'energia è particolarmente intenso e corrisponde al passaggio dell'energia dall'onda iniziale alla sua seconda armonica. Entrambe le onde $\cos(\omega_2 t - 2kr)$ e $-\cos(\omega_2 t - k_2 r)$ si propagano con la stessa velocità di fase e perciò il rapporto tra le loro fasi è costante nel corso di tutta la durata di propagazione. È ciò che determina uno scambio efficace d'energia tra queste onde e per questo la condizione (124.7) si dice *condizione di sincronismo di fase* tra le onde considerate. In questo caso $\beta = 0$ per ogni valore di x, ed effettuando un passaggio al limite $\beta \to 0$, si ottiene dalla (124.4)

$$I_1 = \frac{\alpha_2^2 \omega^2 x^2 I^2}{n^2 c^2}. \tag{124.8}$$

Naturalmente per x sufficientemente grandi, la formula (124.8) non sarà verificata, poiché per $x \to \infty$ essa dà $I_1 \to \infty$, mentre l'intensità della seconda armonica non può essere superiore all'intensità I dell'onda iniziale. In questo caso il metodo delle approssimazioni successive, che ha fornito la formula (124.8), è inutilizzabile.

La lunghezza di coerenza l_{coer} può essere definita come la distanza di propagazione massima per la quale si conserva approssimativamente il sincronismo di fase tra l'onda incidente e l'onda secondaria, cioè la distanza sulla quale il ricupero di fase non è superiore a π.

4. La generazione della seconda armonica è stata per la prima volta scoperta da Franken nel 1961. La radiazione di un laser a rubino è stata focalizzata su un cristallo di quarzo posto tra due filtri a bande di trasparenza molto strette centrate sulle lunghezze d'onda $\lambda_1 = 694{,}3$ nm e $\lambda_2 = \lambda_1/2 = 347{,}0$ nm. Il cristallo, oltre alla radiazione rossa iniziale del laser ($\lambda_1 = 694{,}3$ nm), emette anche una radiazione ultravioletta di lunghezza d'onda uguale a 347,0 nm. Nei primi esperimenti di Franken all'incirca 10^{-8} dell'energia della radiazione iniziale si trasformava in energia della seconda armonica.

Ma perché solo una parte insignificante dell'energia viene trasferita alla seconda armonica? Ciò è dovuto al fatto che *la lunghezza di coerenza in quarzo l_{coer} è piccola.* Per uno scambio d'energia intenso, dev'essere verificata la *condizione di sincronismo di fase* $n(\omega) = n(2\omega)$. Ma ciò è irrealizzabile per i *mezzi isotropi nella regione di trasparenza dello spettro,* poiché in questa regione l'indice di rifrazione $n(\omega)$ *cresce in modo monotono con la frequenza.* L'uguaglianza $n(\omega) = n(2\omega)$ può essere verificata solo se la frequenza ω è situata in una regione di trasparenza e 2ω in una regione d'assorbimento intenso, o viceversa.

Ma, come avevano suggerito nel 1962 Giordmaine e Terhune, confermando poi questo suggerimento sperimentalmente, *il sincronismo di fase può essere realizzato alle frequenze* ω e 2ω *tra le onde ordinaria e straordinaria che si propagano in certi cristalli.* In figura 353 sono rappresentati gli indici di rifrazione ordinario n^o e straordinario n^e di un cristallo uniassico in funzione della direzione della normale all'onda. Le curve a tratto continuo corrispondono alla frequenza ω e quelle tratteggiate alla frequenza 2ω. In figura 353,*a* le curve $n^o(\omega)$ e $n^e(2\omega)$ s'intersecano. Ai punti di intersezione corrispondono le direzioni secondo le quali è verificato il sincronismo di fase tra l'onda ordinaria di frequenza ω e la sua armonica di frequenza 2ω. Queste direzioni sono dette *direzioni di sincronismo* e l'angolo ϑ tra queste direzioni e l'asse ottico del cristallo si dice *angolo di sincronismo.*
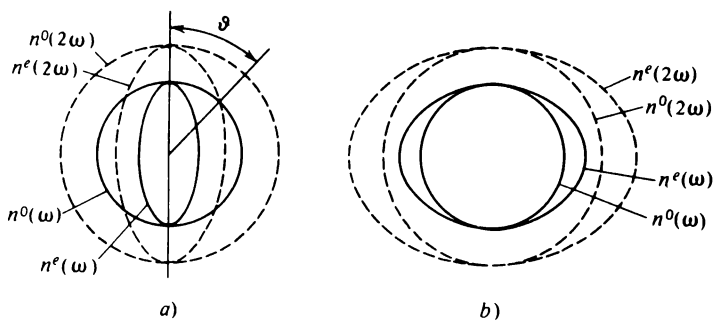
Fig. 353

Benché entrambe le onde siano polarizzate in piani diversi, esse possono interagire in modo non lineare, poiché nei cristalli la polarizzabilità quadratica non è uno scalare α_2, ma un *tensore* $(\alpha_2)_{jkl}$. Perciò, se esiste il sincronismo di fase, deve aver luogo il trasferimento d'energia dall'onda iniziale alla seconda armonica, come si osserva effettivamente. In questo modo si riesce a trasferire alla seconda armonica più della metà della luce incidente. Per intensità molto grandi della seconda armonica, il metodo delle approssimazioni successive può diventare inesatto o persino inutilizzabile, ma la conclusione qualitativa concernente il ruolo del sincronismo di fase *resta valida.*

Un cristallo conveniente per questi esperimenti può essere il cristallo uniassico di KH_2PO_4 (*diidrofosfato di potassio* o CDP). Per questo cristallo ad una lunghezza d'onda $\lambda = 1{,}15\ \mu m$, come mostrano calcoli confermati sperimentalmente, l'angolo di sincronismo è uguale a $41°35'$. Esiste un bel esperimento di dimostrazione. Un cristallo di CDP tagliato parallelamente all'asse ottico è posto su un tavolino rotante attorno al suo asse verticale. L'asse ottico del cristallo dev'essere orizzontale. Sul cristallo è inviato un potente fascio di raggi infrarossi fornito da un laser a vetro di neo-

dimio (λ = 1060 nm). Il raggio laser è invisibile ma lo si può rivelare interponendo sul suo tragitto un foglio di carta nera che s'infiamma. Se il cristallo è orientato in modo arbitrario, non appare alcuna luce visibile, ma se il cristallo viene lentamente ruotato, da esso esce un raggio verde abbagliante (λ = 530 nm), quando si verifica la condizione di sincronismo di fase.

Non tutti i cristalli uniassici sono convenienti per questi esperimenti. Per esempio, i cristalli di quarzo non funzionano perché, come si vede dalla figura 353,*b,* la condizione di sincronismo di fase non è verificata per alcuna direzione.

5. Esaminiamo ora la questione della *generazione di onde di frequenze uguali alla somma ed alla differenza delle frequenze iniziali.* Il meccanismo di quest'effetto è lo stesso di quello che genera la seconda armonica. Perciò è sufficiente spiegare l'essenza dell'effetto. Se su un mezzo non lineare sono inviati due potenti fasci di luce di frequenze ω_1 e ω_2 differenti, da esso emergerà *non soltanto luce con frequenza iniziale* ω_1 *e* ω_2 *e le loro armoniche* $2\omega_1$ *e* $2\omega_2$, *ma anche luce di frequenze* $\omega_1 + \omega_2$ *e* $\omega_1 - \omega_2$. L'utilizzazione di questo principio permette di produrre radiazioni infrarosse ed ultraviolette lontane. Per esempio, si è riusciti ad ottenere una radiazione ultravioletta di lunghezza d'onda $\approx$ 80 nm.

§ 125. *Seconda approssimazione. Autofocalizzazione*

1. Per calcolare l'*approssimazione di ordine due,* si deve utilizzare il vettore $\boldsymbol{P}_{\text{nl}}$ calcolato in prima approssimazione e cioè

$$\boldsymbol{P}_{\text{nl}} = \alpha_2(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1)(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1) + \alpha_3 E_0^2 \boldsymbol{E}_0.$$

Ci limiteremo però solo ai *mezzi isotropi* o ai *cristalli con un centro di simmetria.* Visto che per questi due tipi di mezzi $\alpha_2 = 0$ (cfr. il § 123), $\boldsymbol{P}_{\text{nl}} = \alpha_3 E_0^2 \boldsymbol{E}_0$. Sostituendo qui l'espressione (123.5), si ottiene

$$\boldsymbol{P}_{\text{nl}} = \frac{3\alpha_3 A^2}{4} \boldsymbol{A} \cos(\omega t - \boldsymbol{kr}) + \frac{\alpha_3 A^2}{4} \boldsymbol{A} \cos 3(\omega t - \boldsymbol{kr}). \qquad (125.1)$$

Il termine di frequenza $\omega_3 = 3\omega$ determina evidentemente la *generazione della terza armonica.* La differenza degli indici di rifrazione $n(3\omega) - n(\omega)$ è qui più grande che nel caso della seconda armonica, il che restringe il numero di cristalli che verificano la *condizione di sincronismo di fase.* La principale difficoltà sperimentale risiede nella piccolezza della polarizzabilità cubica α_3, il che implica la necessità di utilizzare cristalli molto grandi ed illuminamenti molto forti, tanto che spesso si provoca la distruzione dei cristalli. Malgrado ciò, un gruppo di fisici americani ha osservato nel 1962 la generazione della terza armonica su un cristallo di spato d'Islanda illuminato dalla radiazione di un laser a rubino. All'uscita del

cristallo si è riusciti a registrare una radiazione di lunghezza d'onda 231,3 nm. Più tardi la generazione della terza armonica è stata osservata in alcuni cristalli otticamente isotropi (per esempio, LiF, NaCl), nei gas e nei liquidi.

In terza approssimazione, oltre alle armoniche di ordini inferiori, dovrebbe apparire un'armonica *di ordine quattro*; nella successiva approssimazione un'armonica *di ordine cinque,* ecc. La quarta armonica è stata sperimentalmente rivelata da S.A. Akhmanov nel 1974 e la quinta nel 1973 da Harris.

2. Vediamo ora quali fenomeni sono legati al primo termine del secondo membro dell'espressione (125.1). Il fattore $A \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})$ rappresenta l'onda incidente iniziale $\boldsymbol{E}_0$. È evidente che nell'approssimazione considerata lo si può sostituire con $\boldsymbol{E}$, poiché questa sostituzione si ripercuote solo su *termini infinitesimi di ordine superiore,* di cui non si tiene conto nell'approssimazione considerata. L'espressione (123.4) si scrive ora nella forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{c} [\varepsilon(\omega) + 3\pi\alpha_3(\omega) A^2] \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0.$$

Ne segue che l'azione esercitata dal termine considerato è equivalente ad una *variazione della permettività dielettrica o dell'indice di rifrazione del mezzo.* Visto che la correzione da apportare a $\varepsilon(\omega)$ è piccola, l'indice di rifrazione n del mezzo sottoposto al campo di un'onda di luce di grande intensità si può scrivere

$$n = n_0 + n_2 A^2, \tag{125.2}$$

dove n_0 è il valore dell'indice di rifrazione del mezzo nell'ottica lineare e $n_2(\omega)$ un coefficiente il cui valore dipende dalle proprietà del mezzo.

Oltre alla causa considerata esistono anche altre cause di variazione dell'indice di rifrazione determinate dal campo elettrico. In un mezzo non lineare, l'onda di luce crea una *pressione costante,* dovuta all'*elettrostrizione,* il che è analogo all'apparizione di un termine costante nella formula (124.1). Sotto l'azione di questa pressione *cambiano la densità e l'indice di rifrazione del mezzo.* Nei liquidi composti di molecole anisotrope l'indice di rifrazione è modificato per l'*effetto Kerr ad alta frequenza* (cfr. il § 90). L'indice di rifrazione varia sempre per *riscaldamento del mezzo causato dall'onda luminosa.* In tutti questi casi la variazione dell'indice di rifrazione è proporzionale al *quadrato dell'ampiezza* e può dunque essere rappresentata dalla formula (125.2).

La costante n_2 può essere positiva o negativa. Il suo valore è particolarmente grande nel nitrobenzene ed è di segno positivo.

3. Da queste considerazioni segue che se un fascio di luce di grande intensità attraversa un mezzo omogeneo, quest'ultimo diventa *otticamente non omogeneo.* Il raggio di luce in questo mezzo s'incurva nel senso degli

indici di rifrazione crescenti ed è proprio questo fatto che determina i fenomeni d'*autofocalizzazione* (quando $n_2 > 0$) e di *defocalizzazione* (quando $n_2 < 0$) della luce. Questi fenomeni sono stati teoricamente previsti nel 1962 da G.A. Askarjan e sono stati osservati nel 1965 da N.F. Pilipetskij ed A.R. Rustamov. In seguito questi fenomeni vennero osservati nei gas, nei liquidi e nei solidi.

Per dare una spiegazione semplice del fenomeno d'autofocalizzazione, supponiamo che in un mezzo omogeneo d'indice di rifrazione n_0 penetri un fascio di raggi piano-parallelo a sezione trasversale circolare di diametro D (fig. 354). Supponiamo dapprima che l'ampiezza del fascio sia costante in tutti i punti della sezione. L'indice di rifrazione nella regione del mezzo occupata dal fascio diventa uguale a $n = n_0 + n_2 A^2$; si suppone inoltre che $n_2 > 0$. Per diffrazione il fascio s'allarga e praticamente tutte le direzioni
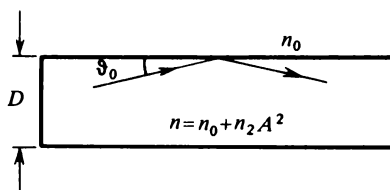
Fig. 354

dei raggi sono contenute in un cono, d'angolo al vertice $2\vartheta_{dif}$, dove $\vartheta_{dif} = 1{,}22\ \lambda/(Dn_0)$, e λ è la lunghezza d'onda nel vuoto. (Le direzioni dei raggi luminosi sono sempre interne allo spazio delimitato dal fascio cilindrico.) L'angolo limite ϑ_0 per la riflessione totale sulla parete laterale del cilindro è definito dalla relazione

$$\cos \vartheta_0 = n_0/(n_0 + n_2 A^2).$$

Visto che l'angolo ϑ_0 è piccolo, si può scrivere $1 - \cos \vartheta_0 \approx A^2 n_2/n_0$ e per conseguenza

$$\vartheta_0^2 \approx 2A^2 n_2/n_0.$$

Se $\vartheta_{dif} > \vartheta_0$, una parte dei raggi diffratti uscirà dal cilindro ed il fascio *diverge*. Per $\vartheta_{dif} < \vartheta_0$ tutti i raggi diffratti subiscono una riflessione totale sulla superficie laterale del cilindro. Dato che nelle condizioni reali l'intensità luminosa e l'indice di rifrazione aumentano a misura che ci si avvicina all'asse del cilindro, i raggi luminosi s'incurvano ed il fascio di luce *si contrae e può ridursi ad un sottile cordone luminoso*. Questo è proprio il fenomeno d'*autofocalizzazione*.

Nel caso intermedio in cui $\vartheta_{dif} \approx \vartheta_0$ un fascio di luce attraverserà un mezzo non lineare praticamente senza alcuna variazione delle sue dimensioni

trasversali. Tutto si svolge come se il fascio si « perforasse » una guida d'onda dove potersi propagare senza diffusione laterale. Questo regime di propagazione si dice *autocanalizzazione del fascio luminoso.* Quindi, poiché l'autocanalizzazione si realizza per $\vartheta_0 \approx \vartheta_{dif}$, utilizzando le espressioni di ϑ_0 e ϑ_{dif}, ed esprimendo l'ampiezza A in funzione della potenza del fascio

$$P = \frac{cn_0A^2}{8\pi} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \frac{cn_0D^2}{32}A^2,$$

si ottiene la cosiddetta *potenza di soglia,* al di sopra della quale comincia la contrazione del fascio. Questa grandezza è definita dall'espressione

$$P_{soglia} \approx c\,\frac{(0{,}61\lambda)^2}{16n_2}. \tag{125.3}$$

I raggi marginali del fascio si focalizzano ad una distanza dal bordo del mezzo che è facile stimare come segue. Nel fascio l'angolo di divergenza dei raggi, dovuto alla diffrazione, è uguale a $2\vartheta_{dif}$. Se la potenza luminosa è critica, per riflessione della superficie laterale del fascio, i raggi estremi ridivengono paralleli ad una distanza dal bordo del mezzo uguale a

$$f_{eff} = \frac{D}{2\vartheta_{dif}} \approx \frac{n_0D^2}{2{,}44\lambda}. \tag{125.4}$$

Questa distanza gioca, nel caso di autofocalizzazione, il ruolo di *distanza focale efficace per i raggi estremi del fascio.* Se al posto di raggi divergenti si prendono i raggi paralleli all'asse del fascio, essi saranno focalizzati alla stessa distanza f_{eff}.

Per il solfuro di carbonio CS_2, che possiede un valore relativamente grande di $n_2 = 2 \cdot 10^{-11}$ CGSE, illuminato da un laser a rubino (λ = 694,3 nm), la potenza di soglia, calcolata mediante la formula (125.3), è uguale a $P_{soglia} \approx 17$ kW. Per un fascio di diametro D = 1 mm, la formula (125.4) dà $f_{eff} \approx 96$ cm (n_0 = 1,62). In certi vetri ottici si ha $P_{soglia} \sim 1$ W. In questi casi si può osservare il fenomeno d'autofocalizzazione non solo nei fasci potenti dei laser ad impulso, ma anche nei fasci di debole intensità dei laser a regime continuo.

§ 126. *Generazione parametrica di luce*

1. I fenomeni ottici non lineari, che si manifestano nei cristalli permettono di trasformare una radiazione laser non solo nelle radiazioni di frequenze armoniche o di frequenze uguali alla somma e alla differenza delle frequenze iniziali, ma anche in *radiazioni di frequenza continuamente regolabile.* Il principio di questa trasformazione di frequenza è stato suggeri-

to nel 1962 da S.A. Akhmanov e R.V. Khokhlov (1926-1977). L'essenza di questo metodo è la seguente. Supponiamo che su un mezzo la cui polarizzazione non lineare è rappresentata, a meno di termini quadratici, dall'espressione $\boldsymbol{P}_{\text{nl}} = \alpha_2 \boldsymbol{EE}$, cada una possente onda di «pompaggio» $\boldsymbol{E}_{\text{p}} = \boldsymbol{A}_{\text{p}} \cos(\omega_{\text{p}}t - \boldsymbol{k}_{\text{p}}\boldsymbol{r})$ e due onde di debole potenza: $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{A}_1 \cos(\omega_1 t - \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r})$ ed $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{A}_2 \cos(\omega_2 t - \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r})$ le cui frequenze verificano la relazione

$$\omega_{\text{p}} = \omega_1 + \omega_2. \tag{126.1}$$

Poniamo per semplicità che le direzioni delle ampiezze di tutte le onde coincidano; si può allora passare alle formule scalari. In prima approssimazione la polarizzazione non lineare del mezzo è uguale ad $\alpha_2(E_{\text{p}} + E_1 + E_2)^2$. Dopo aver elevato al quadrato, consideriamo il termine $2\alpha_2 E_1 E_{\text{p}}$, che rappresenta il prodotto di due coseni. Trasformiamolo nella somma di due coseni e consideriamo il termine di frequenza $(\omega_{\text{p}} - \omega_1)$ che, secondo la (126.1), è uguale a ω_2. Procediamo nello stesso modo con il termine $2\alpha_2 E_2 E_{\text{p}}$. Come risultato, dalla decomposizione della polarizzazione non lineare P_{nl} otteniamo due termini di frequenze ω_1 e ω_2

$$\begin{aligned} P_{\text{nl}}(\omega_1) &= \alpha_2 A_2 A_{\text{p}} \cos[\omega_1 t - (\boldsymbol{k}_{\text{p}} - \boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{r}], \\ P_{\text{nl}}(\omega_2) &= \alpha_2 A_1 A_{\text{p}} \cos[\omega_2 t - (\boldsymbol{k}_{\text{p}} - \boldsymbol{k}_1)\boldsymbol{r}]. \end{aligned} \tag{126.2}$$

Di conseguenza, si produce una riemissione di onda di frequenze ω_1 e ω_2; si possono portare all'*amplificazione le onde di queste frequenze* a spese dell'energia dell'onda di pompaggio. Questo effetto si dice *amplificazione parametrica della luce,* poiché si può considerarlo come risultato di una *modulazione dei parametri del mezzo* (dell'indice di rifrazione) nella sua interazione con l'onda di pompaggio. Quest'effetto fu scoperto nel 1965 da Akhmanov e Khokhlov nell'URSS e da Giordmaine e Miller negli USA, che l'utilizzarono prima di tutto per la realizzazione di *generatori coerenti di luce di frequenza continuamente regolabile.* L'interazione con l'onda di pompaggio è particolarmente intensa quando le fasi delle onde (126.2) coincidono a lungo con le fasi di entrambe le onde E_1 ed E_2, cioè quando risulta verificata la condizione

$$\boldsymbol{k}_1(\omega_1) + \boldsymbol{k}_2(\omega_2) = \boldsymbol{k}_{\text{p}}(\omega_{\text{p}}). \tag{126.3}$$

Questa condizione si dice *condizione di sincronismo di fase* tra l'onda di pompaggio ed entrambe le onde di frequenza ω_1 e ω_2. La condizione (124.7), ottenuta prima, è un caso particolare della (126.3). Per convincersene, è sufficiente scrivere la (124.7) nella forma

$$\boldsymbol{k}(\omega) + \boldsymbol{k}(\omega) = \boldsymbol{k}_2(2\omega)$$

ed applicarla al processo di formazione di un'onda di frequenza ω a partire dalla sua seconda armonica.

Se la condizione di sincronismo è realizzata, in un mezzo non lineare

l'energia dell'onda di pompaggio sarà trasferita alle onde di frequenza ω_1 e ω_2. Per assicurare un'amplificazione efficace di queste onde, è necessario che l'onda di pompaggio attraversi molte volte il mezzo non lineare (un cristallo). A questo scopo il cristallo come nei laser, è messo in un *risonatore ottico tra due specchi*. Entrambi gli specchi debbono avere coefficienti di riflessione sufficientemente grandi per le due frequenze ω_1 e ω_2 e nello stesso tempo uno di questi specchi, attraverso il quale entra l'onda di pompaggio, dev'essere sufficientemente trasparente per questa onda. Se i coefficienti di riflessione di questi specchi sono sufficientemente grandi e se l'onda di pompaggio possiede una grande energia, si ottiene una generazione di onde di frequenze ω_1 e ω_2 che verificano le condizioni (126.1) e (126.3).

Non è necessario inviare specialmente nel risonatore onde di frequenze ω_1 e ω_2. Queste onde si formano a spese dei *rumori* o delle *fluttuazioni termiche*. Si produce un'*autoeccitazione* del generatore seguita da un'amplificazione delle onde generate, risultante dalla loro interazione con l'onda di pompaggio. Generalmente come onda di pompaggio si utilizza la seconda o la terza armonica di un laser a rubino o al neodimio.

2. *Nei mezzi isotropi nella regione di dispersione normale non si possono soddisfare simultaneamente le condizioni* (126.1) *e* (126.3). Infatti, supponiamo dapprima che tutte e tre le onde di frequenze ω_p, ω_1 e ω_2 si propaghino nella stessa direzione. In questo caso la condizione (126.3) può essere scritta nella forma $\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 = \omega_p n_p$, dove n_1, n_2 e n_p sono gli indici di rifrazione delle corrispondenti frequenze. Tenendo conto della (126.1) si ottiene $(n_p - n_1)\omega_1 + (n_p - n_2)\omega_2 = 0$, il che è impossibile, poiché $(n_p - n_1) > 0$ e $(n_p - n_2) > 0$. Ne segue che il numero d'onda k_p è sempre superiore alla somma dei numeri d'onda k_1 e k_2, *quale che sia la direzione di propagazione delle onde*. Perciò la condizione (126.3) non può essere soddisfatta se i vettori $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{k}_p$ hanno direzioni diverse. Altrimenti si otterrebbe un triangolo vettoriale in cui uno dei lati sarebbe più lungo della somma degli altri due.

In certi cristalli si può però assicurare il sincronismo di fase tra le onde ordinaria e straordinaria. Quando le frequenze ω_1 e ω_2 possono non coincidere, è più facile realizzare il sincronismo che nel caso analogo della generazione delle armoniche due o tre (cfr. il § 124). In linea di principio il sincronismo potrebbe essere realizzato nei seguenti quattro casi:

$$\begin{aligned} &1)\ \mathbf{k}_p^e = \mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^e, \quad 2)\ \mathbf{k}_p^e = \mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^o, \\ &3)\ \mathbf{k}_p^o = \mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^e, \quad 4)\ \mathbf{k}_p^o = \mathbf{k}_1^e + \mathbf{k}_2^e, \end{aligned} \qquad (126.4)$$

dove gli indici *o* ed *e* indicano le onde ordinaria e straordinaria. Nei cristalli reali non si può soddisfare né a tutte queste condizioni, né talvolta neppure ad una di esse. Così, nel caso di un cristallo uniassico di difosfato di potassio KH_2PO_4 si possono soddisfare le prime due condizioni. Nel primo caso, lungo la « direzione di sincronismo », l'onda straordinaria di pompaggio genera nel cristallo due onde, una ordinaria e l'altra straordinaria, di fre-

quenze ω_1 e ω_2 rispettive, e nel secondo caso entrambe le onde generate sono onde ordinarie. Per un cristallo uniassico di niobato di litio $LiNbO_3$, dotato di forti proprietà non lineari, si può soddisfare soltanto la seconda condizione (126.4).

Ruotando il cristallo (o variando la sua temperatura o applicando ad esso un campo elettrico costante), si possono variare le frequenze ω_1 e ω_2 per le quali la direzione di sincronismo è perpendicolare agli specchi. Proprio in questo modo funzionano i *generatori parametrici di luce coerente che permettono di regolare continuamente la frequenza.* Il rendimento di questi generatori, definito dal rapporto delle potenze delle onde generate alla potenza dell'onda di pompaggio, raggiunge parecchi per cento per una potenza d'uscita di parecchie decine o centinaia di kW. È evidente che le frequenze generate ω_1 e ω_2 sono *sempre più piccole* della frequenza di pompaggio ω_p. Accordando lentamente un generatore parametrico di luce, si può percorrere tutto lo spettro visibile dal rosso al violetto e penetrare nell'infrarosso lontano.

3. Se la (126.1) viene moltiplicata per la costante di Planck $\hbar$, si ottiene

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2. \tag{126.5}$$

Questa relazione, in fisica quantistica, viene interpretata come esprimente la *decomposizione del fotone $\hbar\omega_p$ in due fotoni $\hbar\omega_1$ e $\hbar\omega_2$*; l'equazione (126.5) esprime la *legge di conservazione dell'energia* per questo processo elementare. Analogamente, dal punto di vista quantistico, la generazione della seconda armonica risulta dall'*interazione di due fotoni,* di energia $\hbar\omega$ ciascuno, il che conduce all'*apparizione di un fotone $\hbar\omega_2$ di frequenza doppia* $\omega_2 = 2\omega$. Nello stesso modo si può anche interpretare la generazione di armoniche del terzo ordine e di ordini superiori, nonché la generazione di onde di frequenza uguale alla somma o alla differenza delle frequenze iniziali. Non discuteremo qui tutte queste questioni, poiché i fenomeni quantistici saranno oggetto del quinto volume del nostro Corso.

SUPPLEMENTO

§ S. *Propagazione delle onde elettromagnetiche nelle guide d'onda*

1. Nella radiotecnica contemporanea e nelle sue applicazioni hanno grande importanza le *guide d'onda,* lungo le quali si possono propagare onde elettromagnetiche. Una guida d'onda è costituita da un tubo, di solito a pareti metalliche, di sezione trasversale costante. Il tubo può anche essere curvo, ma ci limiteremo a considerare il caso di *guide d'onda rettilinee.* All'interno di una guida d'onda è normalmente contenuta aria, ma la guida d'onda può essere praticamente considerata come vuota. Tuttavia per svolgere considerazioni generali, supporremo che la guida d'onda contenga un mezzo omogeneo isotropo di costante dielettrica ε e di permeabilità magnetica μ. Supporremo pure che queste grandezze dipendano dalla frequenza ω del campo elettromagnetico (dispersione). Il caso particolare del vuoto si ottiene dalle formule generali per $\varepsilon = \mu = 1$.

Nelle nostre considerazioni la guida d'onda sarà supposta infinitamente lunga. Ciò è ammissibile se la lunghezza della guida d'onda è grande in confronto con la lunghezza d'onda nel mezzo in essa contenuto, nonché in confronto con la sezione trasversale della guida d'onda stessa.

Nell'esaminare la teoria delle guide d'onda dovremo menzionare alcuni nozioni e risultati elementari esposti nel volume cinque di questo Corso (questi riferimenti saranno indicati nei corrispondenti paragrafi).

2. Orientiamo l'asse coordinato Z lungo una guida d'onda. Se questo asse passa all'interno della guida, esso può essere convenzionalmente detto *asse della guida d'onda.* Per una guida d'onda di forma geometrica regolare (per esempio, cilindrica) è naturale considerare come asse della guida d'onda il *suo asse geometrico* e cioè l'asse di simmetria. Scegliamo, perpendicolarmente all'asse Z, gli assi coordinati X e Y.

Se lungo una guida d'onda si propaga un'onda elettromagnetica avanzante di frequenza ω, data la completa equivalenza di tutte le sezioni trasversali della guida d'onda, la fase dell'onda non può dipendere dalle coordinate x e y, ma deve essere solo funzione della coordinata z. Ciò vuol dire che il campo elettromagnetico all'interno di una guida d'onda deve avere la

seguente forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}, \tag{S.1}$$

dove, per un'onda che non si smorza, k_z è una costante reale. Si sottintende che le ampiezze di oscillazione $\vec{E}_0$ e $\vec{H}_0$ possono variare da un punto all'altro in ogni sezione trasversale della guida d'onda, come evidenziato nelle formule (S.1).

La velocità di fase v_f del campo elettromagnetico è la stessa lungo tutte le rette parallele all'asse della guida d'onda. Questa velocità è definita dalla formula:

$$v_f = \omega/k_z \tag{S.2}$$

(si veda vol. IV, § 8).

L'operazione di derivazione rispetto al tempo delle espressioni del tipo (S.1) si riduce alla loro moltiplicazione per $i\omega$. Pertanto le equazioni di Maxwell si possono scrivere nella seguente forma:

$$\text{rot}\,\vec{H} = i\frac{\omega\varepsilon}{c}\vec{E}, \quad \text{rot}\,\vec{E} = -i\frac{\omega\mu}{c}\vec{H}.$$

Visto che ε e μ non dipendono dalle coordinate, le equazioni $\text{div}\,\vec{E} = \text{div}\,\vec{H} = 0$ seguono da queste due equazioni e quindi sono automaticamente prese in considerazione. Utilizzando poi le formule

$$\text{rot}\,\vec{H} = \text{rot}\,\vec{H}_0 \cdot e^{i(\omega t - k_z z)} - i[\vec{k_z}\vec{H}], \quad \text{rot}\,\vec{E} = \ldots,$$

scriviamo le quazioni dì Maxwell in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y = i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_x; &&\frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i\frac{\omega\mu}{c}H_x;\\
&ik_z H_x + \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_y; &&ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\frac{\omega\mu}{c}H_y;\\
&\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\frac{\omega\varepsilon}{c}E_z; &&\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\frac{\omega\mu}{c}H_z.
\end{aligned} \tag{S.3}$$

Per determinare il campo elettromagnetico all'interno della guida d'onda a queste equazioni si devono aggiungere le *condizioni al contorno* che debbono essere soddisfatte dai vettori $\vec{E}$ e $\vec{H}$ sulle pareti interne della guida d'onda. Consideriamo il caso più semplice e più importante in cui queste pareti siano *perfettamente conduttrici.* In questo caso il problema enunciato, come mostra uno studio matematico più dettagliato, ammette per certe frequenze due tipi di risoluzione.

3. Primo tipo. In questo caso si ha $H_z = 0$, $E_z \neq 0$. Queste onde sono

dette *onde di tipo elettrico.* Per esse le equazioni (S.3) diventano

$$k_z H_y = \frac{\omega\varepsilon}{c} E_x; \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i\frac{\omega\mu}{c} H_x;$$

$$k_z H_x = -\frac{\omega\varepsilon}{c} E_y; \quad ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{c} H_x; \tag{S.4}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\frac{\omega\varepsilon}{c} E_z; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Tutte le componenti del campo che figurano in queste equazioni si possono esprimere in termini di E_z. Per esempio, dalla prima e dalla seconda equazione del sistema (S.4) si ottiene

$$E_x = \frac{ck_z}{\omega\varepsilon} H_y = \frac{ck_z}{\omega\varepsilon}\left(\frac{ck_z}{\omega\mu} E_x - \frac{c}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right),$$

da cui viene ottenuta l'espressione per E_x in termini di $\partial E_z/\partial x$. In modo analogo si procede anche per le altre componenti del campo elettromagnetico e qui è conveniente introdurre le seguenti notazioni:

$$\alpha^2 = k^2 - k_z^2, \tag{S.5}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu. \tag{S.6}$$

Si ha allora

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{ik_z}{\alpha^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial x}; \quad H_x = i\dfrac{\omega\varepsilon}{c\alpha^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}; \\ E_y = -\dfrac{ik_z}{\alpha^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}; \quad H_y = -i\dfrac{\omega\varepsilon}{c\alpha^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial x}; \\ H_z = 0. \end{cases} \tag{S.7}$$

Quindi, il problema si riduce alla determinazione dell'unica funzione $E_z(x, y)$. Per determinare questa funzione si utilizza l'equazione

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\alpha^2 E_z, \tag{S.8}$$

che è un corollario dell'equazione d'onda a cui deve soddisfare il campo E ed ogni sua componente. In particolare,

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0. \tag{S.9}$$

Inoltre, data la (S.1), è valida la seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_z^2 E_z = 0$$

e pertanto $$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2)E_z = 0,$$

da cui, se utilizziamo la notazione (S.5); si ottiene l'equazione (S.8).

Il campo elettrico all'interno di una parete perfettamente conduttrice è nullo. Pertanto dall'uguaglianza delle componenti tangenziali di un campo elettrico sull'interfaccia segue che sulla superficie interna della parete della guida d'onda si ha $E_z = 0$. Abbiamo quindi ottenuto un problema ai limiti per l'equazione differenziale (S.8). È noto dalla matematica che un tale tipo di problema non può avere soluzioni continue, univoche e finite per tutti i valori della costante α^2, ma solo per certi valori, cosiddetti autovalori. Questi valori ($-\alpha^2$) sono detti *autovalori dell'operatore* $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, mentre le corrispondenti soluzioni si dicono *autofunzioni* del problema considerato (si veda vol. V, § 22). La forma delle autofunzioni dipende dalla forma e dalle dimensioni della sezione trasversale della guida d'onda. Per una guida d'onda rettangolare le autofunzioni si possono determinare in modo elementare (si veda problema 1 di questo paragrafo). Per una guida d'onda cilindrica le autofunzioni sono espresse in termini di funzioni di Bessel. Non ci occuperemo però della determinazione delle autofunzioni, ma ci limitiamo solo a considerare le proprietà generali di una guida d'onda, indipendenti dalla forma della sua sezione trasversale.

4. Gli autovalori di un operatore bidimensionale $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ sono negativi e pertanto la grandezza α^2 è positiva. Dimostriamo questo teorema per il caso più generale di un operatore di Laplace tridimensionale

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2,$$

di cui l'operatore considerato è un caso particolare. Scriviamo l'equazione (S.9) nella forma

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0$$

e moltiplichiamo i suoi membri per E_z^* che è la grandezza complessa coniugata di E_z. In questo caso, prendendo in considerazione l'identità

$$\text{div}\,(E_z^* \,\text{grad}\, E_z) = E_z^* \Delta E_z + \text{grad}\, E_z^* \cdot \text{grad}\, E_z$$

si ottiene

$$\text{div}\,(E_z^* \,\text{grad}\, E_z) - \text{grad}\, E_z^* \,\text{grad}\, E_z + k^2 E_z E_z^* = 0.$$

Si suppone che il dominio in cui è definita la funzione E_z sia racchiuso da un inviluppo metallico sulle cui pareti sia $E_z = 0$. Nell'integrazione sul volume limitato da questo inviluppo, l'integrale della divergenza, in virtù del teorema di Gauss, s'annulla. Si ottiene pertanto

$$k^2 = \frac{\int \text{grad}\, E_z^* \,\text{grad}\, E_z \, dV}{\int E_z^* E_z dV},$$

da cui segue che la grandezza k^2 è sostanzialmente positiva.

La dimostrazione, senza modifiche essenziali, vale anche nel caso bidimensionale (S.8). In questo caso, anziché considerare un dominio chiuso tridimensionale, occorre considerare un dominio bidimensionale limitato da una curva chiusa che si ottiene per sezione trasversale della guida d'onda. Osserviamo tra l'altro che il teorema è valido anche nel caso in cui la condizione al contorno $E_z = 0$ sia sostituita da $\partial E_z/\partial n = 0$ dove la derivazione è effettuata lungo una normale alla superficie o curva chiusa che delimita il dominio di variazione di E_z considerato.

5. Tutto quanto esposto sopra può anche essere ottenuto da altri ragionamenti i quali interpretano meglio il principio fisico del funzionamento delle guide d'onda. Consideriamo prima un mezzo omogeneo non limitato di permettività dielettrica $\varepsilon(\omega)$ e permeabilità magnetica $\mu(\omega)$, rispettivamente. In questo mezzo si possono propagare onde piane non smorzate di una certa frequenza ω

$$E, H \sim e^{i(\omega t - kr)},$$

dove il vettore d'onda k può avere una direzione qualsiasi, ma la sua lunghezza è definita dalla relazione (S.8). Se fissiamo l'asse Z, il vettore d'onda di ogni onda piana può essere rappresentato nella forma $k = k_z + k_\perp$, dove k_z e $k_\perp$ sono le componenti di questo vettore lungo l'asse Z e perpendicolarmente ad esso, rispettivamente. Dunque, ogni onda monocromatica non smorzata di frequenza ω può essere rappresentata nella forma

$$\sim e^{k_\perp r_\perp} e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

Se lo smorzamento è assente, per sovrapposizione di onde di questo tipo a coefficienti costanti si può ottenere una qualsiasi soluzione delle equazioni di Maxwell in un mezzo.

Supponiamo ora che il mezzo sia contenuto all'interno di una guida d'onda. Il ruolo della guida d'onda si riduce al fatto che, di tutte le onde del tipo menzionato sopra, essa seleziona le onde che soddisfano la condizione al contorno $E_z = 0$. Quindi in ogni sezione trasversale della guida d'onda si possono ottenere soltanto sistemi di onde stazionarie ciascuno dei quali soddisfa la condizione menzionata. Tutte le onde di ciascuno di questi sistemi sono caratterizzate dallo stesso valore del numero d'onda $k_\perp$, che in virtù dell'equazione (S.8) è identico al parametro α. Questa è la ragione per cui il parametro α può assumere una sola serie discreta di valori. Il numero d'onda k_z può anch'esso assumere soltanto valori discreti definiti dalla relazione $k^2 = k_z^2 + \alpha^2$, identica alla (S.5). Da quanto esposto segue che, in assenza di smorzamento, entrambi i numeri k_z^2 ed α^2 sono positivi, ed inoltre $k_z^2 < k^2$.

6. Ogni onda nella guida d'onda è caratterizzata da un certo valore del parametro α. Con questo le onde di tipo elettrico non sono trasversali rispetto al vettore elettrico E poiché la componente longitudinale E_z s'annulla soltanto sulle pareti della guida d'onda, mentre negli altri punti si ha

$E_z \neq 0$. Inoltre, dalla relazione $k_z^2 < k^2$ segue che $1/k_z > 1/k$ o, dopo moltiplicazione per ω, $\omega/k_z > \omega/k$ o, infine, $v_f > v$ dove $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ è la *velocità di fase* di un'onda elettromagnetica in un mezzo non limitato. Dunque, per una data frequenza, la velocità di fase di una onda nella guida d'onda è $v_f = c/k_z$, e con ciò anche la lunghezza d'onda $\lambda_{\text{onda}} = 2\pi v/\omega$ è più grande della corrispondente grandezza in un mezzo non limitato. In particolare, se all'interno della guida d'onda c'è il vuoto, si ha sempre

$$v_f > c, \qquad \lambda_{\text{onda}} > \lambda_{\text{vuoto}}.$$

Non tutte le velocità di fase sono possibili: lo sono soltanto quelle che corrispondono ai valori discreti del parametro α. Dunque, la guida d'onda è un *filtro* che fa passare tra la gamma continua di frequenze solo quelle possibili, dette *autofrequenze*. Se il valore del parametro α è fisso, è impossibile che sia $k_z > k$, e cioè $\lambda_{\text{mezzo}} > \lambda_{\text{onda}} = 2\pi/\alpha$. Ciò significa che, per α assegnato, la guida d'onda non fa passare le lunghezze d'onda λ_{mezzo} minori di $2\pi/\alpha$.

7. Secondo tipo. In questo caso $E_z = 0, H_z = 0$, cioè le onde non sono trasversali, ma lo sono rispetto al vettore H. Queste onde sono dette *onde di tipo magnetico*. Le loro proprietà sono completamente analoghe a quelle delle onde di tipo elettrico e pertanto non è necessario considerarle in modo dettagliato. Indichiamo solo momenti essenziali nello studio delle onde di tipo magnetico. Ogni componente del campo può essere espressa in termini di H_z mediante le formule

$$\begin{cases} E_x = -i\,\dfrac{\omega\mu}{c\alpha^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}; \qquad H_x = -i\,\dfrac{k_z}{\alpha^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial x}; \\[2mm] E_y = i\,\dfrac{\omega\mu}{c\alpha^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial x}; \qquad H_y = -i\,\dfrac{k_z}{\alpha^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}; \\[2mm] E_z = 0, \end{cases} \tag{S.10}$$

ed inoltre H_z soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -\alpha^2 H_z, \tag{S.11}$$

che differisce dalla (S.8) solo per le notazioni. La differenza essenziale è nella modifica delle *condizioni al contorno* a cui debbono soddisfare le soluzioni dell'equazione (S.11). Se le pareti della guida d'onda sono perfettamente conduttrici, queste condizioni, nel caso considerato, si riducono all'annullamento delle componenti tangenziali del vettore E, in particolare, all'annullamento di E_x ed E_y. In altre parole, sulle pareti della guida d'onda debbono annullarsi le derivate $\partial H_z/\partial x$ e $\partial H_z/\partial y$ come segue dalle (S.10). Ma per mezzo di queste derivate si può esprimere la derivata

$\partial H_z/\partial n$ lungo la normale alla superficie della guida d'onda:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = \frac{\partial H_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}.$$

Pertanto in forma più compatta, le condizioni al contorno si riducono all'annullamento della derivata $\partial H_z/\partial n$ rispetto alla normale alle pareti della guida d'onda. Ma questo fatto non cambia le conclusioni generali che sono state ricavate rispetto alle onde di tipo elettrico. In questo caso si ottengono soltanto altri valori numerici ammissibili del parametro α nell'equazione (S.11) che non corrispondono ai valori dell'equazione (S.8). Per questa ragione non è necessario studiare in dettaglio il caso di onde elettromagnetiche di tipo magnetico.

8. Stabiliamo ora la relazione tra le velocità di fase $v_f = \omega/k_z$ e di gruppo $v_g = d\omega/dk_z$ di propagazione delle onde in una guida d'onda, valida per onde sia di tipo elettrico, sia di tipo magnetico. A questo scopo prendiamo uno degli autovalori di α. Se variamo la frequenza ω, varieranno simultaneamente k e k_z dell'onda in esame. Pertanto derivando la relazione (S.5) ad α costante e prendendo in considerazione la (S.6), si ottiene

$$\varepsilon\mu\frac{\omega d\omega}{c^2} + \frac{\omega^2}{2c^2}\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}d\omega = k_z dk_z,$$

da cui

$$v_f v_g\left[1 + \frac{\omega}{2\varepsilon\mu}\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}\right] = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} = v^2, \qquad (S.12)$$

dove $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ è la velocità di fase dell'onda in un mezzo illimitato. Se il mezzo contenuto nella guida d'onda non provoca dispersione si ha

$$v_f v_g = v^2. \qquad (S.13)$$

In particolare se il mezzo in una guida d'onda è il vuoto, si ha $v_f v_g = c^2$. La velocità di fase non può essere la velocità di segnale ed a questa velocità non si estende la condizione della teoria della relatività. Ecco perché si ha sempre $v_f > c$. Ma allora dall'ultima relazione segue che si ha sempre $v_g < c$, conformemente alla teoria della relatività, poiché il gruppo di onde propagantesi con velocità di gruppo può fungere da segnale.

9. A certe condizioni la velocità di gruppo è anche la *velocità media dell'energia* trasportata dall'onda. Dimostriamo questo teorema supponendo che il mezzo non sia assorbente, ma dispersivo. La dipendenza di ε e μ dalla temperatura non verrà presa in considerazione. Allora l'energia interna del mezzo coincide con la sua energia libera. La densità media rispetto al tempo dell'energia elettromagnetica è data, in elettrodinamica, da

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega}EE^* + \frac{d(\mu\omega)}{d\omega}HH^*\right] + \text{complessa coniugata} \qquad (S.14)$$

(si veda vol. IV, § 88). Quanto al vettore densità di flusso dell'energia elettromagnetica, esso in tutti i casi è definito dal vettore di Poynting S. Il suo valore medio per un campo monocromatico è dato dall'espressione

$$\bar{S} = \frac{c}{16\pi}[EH^*] + \text{complessa coniugata.} \tag{S.15}$$

La velocità media di propagazione dell'energia elettromagnetica è definita dalla seguente formula:

$$v_{el} = \bar{S}/\bar{W}. \tag{S.16}$$

Per meglio chiarire il problema, la coincidenza delle velocità v_{el} e v_g sarà prima dimostrata non per una guida d'onda, ma per il caso semplice di un *mezzo omogeneo illimitato*. Se in questo mezzo si propaga un'onda piana nella direzione del vettore unitario N, i campi E e H sono collegati dalle relazioni

$$\sqrt{\varepsilon}E = -\sqrt{\mu}[NH]; \quad \sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}[NE].$$

Utilizzando queste espressioni, si ottiene dalla (S.14)

$$\bar{W} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\right\}EE^*.$$

Per trasformare l'espressione tra parentesi graffe scriviamo l'espressione (S.6) nella forma $k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega\dot{\varepsilon})(\omega\mu)$ e deriviamo rispetto a ω. Si ha allora

$$2k\frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega\mu}{c^2}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\omega\varepsilon}{c^2}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega},$$

da cui

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega} = 2k\frac{c^2}{\omega\mu}\frac{dk}{d\omega} = 2\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{c^2}{\omega\mu}\frac{dk}{d\omega} = 2c\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{dk}{d\omega}.$$

Si ha quindi

$$\bar{W} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{dk}{d\omega}.$$

Inoltre l'espressione (S.15) diventa

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(EE^*)N.$$

Si ottiene in definitiva

$$v_{el} = \bar{S}/\bar{W} = \frac{d\omega}{dk} = v_g.$$

10. Estendiamo ora il risultato ottenuto al caso di un'onda elettromagnetica in una guida d'onda. Senza perdere di generalità, ci limiteremo a onde di tipo elettrico. Nel caso di una guida d'onda, nella formula (S.16) le grandezze $\bar{S}$ e $\bar{W}$ debbono essere sostituite con i valori medi del flusso d'energia completo attraverso la sezione trasversale della guida d'onda e dell'energia per unità di lunghezza. Il flusso d'energia medio nell'unità di tempo attraverso la sezione trasversale della guida d'onda è definito dalla seguente espressione:

$$\int \bar{S}_z df = \frac{c}{16\pi} \int (E_x H_y^* + E_y H_x^*) df + \text{complessa coniugata},$$

in cui l'integrazione è estesa alla sezione trasversale della guida d'onda. Sostituendo E ed H con le loro espressioni ricavate dalla (S.7), si ottiene

$$\int \bar{S}_z df = \frac{\omega \varepsilon k_z}{8\pi\alpha^4} \int \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z^*}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z^*}{\partial y} \right) df. \tag{S.17}$$

L'energia media per unità di lunghezza della guida d'onda è

$$\int \bar{W}\, df = \frac{1}{16\pi} \int \frac{1}{\alpha^4} \left[k_z^2 \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\omega^2\varepsilon^2}{c^2}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \right] \times$$
$$\times \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z^*}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z^*}{\partial y} \right) df + \frac{1}{16\pi} \int \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} E_z E_z^* df.$$

Si ha evidentemente che

$$\int \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z^*}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z^*}{\partial y} \right) df =$$
$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(E_z \frac{\partial E_z^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(E_z \frac{\partial E_z^*}{\partial y} \right) \right] df - \int E_z \left(\frac{\partial^2 E_z^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} \right) df.$$

Applichiamo al primo integrale del secondo membro il teorema matematico di Gauss. Si ottiene allora per questo integrale

$$\oint E_z \left(\frac{\partial E_z^*}{\partial x} n_x + \frac{\partial E_z^*}{\partial y} n_y \right) df = \oint E_z \frac{\partial E_z^*}{\partial n} dl,$$

dove l'integrazione si svolge lungo un contorno chiuso (lungo una curva che si ottiene per sezione normale della guida d'onda), e dl indica l'elemento di lunghezza di questo contorno. Visto che sul contorno si ha $E_z = 0$, l'integrale considerato s'annulla. (Nel caso di un'onda di tipo magnetico al posto di E_z si deve prendere H_z, ma il corrispondente integrale s'annulla anch'esso poiché sul contorno si ha $\partial H_z^*/\partial n = 0$. Solo in questo punto la dimostrazione per le onde di tipo magnetico differisce da quella per le onde di tipo elettrico.) Il secondo integrale del secondo membro è trasformato

per mezzo della (S.8), e come risultato si ottiene

$$\int\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z^*}{\partial x}+\frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z^*}{\partial y}\right)df=\alpha^2\int E_zE_z^*df.$$

Moltiplichiamo quest'espressione per $\frac{1}{\alpha^2}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}$ ed aggiungiamola al secondo membro della (S.8). Allora, prendendo in considerazione la (S.6), troviamo

$$\int\overline{W}df=\frac{\omega^2\varepsilon}{16\pi\alpha^4c^2}\left[\mu\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}+\varepsilon\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\right]\int\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z^*}{\partial x}+\frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z^*}{\partial y}\right)df. \quad \text{(S.18)}$$

Dividendo la (S.17) per (S.18), otteniamo l'espressione per la velocità media della propagazione dell'energia lungo la guida d'onda

$$v_{\text{el}}=\frac{c^2}{v_f}\frac{1}{\varepsilon\mu\left(1+\frac{\omega}{2\varepsilon\mu}\frac{d(\varepsilon\mu)}{d\omega}\right)}. \quad \text{(S.19)}$$

Confrontando questa formula con la (S.12), ci convinciamo che la velocità media della propagazione di un'onda in una guida d'onda coincide con la velocità di gruppo.

Problemi

1. Calcolare gli autovalori e le autofunzioni delle equazioni (S.8) e (S.11) in una guida d'onda di sezione trasversale rettangolare con le corrispondenti condizioni al contorno.

Soluzione. Cerchiamo la soluzione dell'equazione (S.8) a variabili separabili, cioè una soluzione di tipo

$$E_z=\varphi(x)\psi(y).$$

Dopo aver sostituito quest'espressione nell'equazione (S.8) si ottiene

$$\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{\psi(y)}\frac{d^2\psi}{dy^2}=-\alpha^2.$$

Il primo termine dipende qui soltanto da x mentre il secondo soltanto da y. La somma di questi termini è una costante. Ciò è possibile, se e solo se questi termini sono costanti essi stessi. Indicandoli con α_x^2 ed α_y^2, otteniamo

$$\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\alpha_x^2,\qquad \frac{1}{\psi(y)}\frac{d^2\psi}{dy^2}=-\alpha_y^2,$$

ed inoltre $\alpha_x^2+\alpha_y^2=\alpha^2$. Le soluzioni di queste equazioni, con le condizioni al contorno $\varphi(0)=\varphi(a)=\psi(0)=\psi(b)=0$, dove a e b sono le dimensioni trasversali della guida d'onda lungo gli assi X ed Y rispettivamente, hanno la forma

$$\varphi(x)=\sin\frac{n_x\pi x}{a},\qquad \psi(y)=\sin\frac{n_y\pi y}{b},\qquad n_x,n_y=1,2,3,\ldots$$

Dunque, le autofunzioni sono

$$E_z = \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b}, \tag{S.20}$$

e gli autovalori sono

$$\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right). \tag{S.21}$$

Nel caso di onde di tipo magnetico le autofunzioni sono

$$H_z = \cos \frac{n_x \pi x}{a} \cos \frac{n_y \pi y}{b}, \tag{S.3}$$

mentre gli autovalori sono gli stessi.

2. Supponiamo che la guida d'onda contenga un mezzo c in cui $\mu(\omega) = 1$. Dire per quale legge di dispersione $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ la connessione tra le velocità di fase e di moto dell'energia nella guida d'onda assume la forma

$$v_{el} v_f = c^2. \tag{S.22}$$

Soluzione. Per questo è necessario e sufficiente che la (S.19) diventi la (S.22), e cioè

$$\varepsilon \left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \right) = 1,$$

o

$$(\varepsilon - 1) d\omega + \frac{\omega}{2} d\varepsilon = 0.$$

Integrando questa relazione, si ottiene

$$\varepsilon - 1 = \frac{\text{costante}}{\omega^2}. \tag{S.23}$$

Questa legge di dispersione vale per un gas ionizzato (plasma), ed inoltre in questo caso la costante è negativa.

INDICE DÈI NOMI

Abbe 114, 117, 121-125, 127, 166, 175, 177, 393, 395, 396, 400-401
Abraham 602
Ahrens 503, 504
Airy 385-389, 391, 393, 399, 527, 703
Akhmanov 781, 784
Amici 124
Anderson 339
Angerer 293
Arago 29, 203, 292, 293, 518, 519, 523, 559, 616
Arkadiev 308
Askarjan 782
Avogadro 565, 751

Babinet 300, 301, 333, 378, 512, 513
Balmer 614, 616
Bartholin 498
Basov 759
Becquerel 626
Bennett 770
Bessel 95, 320, 384
Billet 213, 215, 221
Biot 29, 616, 618
Bohr 32, 751, 754
Boltzmann 151, 575, 601, 663, 731-734, 736, 739, 745, 748, 750, 753, 758
Bonč-Bruevič 676
Born 567, 602
Bose 751
Bouguer 594, 595
Bradley 701, 702, 703
Bragg 420-425, 654, 655
Braun 415
Breguet 30
Brewster 29, 441, 442, 444, 455, 456, 458, 465, 466, 469, 473, 475, 528, 766
Brillouin 67, 653, 656, 659, 660, 773
Brodhun 161
Broglie, De 33, 394

Carathéodory 134, 137
Carnot 733
Cartesio 15, 21, 26
Cassegrain 185, 186, 189
Čerenkov 273-278
Christiansen 577
Clausius 47, 566, 729, 730, 743
Compton 32
Copernico 701
Corbino 626
Cornu 303-307
Cotton 31, 605, 606, 622

Davisson 32
Debye 424, 425, 567, 656, 740
Delille 292
Denissuk 378-381
Doppler 435, 464, 593, 594, 656, 697-700, 703-707, 715, 732, 734
Drude 270, 470, 474, 475, 483, 485, 487, 618

Eagl 360
Ehrenfest 61, 62, 744
Einstein 31, 32, 647, 651, 652, 665, 668, 669, 674, 678-680, 682, 685, 691, 708, 711, 718, 751-753, 757
Eulero 28, 29

Fabelinskij 331
Fabrikant 758
Fabry 265-267, 269, 343-344, 356, 760, 761
Faraday 30, 31, 565, 595, 612, 616, 622, 623, 625, 751
Fermat 51-55, 57, 87, 346
Fitzgerald 690
Fizeau 29, 32, 251, 410, 411, 714
Forrester 210
Foucault 29, 32, 502, 504, 706, 707
Fourier 42, 59, 226-228, 230, 235, 241, 351, 353, 362, 364-368, 370, 377, 378, 397, 398, 444, 590, 655, 740
Frank I.M. 275, 276, 278
Frank, prisma di polarizzazione di 503, 504
Franken 778
Franklin 28
Fraunhofer 295, 298-301, 314-315, 320, 321, 323, 324, 334, 339, 341, 383, 385, 416, 426
Frenkel 28
Fresnel 29, 203, 211-214, 216, 221, 226, 271, 280-298, 300, 303, 305, 308, 310, 312-315, 317, 319, 320, 330, 361, 381, 384, 400, 404, 438, 440, 444, 445, 448-450, 452, 455-457, 459, 461, 465-470, 472, 474, 482, 488, 518, 519, 532, 534-536, 539, 543, 582, 619, 621, 622, 624, 625, 714, 729
Friedrich 415

Gabor 370, 371, 373
Galileo 183, 666, 668, 685, 712, 716
Gauss 79, 790, 795
Gehrcke 267, 268, 343-345, 348
Germer 32
Giordmain 779, 784
Ginsburg W.L. 275, 278
Glan 503, 504
Glazebrook 503, 504, 507
Gorelik 209
Gregory 186, 189
Grimaldi 21, 26, 211, 223
Green 309
Gross 537, 636, 657
Gullstrand 144

Hafele 694, 696
Hagen 488
Haidinger 622
Hamilton 129, 552-555, 744
Harris 781
Hartnack 503, 504
Heisenberg 230
Hell 425
Helmholtz 77, 83, 86, 124, 132, 148, 395, 455
Herriot 770
Herschel 131, 185
Hertz 30, 320, 460, 466, 539, 643, 654, 775
Hewish 583
Hook 21, 26
Huygens 21, 22, 24-27, 49, 50, 177-180, 239, 244, 280, 283, 285, 295, 296, 298, 308, 310-312, 315, 330, 341, 361, 381, 388, 400, 411, 498, 547

Ives 270, 699, 701

Jamin 252-254, 256, 257, 577
Jaseja 672
Javan 672, 770
Jeans 739, 743-748, 753, 755, 769
Joule 477, 585

Kapitsa 611, 613
Kaplianskij 537, 636
Keating 694, 696
Kellner 179
Kelvin 754
Kennedy 674
Keplero 87, 183, 571, 676
Kerr 31, 200, 595-598, 600, 605, 607, 608, 766, 767, 781
Ketteler 481, 485
Khun 573
Khokhlov 784
Kirchhoff 280, 282, 284, 295, 296, 308, 311, 312, 724, 727-731, 743
Knipping 415
Kohlrausch 30, 41
Krishnan 660
Kundt 575, 576, 624
Kurlbaum 745

Ladenburg 572
Lagrange 77, 83, 86, 124, 132
Lambert 159, 160, 162-164, 171, 405, 728, 729
Lamè 539
Landau 657, 658
Landsberg 653, 656, 657, 660, 661
Langevin 598, 602, 605
Langley 745
Langmuir 581
Laplace 46, 790
Larmor 610, 611, 625, 655, 685
Laue 415, 418-423, 425
Lebedev 571, 732
Leith 370
Lemoin 602
Leontovič 657
Le Roux 575
Levin 584, 587
Lippmann 271-273, 380
Lloyd 213, 221, 222, 234, 552, 555
Lomonosov 28, 168, 185
Lorentz H.A. 31, 537, 560, 566, 567, 592, 609, 610, 613, 614, 624, 665, 668, 685-688, 690, 698, 712, 714, 716-718
Lorenz L. 566, 567
Loschmidt 650
Lummer 161, 267, 343-345, 348, 745

Macaluso 626
Mach 258, 277
Maiman 762, 771
Maksutov 186, 188, 189
Malus 29, 57, 58, 429, 442
Mandelštam 402, 591, 596, 649, 653, 656, 657, 659-661, 773
Maraldi 292
Marci 21
Maxwell 30, 31, 39, 41, 42, 45, 138, 141, 280, 320, 432, 433, 463, 471, 476, 489, 491, 496, 528, 559, 560, 562, 593, 620, 633, 634, 639, 642, 643, 647, 668, 675, 716, 731, 732, 774
Meslin 215, 221
Michelson 31, 224, 242, 258-260, 339, 340, 343, 347, 348, 370, 411, 413, 414, 668-672, 674-676, 678, 690, 714
Michelson V.A. 739
Miller 784
Minkowski 686-688, 716
Molčanov 676
Morley 259, 672
Morse 320
Mosotti 566
Mouton 31, 605, 606
Murrey 672

Nernst 270
Neuhaus 272
Newton 21, 23, 26, 30, 34, 84, 172, 185, 189, 249-251, 446, 560, 561, 576, 665, 666, 703, 716
Nicol 501-502, 505, 506

Ornstein 651

Paschen 360, 745
Pasternak 636
Pauli 674
Pérot 265-267, 269, 343, 344, 356, 760, 761
Pilipetskij 782
Pitagora 21
Placzek 657, 658
Planck 11, 32, 394, 589, 722, 743-748, 751, 754, 755, 786
Pockels 606-608, 766, 767
Poggendorff 553, 554
Pohl 214, 215, 221, 222, 293, 294, 405
Poincaré 665, 685
Poisson 292, 293, 732
Poynting 442, 445, 492, 540-542, 588, 644
Prazmowski 503, 504
Prévost 725, 727
Pringsheim 745
Prochorov 759
Puccianti 577
Purkinje 149

Raman 660
Rayleigh 61, 210, 281, 291, 320, 338, 342, 344, 346, 361, 364-366, 370, 374, 386-389, 393, 397, 402, 404, 427, 460, 474, 538, 562, 588, 628, 642, 646, 647, 649, 651, 656, 657, 739, 743-748, 753, 755, 769
Ramsden 95, 177, 179, 180, 182
Reiche 573
Rittenhausen 339
Ritter 503, 504
Ritz 675
Rochon 504
Römer 21, 703
Roždestvenskij 258, 396, 401, 577, 578, 580
Rowland 339, 355, 356, 358, 359, 360
Rubens 487, 488, 745
Rubinstein 320
Rustamov 782
Rutherford L.M. 339
Rytov 331

Scherrer 425
Schmidt 186-189
Schrödinger 571
Schuster 302, 303, 306
Sellmeier 562, 563, 580, 588, 625
Sénarmont 504
Sitter, de 675
Sivuchin 46
Smoluchowski 647, 650, 651
Snellius 15, 23, 34, 51, 54, 277, 496, 506, 554
Soleil 513
Sommerfeld 67, 320
Stark 593, 614-616
Stefan 151, 731-734, 736, 739, 748, 750
Stillwell 699, 701

Stokes 660
Stoletov 442, 458

Tamm 275, 276, 779
Terhune 779
Thomas 573
Thompson 503, 504
Tomaschek 676
Torndyke 674
Townes 672, 759
Tsiolkovskij 720
Twiss 415
Tyndall 642, 647

Ugarov 689
Ulianin 729
Umov 541
Upatnieks 370

Van Cittert 242
Vavilov 150, 151, 273-278, 521, 594, 595
Védam 636
Verdet 623, 626
Vladimirskij 658
Voigt 553, 614, 615, 626

Weber 30, 41
Weirstrass 124, 125
Whitford 308
Wien 591, 593, 627, 628, 734, 735, 737-739, 740, 743, 746, 748, 750, 754-755
Wiener 270-271
Williams 343
Wollaston 504, 506
Wolfke 370
Wood 291, 339, 364, 487, 626, 627
Wulff 420-425, 654, 655

Young 29, 148, 210, 211, 222, 223, 251, 410

Zeeman 31, 210, 608, 609, 611, 613-615, 624, 627, 715
Zehnder 258
Zeiss 122, 175, 447
Zernike 242, 407, 651

INDICE ANALITICO

Abbe, numero di 114
—, metodo di prova degli obiettivi di 126
Aberrazione dei sistemi ottici 101, 105, 112
— della luce 697, 701
— sferica 107
— — longitudinale 107
— — trasversale 107
Acceleratore a fasci opposti 719
Accomodazione 143
—, campo di (limiti di) 143
Accoppiamento di reazione 759
Acromatizzazione d'ingrandimento 176
— di posizione 176
Acromatici, obiettivi 117, 176
Adattamento 151
Airy, cerchio di 385
—, spirali di 527
Allargamento delle righe spettrali (naturale) 590
— per effetto Doppler 593
— per effetto Stark 593
— per urto 592
Alone 325
Amplificazione parametrica della luce 784
Analizzatore 429
Angolo d'aberrazione 702
— d'apertura 97
— di diffusione 645
— d'incidenza principale 485
— di proiezione 97
— di rifrazione reale 480
— di sincronismo 779
— visuale 143
Apertura 97
— di polarizzazione totale 502
— numerica 166
— relativa 165
Apocromatico, obiettivo 117, 175
Area apparente della superficie 153
Asse(i)
— dielettrici 531
— ottico 493
— — di prima specie (biradiali) 545
— — di seconda specie (binormali) 536
— ottico principale 74
Assorbimento selettivo 486
Astigmatismo 101, 109
Aureole 325
Autocanalizzazione 783
Autofocalizzazione 782
Azimut principale 485

Babinet, compensatore di 512
—, teorema di 301
Babinet-Soleil, compensatore di 513
Bastoncelli 145
Becquerel, formula di 626
Billet, bilente di 213
Binocolo 183
Birifrangenza 491
— circolare 619
— nei liquidi a molecole anisotrope 528
— per deformazione 528
Bohr, regola di selezione delle frequenze 754
Bouguer, legge di 594
Bragg-Wulff, legge di 421
Brewster, angolo di 441
—, legge di 441, 466, 469, 475
Brillanza 96, 158
— energetica 158

Camera oscura 12, 403
Campo luminoso in prossimità di un fuoco 381
— vettoriale monocromatico 431
Candela internazionale 156
Cannocchiale di Galileo 183
— di Keplero 87, 183
Cannocchiali e telescopi 181
Carathéodory, teorema di 137
Catastrofe ultravioletta 744
Caustica 103
Centro del sistema di frange d'interferenza 231
Cerenkov, contatori di 278
Chiarificazione dei vetri ottici 451
Clausius-Mosotti, formula di 566
Coefficiente di diffusione 646
— d'efficacia luminosa 156
— d'ellitticità 473
— d'estinzione (d'assorbimento) 594
— di riflessione 442
— di trasmissione 442
Coerenza 201, 237
—, area di 223
— completa 238
—, grado complesso di 237
—, grado di 237
—, lunghezza di 233, 239, 777
— parziale 238
— spaziale 217, 223, 239
—, tempo di 233, 239
— temporale 233, 239
—, volume di 239
Collinearità 79
Coma 108
Compensatore 509
Composizione delle velocità relativistica 711
Condensatore 181
Condizione di Herschel 131
— dei seni 121
— delle tangenti (d'ortoscopia) 120
Cono di luce 688
Contrasto di fase 407
— negativo 409
— positivo 408
Cornea 141
Cornu, spirale di 303, 305
Corpo assolutamente matto 728
— — nero 728
Corrente di conduzione 477
— di polarizzazione 477
Costante
— dielettrica 477
— — complessa 478
Cotton-Mouton, effetto di 605, 606
Covarianza 715
Cristalli biassici 496, 537, 545
— negativi 499
— positivi 499
— uniassici 493, 537, 545
Cristallino 141, 142

Cristallo-rifrattometro 499
Curva d'aberrazione 106
— di visibilità 149
Curvatura del piano immagine 109

Debye-Scherrer-Hell, metodo di 424
Demodulazione della luce 209
Denissuk, metodo in olografia di 379
Densità di volume dell'energia raggiante 153
— spettrale dell'energia radiante 723
Diaframma d'apertura 96
— di campo 98
Diaframma Debye-Scherrer (D.-S.) 424
Dicroismo 505
— circolare 622
Differenza di cammino ottico 205
Diffrazione 14, 199, 280
— da reticoli bidimensionali 415
— da reticoli tridimensionali 415
— dei raggi X 415
— di Fraunhofer 297
— — su aperture 320
— — su un foro circolare 322
— di Fresnel 297
— — dal bordo della Luna 307
— — dallo schermo 307
— —, metodo di similitudine di 308
Diffusione della luce 642
— combinatoria 660
— — stimolata 663
— molecolare (di Rayleigh) 647
— — superficiale 652
— di Tyndall 642
—, depolarizzazione di 650
—, struttura fine di 652
Diottria 91
Direzioni di sincronismo 779
Dispersione angolare 267, 336
—, coefficiente di 114
Dispersione anomala 563, 569
— degli assi dielettrici 531
— della luce 41
— interferenziale 463
— in un plasma 581
— media 115
— negativa 574
— normale 569
— positiva 574
— relativa 115
— spaziale 529, 561, 631
— temporale 630
Distanza
— angolare critica 147
— d'astigmatismo 103
— di visione netta 143
— risolvibile 386, 391, 393, 398
— zenitale 35
Distorsione 111
—, condizione d'assenza di 120
Dominio di dispersione 336
Doppler, effetto 593, 697-700, 704
Drude, metodo di 483
Dualità onda-corpuscolo 32, 199
Durata di vita 591

Effetto skin anomalo 489
— — normale 489
— Stark 593, 614
Einstein, coefficienti di 753
—, formula di 651
—, principio della relatività di 668
Elettroni ottici 560
Emissione spontanea 752
— stimolata (indotta) 752
Enantiomorfismo 618
Energia a riposo 718
— cinetica relativistica 718
— totale 718
Equazione dell'adiabatica di radiazione 732
— d'onda 46
Equivalente meccanico della luce 157
Etere universale 24
Eventi assolutamente lontani 688
— futuri 688
— passati 688

Fascio astigmatico 102
— di riferimento 371
— oggetto 371
— omocentrico 68
Fermat, principio di 51
Filtri saturabili 767
Flusso luminoso 153
Fluttuazione 637
— quadratica media 637
— — relativa 637
Focalizzazione forte 92
—, intensità di (luminanza di) 153
Formula degli specchi 76, 84
Forza dell'oscillatore 571
Fotografia a colori 271
— di Lippmann 271
Fotone (i) 28, 32
Fovea centrale 142
Fourier, integrale di 227
—, serie di 226
Frange d'interferenza 204
—, condizione di buona nettezza di 217, 219
— di uguale inclinazione 249
— di uguale spessore 247
—, funzione (coefficiente) di visibilità di 224, 238
—, interfrangia di 204
—, localizzazione di 247, 249
—, procedimento d'osservazione oggettivo di 214
—, — — soggettivo di 214
—, semilarghezza di 262
Frequenza di plasma (di Langmuir) 581
Fresnel, biprisma di 212
—, coefficienti di 440
—, formule di 440, 482
—, legge per le velocità normali della luce nei cristalli 532
—, legge per le velocità radiali della luce nei cristalli 543
—, parallelepipedo di 448
—, specchi di 211
—, zone di 283
Funzione d'autocorrelazione 237
— caratteristica 129
— di correlazione 237
— — mutua 237
Fuoco 68
— parassiale 105
— principale 81
Galileo, principio di relatività di 666
—, trasformazione di 666
Gamma delle radiazioni ottiche 10, 11
Generazione delle armoniche 778, 780
— di onde di frequenze uguali alla somma ed alla differenza delle frequenze delle onde iniziali 780
— parametrica della luce 784
Grado di correlazione 237
Grandezze statisticamente indipendenti 637

Huygens, principio di 24, 280, 547
—, — nell'enunciato di Fresnel 280
—, — — di Kirchhoff 284, 308

Iconale 47
— equazione di 47
— puntuale 129
Illuminamento 157, 160
— energetico (radiazione) 157, 160
— naturale 166
Immagine
— diritta 81
— ottica 68, 103
— primaria 400
— reale 68
— rovesciata 81
— secondaria 400
— stigmatica 68
— virtuale 68
Immersione 394
Impulsi giganti 767
Incoerenza 201, 238
Indicatrice 557
Indice
— d'estinzione 480
— — principale 478
— di rifrazione 15, 16, 480
— — complesso 478
— — dei raggi X 463
— — dello spazio interstellare ed interplanetario 463
— — ordinario 496
— — principale 478
— — straordinario 496
Indici di rifrazione principali 534
Ingrandimento
— angolare 84

— assiale (longitudinale) 85
— del cannocchiale 87
— della lente 171, 395
— di microscopio 169, 170, 395
— normale 167
— — di microscopio 169, 395
— — di telescopio 167, 395
— trasversale 81
Intensità energetica
— della sorgente 155
— di radiazione 723
— — specifica 723
— luminosa (o delle vibrazioni) 155, 200
— — sferica media 155
Interferenza 14, 199
—, angolo di 220
— a onde multiple 201, 260
— della luce polarizzata 518, 525
—, ordine di 232
— prodotta dagli strati 245
Interferometro
— di Fabry-Pérot 265-267, 269
— di Jamin 252
— di Mach-Zehnder 258
— di Michelson 258
— stellare 411
— di Roždestvenskij 258
Intervallo 686
— di genere spazio 687
— di genere tempo 687
— luminoso 687
— ottico 89
Invarianti adiabatici 733, 736, 737
Invarianza 715
Ipotesi balistica 675
Iride 98, 142

Kerr, costante di 597
—, effetto elettroottico di 595
— —, teoria di Born di 602
— —, teoria di Langevin di 598
Ketteler, invarianti di 481
Kirchhoff-Clausius, formula di 730
Kirchhoff, legge di 727
Kundt, costante di 624

Lagrange-Helmholtz, invariante di 77
—, teorema di 77, 124
Lambert, legge di 159
Lamina correttrice 187
— di fase 409
—, direzioni principali di 509
— quarto d'onda 509
Landau e Placzek, formula di 658
Larghezza naturale della riga spettrale 590
Laser 756
— a elio-neon 762, 770
— a rubino 762
—, schema a quattro livelli energetici 768
—, schema a tre livelli energetici 768
Laue, condizione di 418
—, diagramma di 418
Legge(i)
— d'addizione fotometrica 238
— dell'inverso del quadrato 158
— della conservazione dell'energia-impulso 719
— della propagazione indipendente dei fasci luminosi 12, 14
— della propagazione rettilinea della luce 12, 13, 14
— della riflessione della luce 12, 15
— della rifrazione della luce 12, 15
— di dispersione delle onde 63
— geometriche della riflessione e della rifrazione 435, 555
— — sulla superficie di un metallo 479
Lente
— di campo (collettore) 177
— d'indice di rifrazione continuo 195
— d'ingrandimento 171
— dell'occhio 177
—, distanza focale di 78, 197, 198
— elettrica 189
—, formula di 78, 84
— magnetica 189
— perfetta 73
— semplice 196
— sottile 74
— spessa 93
Linea(e)
— di curvatura 102
— d'universo 687
— di visione diretta 142
— isocromatiche 526
Lloyd, specchio di 213
Lorentz-Lorenz, formula di 566, 567
Lorentz, contrazione delle lunghezze di 690
—, trasformazione di 685
Luce
— naturale 428
— parzialmente polarizzata 428
— polarizzata 428
— quasi-monocromatica 208, 235
Lumen 156
Lummer-Brodhun, fotometro di 161
Lummer-Gehrcke, lamina di 267
Luminosità 165
Lunghezza
— meccanica di un tubo 174
— ottica di un tubo 174
— propria 689
Lux 158

Macaluso-Corbino, effetto 626
Macchia lutea 142
Mach, onde di 277
Malus, legge di 429
—, teorema di 57
Mandelštam-Brillouin, effetto 653
Maser 756
Massa
— a riposo 718
— relativistica 718
Maxwell, effetto 528
—, legge di 41
Meccanica
— quantistica 199
— relativistica 715
Meslin, esperimento di 221
Metodo dei « ganci » di Roždestvenskij 578
— dei piccoli gradini 149
Mezzo attivo (a popolazione inversa) 758
Michelson, esperienza di 668
—, reticolo a gradinata di 340
Microonde 10
Microscopio 173, 181, 395
Misura delle dimensioni angolari delle stelle 308, 409
Modulazione d'ampiezza 235
— di fase 235
Molecole polari 567
— totalmente anisotrope 598
Monocromatiche, persone 148
Montatura di correzione 176
Mosotti-Clausius, formula di 566

Nascita di coppie 31
Newton, anelli di 28, 249
Non-località spaziale 628
— temporale 628

Obiettivo a immersione 124
Occhio, acutezza visiva di 147
—, camera anteriore di 141
—, camera posteriore di 141
— di « pesce » 138
— ipermetrope 143
—, limiti d'accomodazione di 143
— miope 143
—, sistema ottico di 141
— tipo 144
Oculare compensatore 176
— di Huygens 177
— di Kellner 179
— di Ramsden 177-179
Oggetti assorbenti 406
— rifrangenti 406
Olografia 370
Ologramma 371
Onda(e)
— di de Broglie 394
— di Huygens secondarie 24
— dipolare 465
— di polarizzazione 465
— di superficie 44
— luminosa stazionaria 269
— monocromatica 201
— non omogenea 44
— omogenea 44
— radio 10
— straordinaria 497
Opalescenza critica 651
Orologio associato 691
— perfetto 692
Ottica 10

— elettronica 70, 189
— fisica 10
— geometrica 12, 45
— ionica 189
— lineare 43
— non lineare 43, 595, 756
— parassiale (gaussiana) 79
Ovale di Cartesio 56

Paradosso dei gemelli 696
Permeabilità magnetica dinamica 42
— statica 42
Permettività dielettrica dinamica 42
— efficace 490
— longitudinale 493
— statica 42
— trasversale 493
Piano(i)
— contenenti gli atomi 417
— di messa a fuoco (di regolazione) 99
— di polarizzazione (di vibrazione) 40, 428, 442
— — rotatorio magnetico (effetto di Faraday) 616, 622
— — rotatorio naturale 616
— focali 81
— principali 81
Planck, costante di 11, 747
—, formula di 747
Pleocroismo 505
Pockels, effetto elettroottico lineare di 606
Pohl, esperimento di 214
Polarizzabilità 773
Polarizzatore 429
Polarizzazione
— circolare 431
— cromatica 523
— di vuoto 31
— ellittica 40, 431, 483
— — nel caso di una riflessione totale 448
—, grado di 456
— lineare 40, 428
Polaroid 428
Pompaggio ottico 762
Popolazione invertita 575
Potenza ottica 91
— di soglia 783
Potere
— assorbente 725
— emissivo 160, 725
— risolutivo 147, 337
— —, criterio di Rayleigh di 337
— — dell'obiettivo 386
— — dell'occhio 391
— — dell'ologramma 400
— — di microscopio 393, 398, 399
— — di telescopio 391
— — — spettrale 264, 265, 354
Pressione luminosa 570
Prévost, regola di 726
Principio dell'equilibrio dettagliato 721
— d'indeterminazione 230
— di sovrapposizione 24, 199
— di tautocronismo 71
Prisma(i)
— a visione diretta 118
— composto 117
— dispersivo 118
— polarizzatore
— — a due fasci 501
— — ad un fascio 501
— — di Ahrens 503
— — di Foucault 502
— — di Frank-Ritter 503
— — di Glan 503
— — di Glan-Thompson 503
— — di Glazebrook 503
— — di Hartnack-Prazmowski 503
— — di Nicol (nicol) 501
— — di Rochon 504
— — di Sénarmont 504
— — di Wollaston 504
—, potere risolutivo di 345, 355
Profondità di campo 99
— di penetrazione 437, 481
Proiezione stereografica 138
Prospettiva 100
Punto(i)
— antinodali 85
— antiprincipali 85
— aplanatici 122
— cardinali 82
— cieco 145
— coniugati 68
— di curvatura 102
— d'universo 687
— di visione netta prossimo 143
— — remoto
— focali 81, 103
— nodali 84
— ortoscopici 120
— principali 82
Pupilla
— dell'occhio 98, 142
— d'entrata 96
— d'uscita 97
Purkinje, effetto 149
Quanto(i) di luce 28, 745
Quadrivettore 716
— energia-impulso 719

Radianza energetica 160
— luminosa 160
Radiazione
—, densità spettrale di 230
— d'equilibrio (nera) 721, 727
— di Vavilov-Čerenkov 273
— gamma 10, 11
— infrarossa 10, 11
— termica 721
— transitoria 278
— ultravioletta 10, 11
— visibile 10, 11
Raggio(i) 14, 48, 537
— di curvatura principali 102
— ordinario 497
— parassiale 75
— principale 98, 102
— residui 487
— straordinario 497
— verde 36
— virtuale 70
— X 10, 11
Rallentamento dell'orologio mobile 691
Rayleigh, formula di 649
—, legge di 647
Rayleigh-Jeans, formula di 743
Regola delle somme 573
Relazione locale 628
— tra la massa e l'energia 718
Reticolo
— a zone 290
— cristallino 417
— di diffrazione 325, 327, 328
— — a riflessione concavo 356
— — bidimensionale 331, 415
— — d'ampiezza 331
— — di Rayleigh 364
— —, dominio di dispersione di 336
— —, intervallo risolvibile di 337
— —, massimi principali di 327
— —, massimi secondari di 327
— —, metodo dell'incidenza radente di 332
— —, ordine di spettro di 327
— —, passo di 326
— —, periodo di 418
— —, potere risolutivo di 336, 354
— — —, nella gamma dei raggi X 426
— —, trasparenza di 361
— — tridimensionale (spaziale) 331, 415
Resistenza dovuta alle onde 276
Retina 142, 144
Riflessione
—, angolo limite di 17, 437
— diffusa 17
— interferenziale 268
— regolare 17
— selettiva 269, 486
— totale 17, 437, 445, 449
Riflettore 183
— ad angoli 18
Rifrattometro interferenziale 253
Rifrattore 183
Rifrazione 36
— astronomica 35
— atomica 567
— conica 549, 550
— —, cono di 549, 550
— molare 567
— specifica 566
Rivelazione ottica 776
Rivestimenti a più strati 269
Rodopsina 151

Rowland, cerchio di 358, 359

Satelliti 660
— rossi (di Stokes) 660
— violetti (anti-Stokes) 660
Schermi complementari 301

Schmidt, camera di 186
Schuster, zone di 302
Sclerotica 141
Segmenti focali 103
Sellmeier, formula di 563
Semilarghezza delle righe spettrali 591
Sezione principale di cristallo 494
Sezioni normali principali 102
Simultaneità 677
Sincronismo di fase 778, 784
Sistema(i)
— afocale (telescopico) 81
— a menischi di Maksutov 186
— catottrico 84
— diottrico 84
— ortotomico 57
— ottico centrato 74
Smorzamento naturale 589
Sorgenti luminose virtuali 71
Spazio
— delle immagini 70
— degli oggetti 70
Specchio principale 183
Spettro
— da prisma 336
— normale 336
— secondario 112
— terziario 117
Spostamento gravitazionale delle righe spettrali 771
Stark, effetto 614
Stefan-Boltzmann, costante di 750
—, legge di 731
Stereocannocchiale 183
Stilb 160
Stoletov, pila di 449
Superficie(i)
— degli indici di rifrazione 557
— delle normali 534
— dei vettori d'onda 557
— d'onda (radiale) 538
— di uguale ampiezza 44
— di uguale fase 44
— isocromatiche 525
— stigmatica 56

Tachioni 689
Telefono ottico 447
Telescopio
— di Cassegrain 185
— di Gregory 186
— di Herschel-Lomonosov 185
— di Newton 185
Temperatura critica di miscibilità 652
— efficace di radiazione 769
Tempo
— di ripetizione 60, 64
— di risposta 199
— di «sparpagliamento» 352
— proprio 692
Tensore dielettrico 491, 531
— hermitiano 530
Teorema dei coseni 129
— d'inversione 542
— di Van Cittert-Zernike 244
Teoria
— corpuscolare della luce 22
— della visione dei colori 148
— elettromagnetica della luce 30
— ondulatoria della luce 24
Termine interferenziale 200
Tormalina 505
Trasparenza superficiale 443
Treno d'onda 62, 209

Ultramicroscopio 394
Ultravioletto 10, 11
Umore acqueo 142
— vitreo 142
Unità energetiche 155
— fotometriche 155

Variazione di fase nel caso di una riflessione 246, 440
Velocità
— della luce nel vuoto 681
— di fase 58
— di fronte d'onda avanzato 66
— di gruppo 58, 59-62, 541
— di trasporto dell'energia 65
— normale 39, 539
— principali di propagazione della luce nei cristalli 534
— radiale 540
Verdet, costante di 623
Vetrino coprioggetto 176
Vettore luminoso 271
Vibrazione modulata 235
— quasi-monocromatica 235
Vignettatura 99
Visione foveale 146
— periferica 146

Young, esperimento di 210

Wien, costante di 750
—, legge di spostazione di 737, 738
—, paradosso di 627, 628
—, teorema di 734

Zeeman, effetto 608
—, effetto, complesso (anomalo) 614
—, effetto, componenti π 609
—, effetto, componenti σ 609
—, effetto, semplice (normale) 613
—, effetto, teoria classica di 609